УДК 512.544.33

В. С. КОНЮХ, канд. физ.-мат. наук (Белорус. ун-т, Минск)

Об индексе центра неприводимой нильпотентной линейной группы

Получены неулучшаемые оценки индекса центра неприводимой нильпотентной линейной группы над произвольным полем.

Одержані непокращувані оцінки індексу центра незвідної нільпотентної лінійної групи над довільним полем.

Полная классификация максимальных локально нильпотентных подгрупп группы GL $(n, \mathcal{P})$ в случаях, когда поле $\mathcal{P}$ алгебраически замкнуто, конечно или же является полем действительных чисел, получена Д. А. Супруненко [1].

Описание неприводимых максимальных локально нильпотентных линейных групп над произвольным полем дано в работах [2, 3].

В [4] установлено, что индекс центра неприводимой нильпотентной подгруппы Γ группы GL $(n, \mathcal{P})$ ступени нильпотентности l не превышает некоторого числа $\rho(n, l)$, зависящего только от n и l. Из результатов работы [4] следует

$$\rho(n, l) \leqslant n!\, n^{(l-1)(n-1)}.$$

В случае, когда поле $\mathcal{P}$ алгебраически замкнуто, а $n = 4$, эта оценка уточнена в работе [5]. Отметим, что если поле $\mathcal{P}$ алгебраически замкнуто, то индекс $\Gamma : Z(\Gamma)$ делит число $n^{(l+1)(n-1)}$ [6].

Пусть k — поле, n — натуральное число, $\Pi(n)$ — множество всех простых делителей числа n. При $q > 2$ через k_q будем обозначать поле разложения многочлена $x^q - 1$ над полем k. Если же $q=2$, то k_2—поле разложения многочлена $x^4 - 1$ над k. Пусть далее $l_q(k)$ — порядок силовской q-подгруппы мультипликативной группы k^* поля k. Максимальное из чисел $l_q(k)$, $q \in \Pi(n)$, обозначим через $l_n(k)$, а минимальное — $e_n(k)$.

Из результатов работ [2, 3] непосредственно следует, что все неприводимые локально нильпотентные подгруппы группы GL (n, k) тогда и только тогда нильпотентны, когда $l_n(k) < \infty$ (см. также [7]). В этой ситуации естественно возникает вопрос об оценке индекса центра неприводимой нильпотентной подгруппы Γ группы GL (n, k).

В настоящей работе установлено, что

$$\Gamma : Z(\Gamma) \leqslant \beta(n)\,(l_n(k))^n e_n^{-1}(k),$$

где $\beta(n)$ — порядок максимальной транзитивной нильпотентной подгруппы симметрической группы S_n. Если $n = q_1^{\alpha_1} \ldots q_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа n, то $\beta(n) = q_1^{t_1} \ldots q_k^{t_k}$, где $t_i = (q_i^{\alpha_i} - 1)(q_i - 1)^{-1}$ [1]. Эта оценка достижима при $n = q^t$, $k_q = k$, q — простое число (если $k_q \neq k$, $q > 2$, то $\Gamma = Z(\Gamma)$ [8]).

В зависимости от специфики поля k и числа n эту оценку можно улучшать. В частности, если $k = Q$ — поле рациональных чисел, то $\Gamma : Z(\Gamma) \leqslant \beta(n)\, 2^n$. Оценка достижима при $n = 2^t$, $t \geqslant 1$.

Мы придерживаемся терминологии, принятой в работе [1]. Элементы подгруппы $k^* E_n$ группы GL (n, k), как правило, отождествляются с соответствующими элементами поля k. Понятия импримитивности и примитивности применяются только к неприводимым группам.

Если G — группа, q — простое число, то $\mathrm{Syl}_q(G)$ — силовская q-подгруппа G, $Z(G)$ — центр G, $|G|$ — порядок группы G. Для всех рассматриваемых ниже групп GL (n, k), $l_n(k) < \infty$.

