УДК 512.61

В. И. СУЩАНСКИЙ, д-р физ.-мат. наук,
О. Е. БЕЗУЩАК, асп. (Киев. ун-т)

l-Сплетения и изометрии обобщенных бэровских метрик

С помощью конструкции сплетения по бесконечным (вправо и влево) последовательностям групп подстановок получено явное описание групп изометрий обобщенных метрических пространств Бэра — естественных аналогов пространства всех p-адических чисел.

За допомогою конструкції вінцевого добутку за нескінченними (вправо і вліво) послідовностями груп підстановок отримано явний опис груп ізометрій узагальнених метричних просторів Бера — природних аналогів всіх p-адичних чисел.

В теории финитно аппроксимируемых групп в последнее время нашли существенные применения представления групп изометриями бэровских метрик [1—3]. Пространства Бэра допускают естественные обобщения, которые в данной работе названы обобщенными пространствами Бэра. При изучении их групп изометрий используется общая конструкция l-сплетения групп подстановок и некоторые ее подгруппы. Изучаются их подстановочные и метрические свойства, приводится описание групп изометрий обобщенных пространств Бэра и, в частности, групп изометрий полных дискретно нормированных полей.

1. Определение и простейшие свойства l-сплетений. Сплетением по линейно упорядоченному множеству $\mathcal{J}$ (сокращенно l-сплетением) групп подстановок (G_α, M_α), $\alpha \in \mathcal{J}$, называется [1] группа всех преобразований u множества $M = \prod\limits_{\alpha\in\mathcal{J}} M_\alpha$, которые удовлетворяют следующим условиям:

а) если $(x_\alpha)^u_{\alpha\in\mathcal{J}} = (y_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}$ $((x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}, (y_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}} \in M)$, то для любого $k \in \mathcal{J}$ компонента с номером k набора $(y_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}$ зависит лишь от тех компонент $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}$, номера которых не превышают k;

б) для каждого $k \in \mathcal{J}$ при фиксированном начале $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{J}}$ до k-й компоненты включительно отображение $x_k \to y_k$, определяемое u, является подстановкой из (G_k, M_k).

Далее будем полагать, что $\mathcal{J}$ совпадает с множеством Z целых чисел, а порядок на нем — с естественным порядком на Z. Тем самым элементы множества M — бесконечные в обе стороны наборы, координаты которых принадлежат M_α для соответствующих $\alpha \in Z$. Для любого набора $\bar{x} = (x_\alpha)_{\alpha\in Z}$ и числа $k \in Z$ обозначим через ${}^{(k)}\bar{x}$ его бесконечное влево начало с крайней правой координатой x_k, а через $\bar{x}^{(k)}$ — бесконечный вправо конец с крайней левой координатой x_k. Естественно определяется операция $*$ приписывания одного из наборов такого вида к другому; для произвольного $k \in Z$ имеем $\bar{x} = {}^{(k)}\bar{x} * \bar{x}^{(k+1)}$. Символом $a_\alpha({}^{(\alpha-1)}\bar{x})$ будем обозначать функцию, определенную на ${}^{(\alpha-1)}M = \prod\limits_{i<\alpha} M_i$ со значениями в G_α. Для обозначения тождественно равной единице функции такого вида при любом α используется символ ε. Бесконечный в обе стороны набор функций

$$u = [a_\alpha({}^{(\alpha-1)}\bar{x})]_{\alpha\in Z} \tag{1}$$

будем называть таблицей над семейством $(G_\alpha, M_\alpha)_{\alpha\in Z}$. По определению каждое преобразование из l-сплетения групп $(G_\alpha, M_\alpha)_{\alpha\in Z}$ однозначно задает таблицу вида (1). Она действует на произвольный элемент $\bar{m} = (m_\alpha)_{\alpha\in Z}$ согласно равенству

$$\bar{m}^u = (m_\alpha^{a_\alpha({}^{(\alpha-1)}\bar{m})})_{\alpha\in Z}. \tag{2}$$

Непосредственно проверяется, что при таком действии u определяет подстановку на M, обозначаемую далее тем же символом, которая содержится в l-сплетении групп (G_α, M_α), $\alpha \in Z$. Действию (2) соответствует операция умножения таблиц, задаваемая следующим образом. Произведением таблиц $u = [a_\alpha({}^{(\alpha-1)}\bar{x})]_{\alpha \in Z}$ и $v = [b_\alpha({}^{(\alpha-1)}\bar{x})]_{\alpha \in Z}$ является таблица uv, компоненты которой определяются равенствами

$$[uv]_\alpha = a_\alpha({}^{(\alpha-1)}\bar{x}) \cdot b_\alpha({}^{(\alpha-1)}(\bar{x}^u)), \quad \alpha \in Z. \tag{3}$$

Итак, l-сплетение групп (G_α, M_α), $\alpha \in Z$, совпадает с группой таблиц (1), правило умножения которых задано равенством (3), а действие на элементы M — равенством (2). Далее будем обозначать эту группу символом $\underset{\alpha \in Z}{\S} G_\alpha$. Единичный элемент группы $G = \underset{\alpha \in Z}{\S} G_\alpha$ — таблица e, все компоненты которой равны ε, а обратной к (1) будет таблица u^{-1} с компонентами

$$[u^{-1}]_\alpha = a_\alpha^{-1}({}^{(\alpha-1)}(\bar{x}^{[u^{-1}]_{\alpha-1}})),$$

где ${}^{(\alpha)}u$ — начало u, крайней правой компонентой которой является $[u]_\alpha$. Отметим, что все преобразования M, удовлетворяющие только условию а) в определении сплетения, будут образовывать группу, которая совпадает с $\underset{\alpha \in Z}{\S} S(M_\alpha)$.

