УДК 519.54

А. Ю. ОЛЬШАНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук (Моск. ун-т)

Вложение счетных периодических групп в простые 2-порожденные периодические группы

Доказана теорема о том, что всякая счетная периодическая группа H изоморфно вложима в некоторую простую 2-порожденную периодическую группу G. При этом для любых целых $k \geqslant 2$ и $l \geqslant 3$ в группе G найдется пара порождающих элементов порядков k и l.

Доведена теорема про те, що будь-яка зчисленна періодична група H ізоморфно вкладувана в деяку просту 2-породжену періодичну групу G. При цьому для будь-яких цілих $k \geqslant 2$ і $l \geqslant 3$ в групі G знайдеться пара породжуючих елементів порядків k і l.

Введение. Хорошо известно, что универсальная счетная локально конечная группа Холла [1] является простой и содержит все локально конечные счетные группы в качестве подгрупп. Хикин [2] показал, что всякая счетная локально конечная группа содержится в некоторой 3-порожденной периодической группе. Используя идеи работ Хикина [2], Холла [3] и Нейманов [4], Филлипс [5] доказал, что каждая периодическая счетная группа H содержится в некоторой 2-порожденной периодической группе G. При этом были существенно использованы сплетения, вследствие чего группа G не является простой. С другой стороны, В. Н. Образцов [6] установил, что всякая счетная периодическая группа без инволюций вложима в 2-порожденную простую периодическую группу. Для групп без инволюций в [6, 7] можно найти и более сильные теоремы о вложениях, которые нельзя перенести на 2-группы, как следует из работы О. Ю. Шмидта [8]. Поэтому, например, «экономные» вложения из [9] приводят к непериодическим группам, если в H есть инволюции.

В настоящей статье доказывается следующая теорема.

Теорема. *Всякая счетная периодическая группа H изоморфно вложима в некоторую простую 2-порожденную периодическую группу G (причем для любых целых $k \geqslant 2$ и $l \geqslant 3$ в G найдется пара порождающих элементов порядков k и l соответственно*).

При построении группы G мы часто будем отсылать читателя к книге [7], используя двойную нумерацию «лемма 26.5» и т. п. для утверждений из [7], формулировки которых ниже варьируются. Среди изменений выделим то, что в индуктивно определяемых группах $G(i)$ элемент бесконечного порядка может теперь содержаться в элементарной (в смысле Громова) нециклической подгруппе, что характерно для гиперболических групп с кручением [10].

1. Конструкция вложения. Пусть $\{G_\mu\}_{\mu \in I}$ — счетное семейство конечных или счетных периодических групп, в которое входят дан-

ная в теореме группа H и по паре циклических групп каждого порядка $m \geqslant 2$.

По определению $G(0) = \underset{\mu}{*} G_\mu$ — свободное произведение, а группы $G(i)$ при $i > 0$ индуктивно определяются по схеме из пунктов 34.1, 34.3 [7] со следующими изменениями.

Для каждой пары целых $k \geqslant 2$ и $l \geqslant 3$ выберем пару элементов $\{a_s, b_s\}$, где $s = s(k, l)$, а a и b порождают различные циклические свободные множители порядков k и l.

Слова A и B в алфавите $\mathcal{A}^1 = \bigcup\limits_{\mu} G_\mu$ назовем соизмеримыми в ранге $i - 1 \geqslant 0$, если для некоторых ненулевых целых u, v и некоторого слова X справедливо равенство $A^u \overset{i-1}{=} XB^vX^{-1}$. Очевидно, что тем самым введены отношения эквивалентности как на множестве слов, так и на группе $G(i-1)$.

Простым в ранге $i - 1 \geqslant 0$ назовем теперь любое свободное в ранге $i - 1$ слово, которое несоизмеримо в ранге $i - 1$ с периодом какого-либо ранга $j \leqslant i - 1$ или со словом меньшей длины. Среди простых слов выделим еще специальные — те 40-апериодические слова, которые не равны никакому произведению пары инволюций в группе $G(0)$.

Множество $\mathcal{X}_i$ периодов ранга $i > 0$ — некоторое максимальное множество попарно несоизмеримых в ранге $i - 1$ простых в ранге $i - 1$ слов A длины i. Если слово A специально, то период $A \in \mathcal{X}_i$ называется специальным периодом ранга i.