Пусть k — поле, причем $k \neq k_2$, $l_2(k) < \infty$, η — элемент порядка $l_2(k)$ из k_2, τ — нетривиальный элемент группы Галуа $G(k_2/k)$. Тогда либо $\tau(\eta) = \eta^{-1}$, либо $\tau(\eta) = -\eta^{-1}$. В первом случае будем говорить, что поле k удовлетворяет условию I, во втором — условию II. Пусть $\Sigma = k(\varepsilon)$, $\varepsilon^{2^\alpha} = 1$, $\alpha > 1$, причем $\Sigma \neq k_2$. Нетрудно видеть, что поле k тогда и только тогда удовлетворяет условию (1), когда группа Галуа $G(\Sigma | k)$ циклична [3].

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1 [3]. *Предположим, что для некоторого простого числа q группа $\mathrm{Syl}_q(k^*) = (\eta)$ конечна. Пусть $\Sigma = k(\varepsilon)$, где $\varepsilon^{q^\alpha} = \eta$, $\alpha \geqslant 1$. Почти всегда $\mathrm{Syl}_q(\Sigma^*/k^*) = \mathrm{Syl}_q(\Sigma^*) k^*/k^*$. Исклю ение составляет лишь случай, когда $q = 2$, а поле k удовлетворяет условию* I. *В этом случае $\mathrm{Syl}_q(\Sigma^*/k^*)$ — группа с двумя образующими: $\varepsilon_1 k^*$ и $(1 + \eta_1) k^*$, где $(\varepsilon_1) = \mathrm{Syl}_2(\Sigma^*)$, $(\eta_1) = \mathrm{Syl}_2(k_2^*)$, $(1 + \eta_1)^2 = \lambda\eta_1$, $\lambda \in k$.*

Пусть G — максимальная неприводимая примитивная подгруппа GL (n, k), $\Delta = \langle Z(G) \rangle_k$.

Лемма 2.1) *Пусть n — нечетное число, или же $n = 2l$, а $k_2 = k$. Тогда $G : Z(G) = n^2 (\Delta : k)^{-2}$.*

2). *Если $n = 2l$, а поле Δ удовлетворяет условию I, то $G : Z(G) \leqslant n^2 l_2(k) [2(\Delta : k)]^{-1} = c$. Если же поле Δ удовлетворяет условию II, то $G : Z(G) = c/2$. Эти оценки достижимы при $n = 2^t$, $t \geqslant 1$.*

Доказательство. Пусть $n_1 = n(\Delta : k)^{-1}$. $n_1 = q_1^{\alpha_1} \dots q_k^{\alpha_k}$ — каноническое разложение числа n_1. Будем рассматривать G как подгруппу $\mathrm{GL}(n_1, \Delta)$. В силу [8] $G = G_1 \times \dots \times G_k$, где G_i — абсолютно неприводимая максимальная нильпотентная подгруппа $\mathrm{GL}(q_i^{\alpha_i}, \Delta)$, $\times$ — знак кронекеровского произведения. Поэтому при доказательстве леммы можно ограничиться случаем, когда $n_1 = n(\Delta ; k)^{-1} = q^\alpha$. Согласно [8] в этом случае $\Delta_q = \Delta$ при $q > 2$.

Пусть K — коммутант G, V — централизатор K в G, $\Sigma = \langle K \rangle_\Delta$, $\Sigma : \Delta = m$. В силу теоремы 2 [2]

$$G : Z(G) = G : \Delta^* = mn^2 d [(\Delta : k) m]^{-2}, \tag{1}$$

где $d = |\mathrm{Syl}_q (\Sigma^*/\Delta^*)|$. Если $q > 2$, или же $q = 2$, а $\Delta_2 = \Delta$, то согласно лемме 1 $d = m$, $G : Z(G) = n^2 (\Delta : k)^2$. Пусть $q = 2$, $\Delta_2 \neq \Delta$. Если $\Sigma = \Delta$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $\Sigma \neq \Delta$. В силу [2] в этом случае $\Sigma = \Delta(\varepsilon)$, $\varepsilon^{2^\beta} = -1$. Можно считать, что $\mathrm{Syl}_2(\Sigma^*) = (\varepsilon)$. Очевидно $k_2(\varepsilon) : k_2 = 2^r \leqslant \Sigma : k_2 = m(\Delta : k) 2^{-1}$. Поэтому $|\mathrm{Syl}_2(\Sigma^*)| = 2^{\beta+1} = 2^r l_2(k) \leqslant m \times (\Delta : k) l_2(k) 2^{-1}$. Из леммы 1 следует, что если поле Δ удовлетворяет условию II, то

$$d = |\mathrm{Syl}_2(\Sigma^*) \Delta^*/\Delta^*| = 2^\beta \leqslant m(\Delta : k) l_2(k) 4^{-1}.$$