Определение 1. *Глубиной таблицы* $u \in G$, $u \neq e$, *будем называть такое число* $\alpha \in Z$, *что* $[u]_\beta = \varepsilon$ *при* $\beta < \alpha$ *и* $[u]_\alpha \neq \varepsilon$. *Если же такого числа не существует, то говорим что и имеет глубину* $-\infty$. *Глубину таблицы и будем обозначать* гл. u; *отдельно полагаем* гл. $e = \infty$.

Лемма 1. *Для любых таблиц* $u, v \in G$ *выполнены соотношения*

$$\text{гл. } uv \geqslant \min\{\text{гл. } u, \text{ гл. } v\}, \text{ гл. } u^{-1} = \text{гл. } u, \text{ гл. } u^{-1}vu = \text{гл. } v. \tag{4}$$

Определение 2. *Таблицу* $u \in G$ *назовем локально ограниченной, если для любого* $\bar{x} \in M$ *существует такой номер* $\alpha \in Z$, *что* ${}^{(\alpha)}\bar{x} = {}^{(\alpha)}(\bar{x}^u)$.

Лемма 2. *Подмножества а)* $\tilde{G} = \{u/u \in G$ — *локально ограниченная таблица*$\}$, *б)* $\bar{G} = \{u/u \in G, \text{ гл. } u > -\infty\}$ *являются подгруппами l-сплетения* G.

Группу $\tilde{G}$ будем называть l-сплетением групп (G_α, M_α), $\alpha \in Z$, и обозначать $\underset{\alpha \in Z}{\tilde{\S}} G_\alpha$, а группу $\bar{G}$ — их $\bar{l}$-сплетением и обозначать $\underset{\alpha \in Z}{\bar{\S}} G_\alpha$; $\tilde{G}$ и $\bar{G}$ можно определять независимо от основной конструкции.

Пусть $G^{(k)}$ — подгруппа таблиц глубины $\geqslant k$, а ${}^{(k)}G$ — подгруппа таких таблиц u, что $[u]_\alpha = \varepsilon$ при $\alpha > k$.

Лемма 3. 1). *Для любого* $k \in Z$ *имеем* $G^{(k)} \lhd G$ *и* $G = {}^{(k-1)}G \leftthreetimes G^{(k)}$.
2). $\bar{G} = \bigcup\limits_k G^{(k)}$, $\bar{G} \rhd \tilde{G}$.

2. Подстановочно-групповые свойства. Пусть $\bar{a} = (a_\alpha)_{\alpha \in Z}$ — фиксированный элемент из M, $M(\bar{a})$ — совокупность тех наборов $\bar{x} \in M$, для которых при некотором $k \in Z$ выполнено равенство ${}^{(k)}\bar{x} = {}^{(k)}\bar{a}$. Различные подмножества вида $M(\bar{a})$, $\bar{a} \in M$, образуют разбиение M.

Опишем области транзитивности сплетения G и его подгрупп $\bar{G}$, $\tilde{G}$ в том случае, когда все сплетаемые группы (G_α, M_α) интранзитивны и $M_\alpha = \bigcup\limits_{i \in I_\alpha} M_{\alpha,i}$ — разбиение множества M_α на орбиты группы G_α, $\alpha \in Z$.

Пусть $f: Z \to \bigcup\limits_{\alpha \in Z} I_\alpha$ — такая функция, что для всех $\alpha \in Z$ имеем $f(\alpha) \in$

$\in I_\alpha$. Положим $M(f)=\prod_{\alpha\in Z} M_{\alpha,f(\alpha)}$, $M(\bar{a},f)=M(\bar{a})\cap M(f)$. Множество всех функций указанного вида обозначим через F.

Теорема 1. *Пусть $G=\S_{\alpha\in Z} G_\alpha$ — l-сплетение интразитивных групп подстановок (G_α, M_α) и $\langle M_{\alpha,i}\rangle_{i\in I_\alpha}$ — разбиение множества M_α на орбиты группы G_α, $\alpha\in Z$. Орбитами группы G на множестве M будут подмножества $M(f)$, $f\in F$, а орбитами $\tilde{G}$, $\bar{G}$ на M — подмножества $M(\bar{a},f)$, $\bar{a}\in\in M$, $f\in F$.*