Соотношения первого типа

$$A^{n_A} = 1 \tag{1}$$

вводятся для каждого $A \in \mathcal{X}_i$. Показатели n_A быстро растут с ростом длины $|A|$, как будет видно из доказательства теоремы. Потребуем, в частности, чтобы число n_A было больше номера слова A, если считать все слова над $\mathcal{A}^1$ как-то пронумерованными.

Пусть A — специальный период ранга i, в запись которого входят лишь слоги из циклических подгрупп $\langle a_s \rangle$ и $\langle b_s \rangle$. Выберем первое слово C длины $< i$, не лежащее в подгруппе $\langle a_s, b_s \rangle \subset G(i-1)$ (если такое есть), и наложим соотношение

$$CA^n a_s A^{n+1} a_s \ldots A^{n+h-1} = 1, \tag{2}$$

где $n = [(h+1]^{-1} n_A]$. (О выборе константы $h = \delta^{-1}$ и других см. [7].)

Пусть $n_{1,1}, \ldots, n_{1,h}, n_{2,1}, \ldots, n_{2,h}$ — такие попарно различные целые числа, зависящие от специального периода A ранга i и отличные от n, $n+1, \ldots, n+h-1$, что $\sum\limits_j n_{kj} = n_A$ для $k = 1, 2$, а отношение любых двух из них меньше $1 + \delta/2$. Легко видеть, что такой выбор возможен благодаря ПМП из [7]. Тогда для специального периода A ранга i и первого из отличных от 1 в $G(i-1)$ слова T такого, что $|T| < i$, введем соотношения

$$a_1 A^{n_{1,1}} T A^{n_{1,2}} T \ldots A^{n_{1,h}} = 1, \tag{3}$$

$$b_1 A^{n_{2,1}} T A^{n_{2,2}} T \ldots A^{n_{2,h}} = 1. \tag{4}$$

Все соотношения (2)—(4) называются соотношениями второго типа и включаются вместе с (1) в $\mathcal{G}_i$. Далее группа $G(i)$ определяется, как и в п. 34.3.

2. Согласованные участки. При определении A-согласованных участков условие $\varphi(t) \overset{r}{=} 1$ (где $r = i$ или $r = j - 1$, см. 13.3 [7]) заменим на условие $\varphi(t) A^k \varphi(t)^{-1} \overset{r}{=} A^k$ для некоторого $k > 0$. Аналогично равенство $\varphi(t) A^k \varphi(t)^{-1} \overset{r}{=} A^{-k}$ определяет понятие антисогласованных участков. (В [9] $k = 1$.) Соответствующим образом меняется по-

нятие j-пары для клеток первого типа, причем j-пара возможна и в случае, когда $\varphi(p_1) \equiv \varphi(p_2)$ (а не только, когда $\varphi(p_1) \equiv \varphi(p_2)^{-1}$, как в п. 13.2 [7]). По лемме 3, примененной в меньшем ранге, показатель k в приведенном определен можно ограничить константой $\Omega_{|A|}!$. Числа n_A выберем делящимися на $(\Omega_{|A|}!)!$ Тогда $\varphi(t) A^{n_A} \varphi(t)^{-1} \overset{j-1}{=\!=} A^{\pm n_A}$, т. е. в случае наличия в диаграмме j-пары ее тип можно уменьшить, как и в п. 13.2[7], заменяя градуированную диаграмму приведенной градуированной диаграммой.

Рассматривая диаграммы над свободными произведениями и соответствующие им карты, необходимо учитывать уточнения, сделанные в § 33 и в начале § 34 [7]. Мы можем пользоваться, в частности, утверждениями лемм 34.1, 34.3, 34.4. В то же время некоторые из лемм гл. 8 и 9 книги [7] нуждаются в изменении формулировок или в их замещении другими. Начнем с того, что следствие 25.2 теперь неверно, и оно снимается. В формулировке леммы 25.2 вместо «сопряжено» следует теперь писать «соизмеримо», а вместо «слово X» — «свободное в ранге i слово X». К утверждению этой леммы следует добавить, что слова длины $\leqslant i$ имеют конечные порядки в $G(i)$. Это немедленно следует из определения множеств $\mathcal{X}_i$ в п. 1. Формулировки и доказательства лемм 25.3 и 25.4 сохраняются.