Если же поле Δ удовлетворяет условию I, то согласно лемме 1

$$d = 2 |\mathrm{Syl}_2 (\Sigma^*/\Delta^*)| \leqslant m(\Delta : k) l_2(k) 2^{-1}.$$

Отсюда из (1) следует первая часть утверждения 2 леммы 2.

Покажем, что полученные оценки достижимы при $n = 2^t$, $t \geqslant 1$. Пусть $\Sigma = k(\varepsilon_1)$, $\varepsilon_1^{2^\beta} = 1$, $\Sigma : k = 2^t$, $t \geqslant 1$, $\mathrm{Syl}_2(\Sigma^*) = (\varepsilon)$, $Z/k^* = \mathrm{Syl}_2(\Sigma^*/k^*)$. Будем рассматривать Z как подгруппу группы $\mathrm{GL}(2^t, k)$. Если поле k удовлетворяет условию I, то $G(\Sigma/k)$ — группа с двумя образующими τ_1, τ_2, $\tau_1(\varepsilon) = \varepsilon^{-1}$, $\tau_2(i) = i$, $i^2 = -1$. Пусть t_1 и t_2 — такие элементы группы $\mathrm{GL}(2^t, k)$, что

$$t_1 z t_1^{-1} = \tau_1(z),$$

$$t_2 z t_2^{-1} = \tau_2(z), \quad \forall z \in Z, \quad (t_1, t_2) = 1, \quad t_1^2 = 1, \quad t_2^s = 1, \quad s = 2^{t-1}.$$

Положим

$$G = \mathrm{гр}(t_1, t_2(1 + \varepsilon), Z). \tag{2}$$

Нетрудно видеть, что G — примитивная нильпотентная подгруппа $GL(2^t, k)$ [3], $G : Z(G) = G : k^* = 2^{2t-1} l_2(k)$.

Предположим теперь, что поле k удовлетворяет условию II. Тогда $G(\Sigma/k) = (\tau)$ — циклическая группа. Пусть

$$G = \mathrm{гр}(a, Z), \tag{3}$$

где a — такой элемент из $\mathrm{GL}(2^t, k)$, что $aza^{-1} = \tau(z)$, $\forall z \in Z$, $a^{2^t} = 1$. Так как $|Z| k^*| > 2^t$, то G — примитивная группа [3], $G : Z(G) = G : k^* = 2^{2t-2} \times l_2(k)$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть G — неприводимая нильпотентная подгруппа $\mathrm{GL}(n, k)$. Если $n = 2l + 1$, то $G : Z(G) \leqslant n^2$. Если же $n = 2l$, то $G : Z(G) \leqslant n^2 l_2(k) 2^{-1}$.*

Эта оценка достижима в случае, когда $n = 2^t$, а поле k удовлетворяет условию II.

Лемма 3. *Пусть G — примитивная нильпотентная подгруппа $\mathrm{GL}(n, k)$, q — простое число. Тогда*

1) *если $q > 2$, то $|\mathrm{Syl}_q(G)| \leqslant nl_q(k)(k_q : k)^{-1}$;*

2) $|\mathrm{Syl}_2(G)| \leqslant nl_2(k)$.

Доказательство. Если $q^\alpha = |\mathrm{Syl}_q(G)| \leqslant 2$, то утверждение леммы очевидно. Пусть $q^\alpha > 2$. Как известно [9], либо $\mathrm{Syl}_q(G)$ — циклическая группа, либо $\mathrm{Syl}_q(G)$ содержит циклическую подгруппу (b) индекса 2, причем $(b) \triangle G$. Из примитивности G следует, что в первом случае $\langle \mathrm{Syl}_q(G)\rangle_k = L$ — поле. Так как $q^\alpha > 2$, то $L \supseteq k_q$. Следовательно, $q^\alpha = (L : k_q)\, l_q(k) \leqslant nl_q(k)(k_q : k)^{-1}$. Во втором случае $q = 2$, $k_2 \neq k$. Повторив предыдущие рассуждения, получим неравенство $|(b)| \leqslant nl_2(k)\, 2^{-1}$. Поэтому $|\mathrm{Syl}_2(G)| \leqslant 2|(b)| \leqslant nl_2(k)$. Лемма доказана.