Доказательство. Наборы $\bar{x}=(x_\alpha)_{\alpha\in Z}$ и $\bar{y}=(y_\alpha)_{\alpha\in Z}$ содержатся в одной орбите группы G тогда и только тогда, когда при любом $\alpha\in Z$ элементы x_α и y_α содержатся в одной орбите группы G_α. Отсюда следует первое из утверждений теоремы. Пусть теперь $\bar{x}$, $\bar{y}\in M(\bar{a},f)$, $\bar{a}\in M$, $f\in F$. Тогда существует $k\in Z$ такое, что $^{(k)}\bar{x}={}^{(k)}\bar{y}$. Поэтому таблицу, переводящую $\bar{x}$ в $\bar{y}$, можно выбрать из подгруппы $G^{(k)}$. Отсюда получаем, что каждая из групп $\tilde{G}$, $\bar{G}$ действует транзитивно на множестве $M(\bar{a},f)$. С другой стороны, если $\bar{x}\in M(\bar{a},f)$, а $\bar{y}\notin M(\bar{a},f)$, то ни при каком $k\in Z$ таблицы из группы $G^{(k)}$ не могут перевести $\bar{x}$ в $\bar{y}$. Это и означает, что разбиение M на подмножества вида $M(\bar{a},f)$, $\bar{a}\in M$, $f\in F$, совпадает с его разбиением на орбиты групп $\tilde{G}$, $\bar{G}$. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть $\S_{\alpha\in Z} G_\alpha$ — транзитивная группа подстановок. Областями транзитивности подгрупп $\tilde{G}$, $\bar{G}$ будут множества вида $M(\bar{a})$, $\bar{a}\in M$.*

Рассмотрим теперь как строятся системы импримитивности l-сплетения G и его подгрупп $\tilde{G}$, $\bar{G}$ по системам импримитивности сплетаемых групп. Определим сначала соответствующие конструкции над решетками. Пусть $\langle R_\alpha\rangle_{\alpha\in Z}$ — семейство решеток с наибольшим и наименьшим элементами. Для произвольного $\alpha\in Z$ отождествим наибольший элемент решетки $R_{\alpha-1}$ с наименьшим элементом решетки R_α. Символом $\coprod_{\alpha\in Z} R_\alpha$ обозначим множество элементов решеток R_α с учетом так проведенного отождествления, к которому отдельно присоединены два элемента, обозначаемые 0, 1. На множестве $R=\coprod_{\alpha\in Z} R_\alpha$ введем отношение порядка, полагая для любых a, $b\in R: a\leqslant b$, если выполнено одно из условий:

1) существует $\alpha\in Z$ такой, что $a, b\in R_\alpha$ и $a\leqslant b$;
2) $a\in R_\alpha$, $b\in R_\beta$, причем $\alpha<\beta$;
3) $b=1$ или $a=0$.

Непосредственно проверяется, что отношение $\leqslant$ — частичный порядок на R, причем упорядоченное множество $(R,\leqslant)$ является решеткой с наибольшим (равным 1) и наименьшим (равным 0) элементами. Так построенную решетку будем называть Z-объединением решеток R_α, $\alpha\in Z$, и обозначать тем же символом $\coprod_{\alpha\in Z} R_\alpha$.

Соединением решетки R_1 с решеткой R_2 (в таком же порядке) назовем решетку, возникающую при отождествлении элементов 0_{R_1} и 1_{R_2} с сохранением порядка внутри R_1 и R_2.

Пусть $R=\prod_{\alpha\in Z} R_\alpha$ — декартово произведение решеток R_α, $\alpha\in Z$. Символом $\prod^r_{\alpha\in Z} R_\alpha$ обозначим фактор-решетку решетки R по отношению конгруэнтности $\sim$, которое задается условием $(a_\alpha)_{\alpha\in Z}\sim(b_\alpha)_{\alpha\in Z}$ тогда и только тогда, когда при некотором $k\in Z$ для всех $\alpha<k$ имеем $a_\alpha=b_\alpha$ $((a_\alpha)_{\alpha\in Z}$, $(b_\alpha)_{\alpha\in Z}\in R)$.

Лемма 4. *Пусть* $\bar{t} = (t_\alpha)_{\alpha\in Z}$ — *некоторый элемент из* M. *Таблица* $u = [a_\alpha({}^{(\alpha-1)}\bar{x})]_{\alpha\in Z}$ *из* l*-сплетения* G *содержится в стабилизаторе* $\mathrm{St}_G(\bar{t}) = G_{\bar{t}}$ *точки* $\bar{t}$ *в группе* G *тогда и только тогда, когда для любого* $\alpha\in Z$ *выполнено условие* $a_\alpha({}^{(\alpha-1)}\bar{t})\in \mathrm{St}_{G_\alpha}(t_\alpha)$.

Доказательство. Равенство $\bar{t}^u = \bar{t}$ равносильно бесконечной системе соотношений

$$t_\alpha^{a_\alpha({}^{(\alpha-1)}\bar{t})} = t_\alpha,\quad \alpha\in Z.$$

α-е соотношение этой системы в точности означает, что подстановка $a_\alpha({}^{(\alpha-1)}\bar{t})$ содержится в стабилизаторе $\mathrm{St}_{G_\alpha}(t_\alpha)$. Отсюда получаем требуемое.

Следствие. *Стабилизатор точки* $\bar{t}\in M$ *в подгруппе* $\tilde{G}$ *или* $\bar{G}$ *совпадает с пересечением этой подгруппы со стабилизатором* $G_{\bar{t}}$.