Напомним, что сегменты пути p в карте [7] отвечают слогам слова $\varphi(p)$, а первичные вершины делят слово $\varphi(p)$ на слоги.

Лемма 1. *Пусть Δ — приведенная дисковая диаграмма ранга i с контуром $p_1q_1p_2q_2$, где q_1 и q_2 — гладкие участки рангов k и l, причем $k \leqslant l$ и $\max(|p_1|, |p_2|) < \alpha k$. Тогда всякая первичная вершина пути q_1 может быть соединена с некоторой первичной вершиной пути q_2 таким путем x длины $< \gamma^{-1}k$, что метка каждого его сегмента равна в ранге 0 метке одного из сегментов путей q_1, q_2 или метке сегмента контура некоторой клетки из Δ.*

Доказательство. Нужно повторить доказательство леммы 22.4, выбирая в качестве путей s_i^j пути с первичными началом и концом на $\partial\Pi$ и на q_1, q_2. Это можно сделать, так как из индуктивных соображений к диаграммам Γ_1 и Γ_2 с меньшим числом клеток можно применить лемму 1. Точнее, доказываемую лемму 1 следует применить к поддиаграммам Γ_1' и Γ_2', вырезанным из Γ_1 и Γ_2 с помощью леммы 17.5. Незначительное удлинение путей u_1 и u_2, полученное в результате перехода от $\Gamma_{1(2)}$ к $\Gamma_{1(2)}'$ (менее, чем на $10\zeta^{-1}k$, ибо $|s_i^j| < 2\zeta|\partial\Pi|$) не сказывается на окончательной оценке.

Положим $\Omega_i = 3\gamma^{-1} \cdot (i+2)^{3\gamma^{-1}i}$.

Лемма 2. *Пусть Δ — приведенная дисковая диаграмма ранга i с контуром $p_1q_1p_2q_2$, где $\varphi(q_1)$ и $\varphi(q_2)^{-1}$ — периодические слова с простыми в ранге i периодами A и B, причем $|A| \geqslant |B|$, а $\max(|p_1|, |p_2|) < \alpha|B|$ и $\min(|q_1|, |q_2|) \geqslant \Omega_{|A|}|A|$. Тогда периоды A и B соизмеримы в ранге i, а если $A \equiv B$ (если $A \equiv B^{-1}$), то пути q_1 и q_2 A-согласованы (A-антисогласованы).*

Доказательство. Рассмотрим произвольную фазовую вершину o на пути q_2, т. е. вершину, начиная с которой можно прочесть слово B при движении вдоль q_2^{-1}. По лемме 1 ее можно соединить с некоторой фазовой вершиной на q_1 путем x длины $|x| < (1+\gamma^{-1})|A| < \frac{3}{2}\gamma^{-1}|A|$, причем так, что слоги слова $\varphi(x)$ встречаются или в $A^{\pm 1}$, или в $B^{\pm 1}$, или в метке некоторой клетки Π из Δ.

По леммам 26.5 и 23.27 $|\partial\Pi| < 3\gamma^{-1}\zeta n|B|$. Из выбора чисел n_A в п. 1 следует, что число различных определяющих слов длины, меньшей $3\gamma^{-1}\zeta n|B|$, меньше $|B|$, ибо $|B| > i$ по лемме 25.2. Поэтому число возможностей для слогов в слове $\varphi(x)$ ограничено сверху величиной $2|A| + 2|B| + |B|^2 < (|A|+2)^2$. Учитывая ограничение на $|x|$, получаем, что $\varphi(x)$ принимает менее $\Omega_{|A|}$ значений в $G(i)$.

Следовательно, для некоторых разных фазовых вершин o и o' на q_2 имеем $\varphi(x) \overset{i}{=} \varphi(x')$, где путь x' строится, как и x. Значит, для $\varphi(x) \equiv X$

получаем $XA^sX^{-1} \overset{i}{=} B^t$, где $t > 0$; а так как по лемме 25.2 B имеет бесконечный порядок в $G(i)$, то $s \neq 0$, и A с B соизмеримы в $G(i)$.