Пусть теперь Γ неприводимая максимальная нильпотентная подгруппа $\mathrm{GL}(n, k)$, $\Delta = \langle Z(\Gamma)\rangle_k$, $m = \Delta : k$. В силу теоремы 28.8 [1] при изучении неприводимых локально нильпотентных линейных групп основным является случай, когда $nm^{-1} = q^t$, q — простое число. В этой ситуации справедлива следующая лемма.

Лемма 4. *Почти всегда $\Gamma : Z(\Gamma) \leqslant \beta(q^t)\, \rho(n, m, l_q(k))$, где*

$$\rho(n, m, l_q(k)) = \left(\frac{ml_q(k)}{k_q : k}\right)^{q^t} l_q(k)^{-1},$$

$\beta(q^t) = q^{(q^t-1)(q-1)^{-1}}$ — порядок максимальной транзитивной нильпотентной подгруппы симметрической группы S_q^t. Исключение составляет лишь случай, когда $m = 1$, $q = 2$, $k_2 \neq k$. При этом если поле k удовлетворяет условию I, то

$$\Gamma : Z(\Gamma) \leqslant \beta(2^{t-1})(2l_2(k))^{2^{t-1}} = \mu(t, k).$$

В противном случае $\Gamma : Z(\Gamma) \leqslant \dfrac{1}{2}\mu(t, k)$.

В случаях, когда $n = q^t$, $k_q = k$, или же $n = 2^t$, $k_2 \neq k$, эти оценки достижимы.

Доказательство. В случае, когда Γ — примитивная группа, доказательство леммы 4 с учетом леммы 2 сводится к простой проверке.

Пусть Γ — импримитивная группа, $Z(\Gamma) = \Delta^*$,

$$k^n = L_1 \dotplus \ldots \dotplus L_r \tag{4}$$

— непродолжаемое разложение пространства k^n на системы импримитивности Γ. Очевидно, для $a \in \Delta$, $aL_i = L_i$, $i = 1, \ldots, r$. Поэтому $r = q^x$, $x \geqslant 1$. Разложение (4) индуцирует гомоморфизм $\varphi : \Gamma \to S_r$. Пусть $H = \ker\varphi$, $G = H | L_1$. Тогда $\Gamma | H$ изоморфна транзитивной нильпотентной подгруппе группы S_{q^α}, $\alpha \leqslant t$, и, следовательно, $\Gamma : H \leqslant \beta(q^t)$. Согласно теореме 1 [2] можно считать, что

$$H = G^r D, \quad G^r = G \dot{\times} E_r, \tag{5}$$

где D — группа, порожденная всеми элементами вида $\mathrm{diag}[d_1, \ldots, d_r]$, $d_i \in \mathrm{Syl}_q(G)$. Легко проверить, что

$$H : \Delta^* = (G : \Delta^*)\, |\mathrm{Syl}_q(G)|^{r-1}. \tag{6}$$

Рассмотрим отдельно следующие случаи: 1) $t = 1$; 2) $q > 2$, $t > 1$; 3) $q = 2$, $t > 1$.

В первом случае $r = q$, Γ как подгруппа группы $\mathrm{GL}(q, \Delta)$ мономиальна и, следовательно, $G = \Delta^*$. Если $|\mathrm{Syl}_q(G)| = 2$, то утверждение леммы следует из (6). Пусть $|\mathrm{Syl}_q(G)| > 2$. Тогда $\Delta \supseteq \Delta_q$,

$$l_q(k) \leqslant |\mathrm{Syl}_q(\Delta^*)| \leqslant \frac{ml_q(k)}{k_q : k}.$$

Отсюда в силу (6) следует

$$\Gamma : Z(\Gamma) \leqslant \beta(q^t)(H : \Delta^*) \leqslant \beta(q^t)\,\rho(n, m, l_q(k)).$$