Предположим, что H_α — надгруппа стабилизатора точки t_α в G_α, т. е. $\mathrm{St}_{G_\alpha}(t_\alpha)\leqslant H_\alpha\leqslant G_\alpha$, $\mathfrak{H} = \langle H_\alpha\rangle_{\alpha\in Z}$ — семейство таких подгрупп. По $\mathfrak{H}$ однозначно определяется подгруппа $U(\mathfrak{H})$ l-сплетения G, состоящая из таблиц вида $[g_\alpha({}^{(\alpha-1)}\bar{x})]_{\alpha\in Z}$, для каждой из которых найдется такой номер k, что при $\alpha<k$ выполнено соотношение $g_\alpha({}^{(\alpha-1)}\bar{t})\in H_\alpha$. Два семейства $\mathfrak{H} = \langle H_\alpha\rangle_{\alpha\in Z}$ и $\mathfrak{H}' = \langle H'_\alpha\rangle_{\alpha\in Z}$ определяют одну подгруппу лишь тогда, когда они имеют общее начало, т. е. при некотором $k\in Z$ для всех $\alpha<k$ выполнены равенства $H_\alpha = H'_\alpha$. Для любого набора $\mathfrak{H}$ имеем $U(\mathfrak{H})\geqslant U(\mathfrak{H}_0)$, где $\mathfrak{H}_0 = \langle H^0_\alpha\rangle$, $H^0_\alpha = \mathrm{St}_{G_\alpha}(t_\alpha)$. Пусть R_α — решетка надгрупп стабилизатора H_α в группе G_α.

Лемма 5. *Решетка всех надгрупп* $U(\mathfrak{H}_0)$ *в группе* G *изоморфна* $\prod\limits_{\alpha\in Z}^{r} R_\alpha$.

Доказательство. Изоморфизм этих решеток определяется естественным отображением множества всех наборов $\mathfrak{H} = \langle H_\alpha\rangle_{\alpha\in Z}$ на R.

Теорема 2. *Пусть* G — l*-сплетение импримитивных групп подстановок* (G_α, M_α), $\alpha\in Z$, *и* R_α — *решетка систем импримитивности группы подстановок* (G_α, M_α), $\alpha\in Z$. *Тогда решетка разбиений в области импримитивности* l*-сплетения* G *является соединением двух решеток, первая из которых изоморфна* $\prod\limits_{\alpha\in Z}^{r} R_\alpha$, *а вторая* — $\prod\limits_{\alpha\in Z} R_\alpha$.

Доказательство. В силу известного соответствия между системами импримитивности транзитивной группы подстановок и надгруппами ее стабилизатора точки [4] достаточно убедиться, что решетка надгрупп стабилизатора $G_{\bar{t}}$ точки $\bar{t}\in M$ в l-сплетении G изоморфна указанному соединению. Пусть H — фиксированная надгруппа стабилизатора $G_{\bar{t}}$, $u = [a_\alpha({}^{(\alpha-1)}\bar{x})]_{\alpha\in Z}$ — произвольный элемент из H. Проверим, что вместе с u в подгруппе H содержится при любом $k\in Z$ также таблица $u(k) = [\ldots, \varepsilon, a_k({}^{(k-1)}\bar{x}), \varepsilon, \ldots]$. Действительно, $u(k) = w_1^{-1}v_1^{-1}v_2w_2$, где $v_i = [b_\alpha^{(i)}({}^{(\alpha-1)}\bar{x})]_{\alpha\in Z}$, $w_i = [c_\alpha^{(i)}({}^{(\alpha-1)}\bar{x})]_{\alpha\in Z}$, $i = \overline{1, 2}$, а

$$b_\alpha^{(i)}({}^{(\alpha-1)}(\bar{x}^u)) = \begin{cases} a_\alpha^{-1}({}^{(\alpha-1)}\bar{x}), & {}^{(\alpha-1)}\bar{x}\neq {}^{(\alpha-1)}\bar{t} \\ \varepsilon, & {}^{(\alpha-1)}\bar{x} = {}^{(\alpha-1)}\bar{t}\end{cases};$$

$$c_\alpha^{(i)}({}^{(\alpha-1)}\bar{x}) = \begin{cases} d_\alpha^{(i)}({}^{(\alpha-1)}\bar{x}), & \alpha>k+i-1 \\ \varepsilon, & \alpha\leqslant k+i-1\end{cases};$$

$$d_\alpha^{(i)}({}^{(\alpha-1)}(\bar{x}^{(uv_i)})) = \begin{cases} [uv_i]_\alpha^{-1}({}^{(\alpha-1)}\bar{x}), & {}^{(\alpha-1)}\bar{x} = {}^{(\alpha-1)}(\bar{t}^{(uv_i)^{-1}}) \\ \varepsilon \text{ — в остальных случаях,} & \end{cases}$$

$$i = 1, 2.$$

Следовательно, для произвольного $k \in Z$ имеем $u(k) \in H$. Поэтому каждая надгруппа H стабилизатора $G_{\bar{t}}$ однозначно определяет набор k-координатных подгрупп $\langle H(k)\rangle_{k\in Z}$, где $H(k) = \{u(k)/u \in H\}$. Однако он не может быть произвольным. Так, если при некотором k имеет место сторогое включение $[H]_k \supset [G_{\bar{t}}]_k$, то получаем $[H]_\alpha = [G_{\bar{t}}]_\alpha$ при $\alpha > k$. Если существует наименьшее число $k \in Z$ такое, что $[H]_k \supset [G_{\bar{t}}]_k$, то для подгруппы H выполнены следующие соотношения:

$$[H]_\alpha = \begin{cases} [G_{\bar{t}}]_\alpha & \text{при } \alpha < k; \\ [G]_\alpha & \text{при } \alpha > k. \end{cases}$$