В случае $A \equiv B^{\pm 1}$ имеем равенство $XA^sX^{-1} \overset{i}{=} A^t$, где можно считать, что $s > 3\gamma^{-1}$ за счет выбора числа $\Omega_{|A|}$. Здесь $|s| = |t|$, ибо иначе противоречие получается, как и в доказательстве леммы 25.14 [7].

Если $A \equiv B$, то $s = t$, так как в противном случае слово A^s равно в $G(i)$ слову длины $\leqslant 2|X| < 2(\gamma^{-1}+1)|A|$ (см. рис. 1, на котором заштрихована диаграмма этого равенства), что невозможно по теореме 22.4, ибо $3\gamma^{-1} > 2\bar{\beta}^{-1}(1+\gamma^{-1})$. Поэтому пути q_1 и q_2 согласованы с помощью x. Аналогично, при $A \equiv B^{-1}$ эти пути антисогласованы.

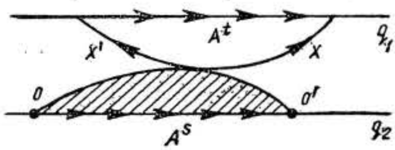

Рис. 1

3. Включение простых слов в элементарные подгруппы. Лемма 3. *Пусть B — простое в ранге i слово и для некоторого слова T и числа $k > 0$ $TB^kT^{-1} \overset{i}{=} B^{\pm k}$. Тогда в группе $G(i)$ элемент T лежит в некоторой такой надгруппе K циклической группы $\langle B \rangle$, что индекс $(K : \langle B \rangle)$ меньше $\Omega_{|B|}$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное слово W вида $B^{s_0}T^{\eta_1}B^{s_1}T^{\eta_2}\ldots B^{s_r}$, где $\eta_j = \pm 1$, s_j — целые. Для достаточно большого

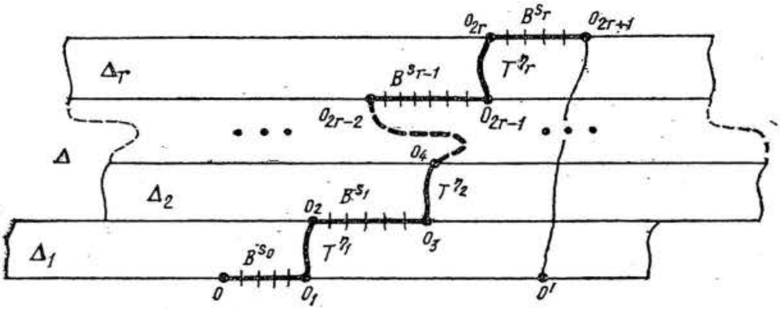

Рис. 2

m, кратного числу k ($m \gg r, k, |s_j|, |B|, |T|$) запасемся r диаграммами $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$, каждая из которых отвечает равенству $TB^mT^{-1}B^{\mp m} \overset{i}{=} 1$.

Пусть $p_1q_1p_2q_2$ — контур диаграммы Δ_1 такой, что $\varphi(q_1) \equiv B^m$, $\varphi(p_{1(2)}) \equiv T^{\pm 1}$. Диаграмма Δ_1 составлена из нескольких диаграмм, построенных для равенства $TB^kT^{-1}B^{\mp k} \overset{i}{=} 1$. Поэтому на q_1 достаточно далеко от концов $(q_1)_-$ и $(q_1)_+$ можно найти вершину o_1 и путь t_1 с меткой T^{η_1}, соединяющий ее с вершиной o_2 на q_2. Кроме того на q_1 найдется вершина o такая, что меткой пути $o - o_1 - o_2$ служит $B^{s_0}T^{\eta_1}$ (рис. 2).

Приклеим теперь к Δ_1 диаграмму Δ_2 (или ее зеркальную копию, в зависимости от знака $\eta_1 \cdot \eta_2$) со сдвигом последней вдоль пути q_2 на путь с меткой B^{s_1}. Тогда, продолжая путь $o - o_1 - o_2$ до $o - o_1 - o_2 - o_3 - o_4$, сможем прочесть слово $B^{s_0}T^{\eta_1}B^{s_1}T^{\eta_2}$. Таким образом из $\Delta_1, \ldots, \Delta_r$ составляется диаграмма Δ, которую после удаления j-пар считаем приведенной и в которой метка пути $o - o_{2r+1}$ в ранге i равна W, причем вершина o_{2r+1} лежит на участке контура диаграммы Δ с меткой B^m (рис. 2).

Вершина o может быть выбрана достаточно далеко от $(q_1)_-$ и $(q_1)_+$ по сравнению с длиной $|W|$. Поэтому по леммам 26.5, 22.5 и 22.4 вершина o_{2r+1} удалена от q_1 не более, чем на $\gamma^{-1}|B|$. Значит, она соединяется в Δ путем t с некоторой вершиной o' на q_1 так, что: 1) $\varphi(o - o') \equiv B^l$ для некоторого l и 2) $|t| < (\gamma^{-1}+1)|B|$. Как и в лемме 2, получаем, что $\varphi(t)$ может принимать менее $\Omega_{|B|}$ различных значений в $G(i)$. Поскольку $W \overset{i}{=} B^l \varphi(t)^{-1}$, число смежных классов группы $\langle B, T\rangle$ по $\langle B\rangle$ меньше $\Omega_{|B|}$.

4. Модификация некоторых лемм из [7]. Точных аналогов лемм 25.6 и 25.7 теперь нет, а в формулировках лемм 25.6 и 25.8 потребуем, чтобы слово A было специальным. Для доказательства заметим, что в диаграмме Δ не может быть клетки π, имеющей степень примыкания ψ к q_1 или к q_2 большую, чем $2\alpha^{-1}\delta$. Действительно, если π — клетка типа 1, то утверждение следует из леммы 26.5 в меньшем ранге и условия $S5$. Если π — клетка типа 2 и $r(\pi) = r(q)$, где $q = q_{1(2)}$, то утверждение справедливо по условию $S4$ из определения гладкого участка, а если $r(\pi) \neq r(q)$,— то по условию $S2\,|\Gamma \wedge q| < (1+\gamma)\,r(q)$ для поддиаграммы примыкания Γ. Поэтому слово $V \equiv \varphi(\Gamma \wedge q)$ не может содержать 40 степеней в качестве подслов, ибо период A специален. Однако степени с показателем $[\varepsilon n]$ должны встречаться в V (см. рассуждение из теоремы 16.2 [7]), что противоречит неравенству $\varepsilon n > 40$.

Ввиду неравенства $\psi \leqslant 2\alpha^{-1}\delta$ и леммы 26.5 не может реализоваться вторая возможность, указанная в лемме 22.3, а значит, с помощью леммы 22.3 можно найти общий подпуть $\tilde{q}$ путей q_1 и q_2^{-1} такой, что $|\tilde{q}| > |A| + 1$ (если при доказательстве леммы 25.8 рассуждать «от противного»). Поэтому при условии леммы 25.6 получаем совпадение фазовых вершин путей q_1 и q_2^{-1}, лежащих на $\tilde{q}$, откуда слова Z_1 и Z_2 равны в ранге i степеням слова A; а при условии леммы леммы 25.8 получаем совпадение в $G(0)$ слова A с циклическим сдвигом слова A^{-1}. Последнее противоречит специальности периода A, так как A оказывается произведением двух инволюций, как и в лемме 36.4 [7].

Лемма 4. *Пусть Δ — приведенная дисковая диаграмма ранга i с контуром $p_1q_1p_2q_2$, $\varphi(q_1)$ и $(q_2)^{-1}$ — периодические слова с простыми в ранге i периодами A и B. Пусть еще $\max(|p_1|, |p_2|) < \alpha|B|$, $|q_1| > (1 + \gamma/2)|A|$, $|q_2| > \zeta^{-1}\Omega_{|B|}$. Тогда слово A соизмеримо в ранге i с B, а если при этом $\varphi(q_1)$ начинается с A, а $\varphi(q_2)^{-1}$ — с B, то $A^k \overset{i}{=} \varphi(p_1)^{-1}B^l\varphi(p_1)$ для некоторых ненулевых k и l.*

Доказательство. Проводя рассуждения сначала, как в доказательстве леммы 25.9, заменим затем ссылку на лемму 25.6 [7] ссылкой на лемму 2, в силу которой теперь

$$(P_1T)\,B^s\,(P_1T)^{-1} \overset{i}{=} B^t \tag{5}$$

для некоторых ненулевых s и t. При этом $|s| = |t|$, как и в лемме 25.14. Далее, как и в конце доказательства леммы 19.1,

$$A \overset{i}{=} P_1^{-1}\,(B^{-d}\,(P_1T)^{-1})\,P_1.$$

Если здесь произведение $B^{-d}T^{-1}P_1^{-1}$ имеет конечный порядок в ранге i, то получаем противоречие с простотой слова A в ранге i ввиду леммы 25.2. В противном случае из равенства (5) и леммы 3 следует, что $(B^{-d}T^{-1}P_1^{-1})^k \overset{i}{=} B^l$ для некоторых ненулевых k, l, что доказывает лемму.