Будем говорить, что такие подгруппы принадлежат к первому типу. Если же наименьшего значения $k \in Z$, для которого $[H]_k \supset [G_{\bar{t}}]_k$, не существует, то для всех $\alpha \in Z$ получаем $[H]_\alpha = [G]_\alpha$ (подгруппы второго типа). Понятно, что подгруппа H будет подгруппой второго типа тогда и только тогда, когда она совпадает с одной из подгрупп $U(\mathfrak{H})$ для подходящего набора $\mathfrak{H} = \langle H_\alpha\rangle_{\alpha\in Z}$. В частности, минимальной по включению будет $U(\mathfrak{H}_0)$. Согласно лемме 5 решетка подгрупп $U(\mathfrak{H}_0)$ в группе G изоморфна $\prod\limits_{\alpha\in Z}^{r} R_\alpha$. Любая надгруппа стабилизатора $G_{\bar{t}}$ либо содержится в $U(\mathfrak{H}_0)$, либо содержит эту подгруппу. Содержащиеся в $U(\mathfrak{H}_0)$ подгруппы принадлежат к первому типу. Но каждая подгруппа этого типа определяется некоторым числом k и промежуточной подгруппой $H_k(\bar{t})$, $\mathrm{St}_{G_k}(t_k) < H_k(\bar{t}) < G_k$, т. е. элементом решетки R_k. Отсюда получаем, что все подгруппы первого типа образуют решетку, которая изоморфна $\coprod\limits_{\alpha\in Z} R_\alpha$.
Две эти решетки соединяются по подгруппе $U(\mathfrak{H}_0)$, т. е. решетка надгрупп $G_{\bar{t}}$ в группе G имеет требуемый вид. Теорема доказана.

Следствие. *Решетка систем импримитивности подгрупп $\bar{G}$, $\tilde{G}$ изоморфна решетке $\coprod\limits_{\alpha\in Z} R_\alpha$.*

Отметим, что для конечноитерированных сплетений аналогичная теорема доказана в [5].

3. Метризация G. На группе $\bar{G}$ естественным образом вводится неархимедовая метрика, превращающая ее в топологическую группу. Пусть η — фиксированное число, $0 < \eta < 1$, и функция $\rho: \bar{G} \times \bar{G} \to R^+ \cup \{0\}$ определена соотношением

$$\rho(u, v) = \eta^k \Leftrightarrow [\,^{(k-1)}u = {}^{(k-1)}v,\ [u]_k \neq [v]_k],\quad u, v \in \bar{G}, \tag{5}$$

причем $\rho(u, u) = 0$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Лемма 6. *Функция ρ является лево- и правоинвариантной ультраметрикой на группе $\bar{G}$. Топология, определяемая ρ на группе $\bar{G}$, совпадает с топологией, которая задается на ней системой подгрупп $\bar{G}^{(k)}$, $k \in Z$. Пространство $\bar{G}$ локально компактно.*

Доказательство. Так как любые две таблицы u, v из G имеют общее начало, соотношение (5) определяет функцию ρ корректно. Непосредственно проверяется, что эта функция является неархимедовой метрикой. Проверим, что она лево- и правоинвариантна. Действительно, для любых таблиц $u, v, w \in \bar{G}$ из соотношений $^{(k-1)}u = {}^{(k-1)}v$, $[u]_k \neq [v]_k$ следует, что $^{(k-1)}(uw) = {}^{(k-1)}(vw)$, $^{(k-1)}(wu) = {}^{(k-1)}(wv)$, и $[uw]_k \neq [vw]_k$, $[wu]_k \neq [wv]_k$. Это и означает, что $\rho(u, v) = \rho(uw, vw) = \rho(wu, wv)$. Далее, $\rho(u, e) = \eta^k$ в том и только в том случае, когда $^{(k-1)}u = {}^{(k-1)}e$, $[u]_k \neq \varepsilon$. Но это означает, что $u \in G^{(k)}$. Следовательно, $G^{(k)}$ — это диск радиуса η^k с центром в точке e и поэтому топология, определяемая системой нормальных делителей $G^{(k)}$, $k \in Z$, совпадает с той, что задается метрикой ρ. При любом $k \in Z$ подгруппа $G^{(k)}$ будет, очевидно, компактной. Так как $\bar{G} = \bigcup\limits_{k\in Z} G^{(k)}$, это пространство является локально компактным.