Изменим формулировку леммы 25.10 следующим образом.

Лемма 5. *Пусть Δ — приведенная дисковая диаграмма ранга i с контуром $p_1q_1p_2q_2$, где $\varphi(q_1)$, $\varphi(q_2)$ — периодические слова с простыми в ранге i периодами A и B, $|q_2| > \zeta^{-1}\Omega_{|B|}$, $\max(|p_1|, |p_2|) < 2h\varepsilon^{-1}c$, где $c = \min(|A|, |B|)$. Тогда или $|q_1| < (1+\gamma)|A|$ и $|A| > |B|$, или слово A соизмеримо со словом B, причем из равенства $A \equiv B$ следует, что пути ${}_1b$ и q_2 A-антисогласованы в Δ, а из $A \equiv B^{-1}$,— что они A-согласованы.*

Доказательство. Следует заменить в доказательстве леммы 25.10 ссылки на леммы 25.9, 25.8 и 25.5 ссылками на леммы 4 и 2.

Сохраняются формулировки и доказательства лемм 25.11 и 25.16 [7].

Аналоги лемм 25.12—25.15, 25.17, 25.19—25.21 теперь ненужны (или неверны). Вместо 25.18 потребуется следующая лемма.

Лемма 6. *Если для некоторого специального простого в ранге i слова A и некоторого слова T справедливо равенство $A^k T A^l \overset{i}{=} T$, то $k = l = 0$ или $T \in \langle A \rangle \subset G(i)$.*

Доказательство. Как и в лемме 25.14 $|k| = |l|$. Если $l \neq 0$, то $k = -l$, так как в случае $k = l$ имеем $TA^{ml}T^{-1} \overset{i}{=} A^{-ml}$ для любого $m > 0$, что противоречит леммам 22.5 и 25.8, примененным к диаграммам этих равенств. Поэтому $TA^{ml}T^{-1} \overset{i}{=} A^{ml}$, откуда $T \in \langle A \rangle$ по лемме 25.6.

В формулировке леммы 26.1 следует заменить n на δn_A, а в доказательствах лемм 26.1 и 26.2 ссылки на лемму 25.10 заменяются ссылками на лемму 5. В остальном доказательства лемм 26.1—26.5 и теоремы 26.1 сохраняются, а других аналогов утверждений из § 26 [7] нам не потребуется.

В доказательстве леммы 27.2 ссылку на лемму 25.18 [7] следует заменить ссылкой на лемму 6 (а число n — на δn_A). При этом нужно добавить, что вставки в соотношениях (2)—(4) между степенями периода A короче A, а значит, по теореме 22.4 и лемме 26.5 они могли бы содержаться в подгруппе $\langle A \rangle \subset G(i)$ только в случае равенства единице в ранге i, что противоречило бы определению слов (2)—(4). Сохраняется утверждение леммы 27.1, а аналогов лемм 27.3 и 27.4 теперь нет.

5. Завершение доказательства. Лемма 7. *Для каждого номера s множество специальных периодов A всех рангов, в запись которых входят лишь буквы из циклических подгрупп $\langle a_s \rangle$ и $\langle b_s \rangle$, бесконечно.*

Доказательство. Пусть $a \in \langle a_s \rangle \setminus \{1\}$, а b и c — неединичные элементы из $\langle b_s \rangle$, причем $b \neq b^{-1}$. Как и в лемме 34.1 [7], рассмотрим произвольное 6-апериодическое слово W в алфавите $\{x, y\}$. Произведем в нем подстановку: $x \to (ab)^6$, $y \to ac$. Легко видеть, что получено 40-апериодическое слово V в алфавите $\mathcal{A}^1$, причем никакое подслово U в V длины большей 100 не равно циклическому сдвигу слова U^{-1}, так как $b \neq b^{-1}$. Бесконечность множества таких слов V дает возможность выбрать бесконечное множество их подслов A с тем свойством, что они не являются истинными степенями (это возможно ввиду 40-апериодичности слов V), имеют длину больше 100, а начало и конец слова A содержатся в разных свободных множителях $\langle a_s \rangle$ и $\langle b_s \rangle$. Достаточно показать, что A — специальный период.