На множестве $M = \prod_{\alpha \in Z} M_\alpha$, $|M_\alpha| \geqslant 2$, $\alpha \in Z$, введем отношение $\sim$, полагая $\bar{a} \sim \bar{b}$, $\bar{a}, \bar{b} \in M$, в том и только в том случае, когда при некотором $i \in Z$ выполнено равенство ${}^{(i)}\bar{a} = {}^{(i)}\bar{b}$. Ясно, что $\sim$ является эквивалентностью на M, классы эквивалентности относительно которой имеют вид $M(\bar{a})$, $\bar{a} \in M$. Функция $d(\bar{x}, \bar{y})$, определенная на $M(\bar{a})$ соглашением

$$d(\bar{x}, \bar{y}) = \eta^k \Leftrightarrow {}^{(k-1)}\bar{x} = {}^{(k-1)}\bar{y},\ x_k \neq y_k, \tag{6}$$

причем $d(\bar{x}, \bar{x}) = 0$, будет неархимедовой метрикой.

Лемма 7. *Для произвольного $\bar{a}, \bar{b} \in M$ пространства $M(\bar{a})$ и $M(\bar{b})$ изометричны.*

Доказательство. Изометрией будет биекция $\psi: M(\bar{a}) \to M(\bar{b})$, определяемая следующим образом. Каждый элемент из $M(\bar{a}) \setminus \{\bar{a}\}$ однозначно представим в виде ${}^{(k)}\bar{a} * \bar{x}^{(k+1)}$, где $x_{x+1} \neq a_{k+1}$. Учитывая это, полагаем $\psi(\bar{a}) = \bar{b}$ и

$$\psi({}^{(k)}\bar{a} * x^{(k+1)}) = \begin{cases} {}^{(k)}\bar{b} * \bar{x}^{(k+1)} & \text{при } x_{k+1} \neq b_{k+1}; \\ {}^{(k)}\bar{b} * a_{k+1} * \bar{x}^{(k+2)} & \text{при } x_{k+1} = b_{k+1}. \end{cases}$$

При отображении Ψ сохраняются общие начала элементов, т. е. оно сохраняет метрику (6).

Метрическое пространство $M(\bar{a})$ будем называть обобщенным пространством Бэра. Из леммы 7 следует, что это пространство однозначно определяется семейством M_α, $\alpha \in Z$. Поскольку $M(\bar{a})$ является орбитой или объединением орбит группы $\bar{G}$, она действует на множестве $M(\bar{a})$, причем действие точное. Поэтому можно рассматривать группу преобразований $(\bar{G}, M(\bar{a}))$. По метрике d на $M(\bar{a})$ можно определить метрику $\bar{\rho}$ на $\bar{G}$, полагая для любых двух элементов $u, v \in \bar{G}$:

$$\bar{\rho}(u, v) = \max_{\bar{x} \in M(\bar{a})} d(\bar{x}^u, \bar{x}^v). \tag{7}$$

Функция $\bar{\rho}: \bar{G} \times \bar{G} \to R^+ \cup \{0\}$ определена корректно, поскольку для любых $u, v \in \bar{G}$ наборы $\bar{x}^u$ и $\bar{x}^v$ имеют общее начало.

Теорема 3. *Метрика $\bar{\rho}$, задаваемая равенством* (7), *совпадает на группе $\bar{G}$ с метрикой ρ, определяемой соотношением* (5).

Доказательство. Пусть u, v находятся на расстоянии η^k в метрике ρ, т. е. ${}^{(k-1)}u = {}^{(k-1)}v$, $[u]_k \neq [v]_k$. Тогда при любом $\bar{t} \in M(\bar{a})$ для наборов $\bar{t}^u$, $\bar{t}^v$ имеем ${}^{(k-1)}(\bar{t}^u) = {}^{(k-1)}(\bar{t}^v)$. Это означает, что $d(\bar{t}^u, \bar{t}^v) \leqslant \eta^k$. С другой стороны, так как $[u]_k \neq [v]_k$, то существует набор $\bar{t}_0 \in M(\bar{a})$ такой, что $(\bar{t}_0^u)_k \neq (\bar{t}_0^v)_k$. Поэтому $d(\bar{t}_0^u, \bar{t}_0^v) = \eta^k$. Следовательно,

$$\max_{\bar{x} \in M(\bar{a})} d(\bar{x}^u, \bar{x}^v) = \eta^k, \text{ т. е. } \bar{\rho}(u, v) = \eta^k = \rho(u, v).$$

Так как таблицы u, v произвольные, метрики ρ и $\bar{\rho}$ совпадают. Теорема доказана.

4. Группы изометрий обобщенных пространств Бэра. Пусть $\operatorname{Is} M(\bar{a})$ — группа изометрий пространства $M(\bar{a})$. Для любого $i \in Z$ отношение $\sim_i$, определяемое условием $\bar{d} \sim_i \bar{b}$ тогда и только тогда, когда ${}^{(i)}\bar{d} = {}^{(i)}\bar{b}$, $\bar{d}$, $\bar{b} \in M(\bar{a})$, является эквивалентностью на множестве $M(\bar{a})$.