Во-первых, A не будет произведением двух инволюций в $G(0)$, ибо A не совпадает с каким-либо циклическим сдвигом слова A^{-1}. Допустив, что A не является специальным периодом ранга $i = |A|$, мы по лемме 25.2 должны рассмотреть две возможности.

1. Для $m > 0$ слово A^m сопряжено в ранге $i - 1$ с элементом из сомножителя G_μ для некоторого $\mu \in I$. Тогда в A^m есть подслово вида $B^{[\varepsilon n]}$, где $B \not\equiv A$ (см. лемму 16.7 [7]), что невозможно, ибо $\varepsilon n \gg 40$.

2. Слово A^m сопряжено в ранге $i - 1$ со степенью какого-то периода B. Но тогда в кольцевой диаграмме сопряженности степень примыкания любой клетки к одному контуру меньше ε, как и в случае 1, а к другому — меньше $\bar{\alpha}$ по леммам 26.5 и 21.7. Полученное противоречие с теоремой 22.1 и неравенством $\bar{\gamma} > \bar{\alpha} > \varepsilon$ завершает доказательство леммы.

Доказательство теоремы. Поскольку $H = G_\mu$ для некоторого μ, по лемме 34.4 H является подгруппой в группе $G = G(\infty)$. Из леммы 25.2 следует периодичность группы G.

Из леммы 7 и вида определяющих слов (2) следует, что любое слово C в некотором ранге, а значит, и в группе G, попадает в подгруппу $\langle a_s, b_s \rangle$. Поэтому пара $\{a_s, b_s\}$ порождает группу G. В связи с этим напомним, что для любых $k \geq 2$ и $l \geq 3$ была выбрана пара $\{a_s, b_s\}$ элементов порядков k и l в $G(0)$, которые сохраняют эти порядки и в G по лемме 34.4.

Аналогично из соотношений (3) и (4) и леммы 7 следует, что для любого неединичного в G элемента T нормальное замыкание $\langle T \rangle^G$ содержит a_1 и b_1, т. е. $\langle T \rangle^G = G$. Действительно, при наложении дополнительного соотношения $T = 1$ левая часть равенства (3) превращается в $a_1 A^{n_A}$ ввиду равенства $\sum_{k=1}^{h} n_{1,k} = n_A$. Далее, $a_1 A^{n_A} = a_1$ благодаря соотношению (1). Точно так же (из (4)) и $b_1 \in \langle T \rangle^G$.

Итак, G — простая группа, и теорема доказана.

1. *Hall Ph.* Some constructions for loccaly finite groups // J. London Math. Soc.— 1959.— **34**.— P. 305—309.
2. *Hickin K.* An embedding theorem for periodic groups // Ibid.— 1976.— **14**.— P. 63—64.
3. *Hall Ph.* On the embedding of a group in a join of given groups // J. Austral. Math. Soc.— 1974.— **17**.— P. 434—495.
4. *Neumann B. H., Neumann H.* Embedding theorems for groups // Proc. London Math. Soc.— 1959.— **34**.— P. 465—479.
5. *Phillips R. E.* Embedding methods for periodic groups // Ibid.— 1977.— **35**.— P. 238—256.
6. *Образцов В. Н.* Теорема о вложениях групп и ее следствия // Мат. сб.— 1989.— **180**, № 4.— С. 529—541.
7. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах.— М. : Наука, 1989.— 300 с.
8. *Шмидт О. Ю.* Локальная конечность одного класса бесконечных периодических групп.— Избр. тр. Математика.— М. : Изд-во АН СССР, 1959.— 316 с.
9. *Ольшанский А. Ю.* Экономные вложения счетных групп // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1.— 1989.— № 2.— С. 28—34.
10. *Gromov M.* Hyperbolic groups // Essays in group theory (MSRI Publ. 8).— New York etc.: Springer, 1987.— P. 75—263.

Получено 24.12.90