Лемма 8. *Преобразование $u \in S(M(\bar{a}))$ принадлежит* $\operatorname{Is} M(\bar{a})$ *тогда и только тогда, когда оно сохраняет все отношения $\sim_i$, $i \in Z$.*

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Докажем достаточность. Пусть $u \in S(M(\bar{a}))$ сохраняет все отношения $\sim_i$, $i \in Z$. Покажем, что для любых $\bar{x}, \bar{y} \in M(\bar{a})$ имеем $d(\bar{x}^u, \bar{y})^u = d(\bar{x}, \bar{y})$.

Пусть $d(\overline{x}, \overline{y}) = \eta^k$, т. е. ${}^{(k-1)}\overline{x} = {}^{(k-1)}\overline{y}$, $x_k \neq y_k$. Тогда $\overline{x} \sim_{k-1} \overline{y}$ и, следовательно, $\overline{x}^u \sim_{k-1} \overline{y}^u$. Отсюда получаем, что $d(\overline{x}^u, \overline{y}^u) \geqslant d(\overline{x}, \overline{y})$. Если бы неравенство было строгим, то имело бы место соотношение $\overline{x}^u \sim_k \overline{y}^u$. Но из него следовало бы, что $\overline{x} \sim_k \overline{y}$, т. е. $d(\overline{x}, \overline{y}) < \eta^k$, что невозможно. Поэтому на самом деле $d(\overline{x}^u, \overline{y}^u) = d(\overline{x}, \overline{y})$, что и требовалось.

Лемма 9. *Группа подстановок* $(\mathrm{St}_G(M(\overline{a})), M)$ *совпадает с подгруппой* $U(\mathfrak{H}_c)$ *группы* G.

Доказательство. Таблица $u = [a_\alpha({}^{(\alpha-1)}\overline{x})]_{\alpha \in Z}$ содержится в $\mathrm{St}_G(M(\overline{a}))$ тогда и только тогда, когда для любого $\overline{t} \in M(\overline{a})$ наборы $\overline{t}$ и $\overline{t}^u$ имеют общее начало. Это возможно лишь тогда, когда существует $k \in Z$ такое, что при $\alpha < k$ имеем $a_\alpha({}^{(\alpha-1)}\overline{t}) = \varepsilon$. Но из $\overline{t} \in M(\overline{a})$ следует, что существует $l \in Z$ такое, что ${}^{(l)}\overline{t} = {}^{(l)}\overline{a}$. Положим $m = \min(k, l)$. Тогда при $\alpha < m$ имеем $a_\alpha({}^{(\alpha-1)}\overline{x}) = \varepsilon$, т. е. $u \in U(\mathfrak{H}_0)$. Из леммы 9 сразу же получаем, что $\mathrm{St}_G(M(\overline{a}))$ содержит $\widetilde{G}$.

Пусть N — ядро действия $\mathrm{St}_G(M(\overline{a}))$ на $M(\overline{a})$. Таблица $u = [a_\alpha({}^{(\alpha-1)}\overline{x})]_{\alpha \in Z}$ содержится в N тогда и только тогда, когда для любого $\overline{t} \in M(\overline{a})$ имеем $a_\alpha({}^{(\alpha-1)}\overline{t}) = \varepsilon$, $\alpha \in Z$. Понятно, что $\widetilde{G} < \mathrm{St}_G(M(\overline{a}))$.

Лемма 10. *Гурппа преобразований* $(\mathrm{St}_G(M(\overline{a}))/N, M(\overline{a}))$ *подобна* $l_{\overline{a}}$*-сплетению* $\widetilde{G}_{\overline{a}} = \{u \in \widetilde{G} / $*ограничение* u *на* $M \setminus M(\overline{a}) = e\}$.

Доказательство. Для таблицы $u \in \mathrm{St}_G(M(\overline{a}))$ обозначим через u' преобразование множества M, определяемое соотношением

$$x^{u'} = \begin{cases} \overline{x}^u & \text{при } \overline{x} \in M(\overline{a}); \\ \overline{x} & \text{при } \overline{x} \notin M(\overline{a}). \end{cases} \tag{8}$$

Каждая из подстановок вида u' содержится в $\widetilde{G}_{\overline{a}}$. Тем самым определено отображение $\varphi : \mathrm{St}_G(M(\overline{a})) \to \widetilde{G}_{\overline{a}}$, задаваемое равенством $\varphi(u) = u'$. Поскольку для любых $u, v \in \mathrm{St}_G(M(\overline{a}))$ имеем $(uv)' = u'v'$, то отображение φ является гомоморфизмом. Если $u \in \widetilde{G}_{\overline{a}}$, то $u' = u$. Поэтому отображение φ сюръективно. Ясно, что $\operatorname{Ker}\varphi = N$. Отсюда получаем требуемое.

Следствие. $\mathrm{St}_G(M(\overline{a})) = \widetilde{G}_{\overline{a}} \leftthreetimes N$.

Теорема 4. *Группа изометрий обобщенного пространства Бэра над семейством множеств* $\langle M_\alpha \rangle_{\alpha \in Z}$ *подобна* $\widetilde{l}_{\overline{a}}$*-сплетению симметрических групп* $S(M_\alpha)$, $\alpha \in Z$.

Доказательство. Пусть $\langle M_\alpha \rangle_{\alpha \in Z}$ — произвольное семейство. Согласно лемме 7 обобщенное пространство Бера над этим семейством вплоть до изометрии определено однозначно, т. е. достаточно рассмотреть пространство $M(\overline{a})$ для фиксированного элемента $\overline{a} \in M$. Проверим сначала, что $\widetilde{G}_{\overline{a}}$ содержится в $\mathrm{Is}\ M(\overline{a})$. Действительно, группа $\widetilde{G}_{\overline{a}}$ точно действует на множестве $M(\overline{a})$ и сохраняет все отношения эквивалентности $\sim_i$ на нем. По лемме 8 отсюда получаем, что любое преобразование из $\widetilde{G}_{\overline{a}}$ является изометрией пространства $M(\overline{a})$, т. е. $\widetilde{G}_{\overline{a}} \subseteq \mathrm{Is}\ M(\overline{a})$. С другой стороны, пусть u — произвольная изометрия пространства $M(\overline{a})$. Построим по ней преобразование u' множества M, определенное соотношением (8). Преобразование u' сохраняет все отношения $\sim_i$ на множестве M, $i \in Z$. Поэтому оно удовлетворяет условию а) определения l-сплетения. Это означает, что преобразование u' содержится в $\mathop{\S}\limits_{\alpha \in Z} S(M_\alpha)$, т. е. может быть задано таблицей вида (1). Осталось убедиться, что эта таблица является локально ограниченной. Предположим от противного, что это не так, т. е. существует набор $\overline{x} \in M(\overline{a})$ такой, что для любого $\alpha \in Z$

имеем ${}^{(\alpha)}\bar{x} \neq {}^{(\alpha)}(\bar{x}^{u'})$. Так как $u \in \operatorname{Is} M(\bar{a})$, то $\bar{x}^u \in M(\bar{a})$. Но $\bar{x}^u = \bar{x}^{u'}$, т. е. $\bar{x}^{u'} \in M(\bar{a})$. Следовательно, при некоторых $k, l \in Z$ выполнены равенства ${}^{(l)}(\bar{x}^{u'}) = {}^{(l)}\bar{a}$, ${}^{(k)}\bar{x} = {}^{(k)}\bar{a}$. Отсюда получаем, что при $\alpha \leqslant \min\{k, l\}$ выполняются соотношения ${}^{(\alpha)}\bar{x} = {}^{(\alpha)}(\bar{x}^{u'})$, что противоречит предположению. Теорема доказана.

Естественными примерами обобщенных пространств Бэра являются пространства полных дискретно нормированных полей. В силу теоремы 4 для них справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 5. *Пусть P — произвольное полное дискретно нормированное поле, $\mathcal{O}$ — его кольцо нормирования, $\mathfrak{M}$ — максимальный идеал $\mathcal{O}$, $R = \mathcal{O}/\mathfrak{M}$. Группа изометрий метрического пространства P (с естественной метрикой) подобна $\tilde{l}_{\bar{0}}$-сплетению симметрической группы $S(R)$ на себя.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно [6] любой элемент поля P однозначно представим в виде бесконечного набора $a_{-m}a_{-m+1} \ldots a_0a_1 \ldots$ «цифр» — элементов из R. Пусть $M = \prod_{\alpha \in Z} R^{(\alpha)}$, где $R^{(\alpha)} = R$. Дополняя указанные наборы влево нулями, будем получать элементы из M, которые содержатся в подмножестве $M(\bar{0})$, где $\bar{0}$ — нулевой набор из M. Наоборот, каждому элементу из $M(\bar{0})$ соответствует элемент поля P в таком представлении, причем это соответствие является биактивным. Расстояние между двумя элементами из P, представленными бесконечными наборами «цифр», определяется точно так же, как и расстояние между соответствующими элементами множества $M(\bar{0})$. Поэтому указанное соответствие является изометрией. Следовательно, группа изометрий пространства P подобна группе изометрий пространства $M(\bar{0})$, которая согласно теореме 4 имеет требуемый вид. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Группа $\operatorname{Is} Q_p$ подобна $\tilde{l}_{\bar{0}}$-сплетению симметрической группы S_p на себя.*

1. *Kaluznin L. A., Beleckiy P. M., Fejnberg V. Z.* Kranzprodukte // Jeubner-Jexte zur Mathematik.— 1987.— 101.— 167 S.
2. *Сущанский В. И.* Представление финитно аппроксимируемых групп изометриями однородных ультраметрических пространств конечной ширины // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1988.— № 4.— С. 19—22.
3. *Сущанский В. И.* Группы изометрий p-пространств Бэра // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1984.— № 8.— С. 27—30.
4. *Холл М.* Теория групп.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 468 с.
5. *Вайдеман А. А.* Системы импримитивности сплетения групп подстановок // Вісн. Київ. ун-ту. Мат. і мех.— 1980.— № 2.— С. 3—9.
6. *Зарисский О., Самюэль А.* Коммутативная алгебра: В 2-х т.— М. : Изд-во иностр. лит., 1963.— Т. 2.— 438 с.

Получено 12.04.90