Во втором случае согласно лемме 2 $G : \Delta^* = q^{2(t-x)}$, $q^x = r$. В силу теоремы 28.6а [1] $\Delta_q = \Delta$. Отсюда и из леммы 3 следует

$$l_q(k) \leqslant |\mathrm{Syl}_q(G)| \leqslant \frac{ml_q(k)}{k_q : k} q^{t-x}.$$

Поэтому

$$H : \Delta^* \leqslant \frac{q^{2t}}{y^2}\left(\frac{c}{y}\right)^y [l_q(k)]^{-1} = f(y),$$

где $c = ml_q(k)\,q^t(k_q{:}k)^{-1}$, $y = q^x$. На отрезке $[q, q^t]$ функция $f(y)$ достигает максимума в точке y_0 такой, что $ce^{-1} > y_0 > ce^{-2}$, причем на отрезке $[q, y_0]$ она возрастает. Поскольку $m \geqslant k_q : k$, $q > 2$, то $ce^{-2} > q^{t-1}$. С другой стороны, непосредственно проверяется, что если $q > 2$, $t > 1$, то $f(q^t) \geqslant f(q^{t-1})$. Поэтому $H : \Delta^* \leqslant f(q^t) = \rho(n, m, q^t)$, $\Gamma : Z(\Gamma) \leqslant \beta(q^t)\,\rho(n, m, q^t)$. В третьем случае из лемм 2, 3 следует

$$G : Z(G) \leqslant m2^{2(t-x)-1} l_2(k), \quad |\mathrm{Syl}_q(G)| \leqslant m2^{t-x} l_2(k).$$

Отсюда и из (6) получаем

$$H : \Delta^* \leqslant \frac{2^{t-1}}{c}\left(\frac{c}{y}\right)^{y+1} = g(y), \tag{7}$$

где $c = m2^t l_2(k)$. Функция $g(y)$ достигает максимума в точке y_0 такой, что $ce^{-1} > y_0 > ce^{-2}$, причем на отрезке $[2, y_0]$ она возрастает. Пусть $m > 1$. Тогда $ce^{-2} \geqslant 2^t$. Непосредственно проверяется, что

$$g(2^{t-2}) \leqslant \rho(n, m, l_2(k)),\ g(2^{t-1}) \leqslant 4\rho(n, m, l_2(k)).$$

Отсюда с учетом того, $\beta(2^t) = 2^{2^{t-1}}\beta(2^{t-1})$, следует утверждение леммы в случае, когда $m > 1$, а число систем импримитивности группы Γ не превышает 2^{t-1}.

Пусть $m > 1$, $r = 2^t$. В этом случае

$$G = \Delta^*, \quad |\mathrm{Syl}_2(\Delta^*)| \leqslant \frac{ml_2(k)}{k_2 : k}, \quad m \geqslant k_2 : k.$$

В силу (6) при $r = 2^t$, $m > 1$, $\Gamma : Z(\Gamma) \leqslant \beta(2^t)\,\rho(n, m, l_2(k))$.

Осталось рассмотреть случай, когда $m = 1$, $q = 2$, $t > 1$. В этой ситуации $ce^{-2} \geqslant 2^{t-1}$ и, следовательно, на участке $[2, 2^{t-1}]\,g(y)$ возрастает. Рассмотрим отдельно следующие возможности: а) $k_2 = k$; в) поле k удовлетворяет условию I, с) поле k удовлетворяет условию II.

а). Так как $k_2 = k$, то $g(2^{t-1}) \leqslant \rho(n, m, l_2(k))$. Отсюда и из (7) следует утверждение леммы при $r \leqslant 2^{t-1}$. Пусть $r = 2^t$. Тогда $n = 2^t$, Γ — мономиальная группа. В силу (6) $\Gamma : Z(\Gamma) \leqslant \beta(2^t)\,\rho(n, m, l_2(k))$.

в). Согласно леммам 2, 3 в этом случае

$$G : \Delta^* \leqslant 2^{2(t-x)-1} l_2(k), \quad |\mathrm{Syl}_2(G)| \leqslant 2^{t-x} l_2(k).$$

В силу (6)

$$H : \Delta^* \leqslant \frac{2^{t-1}}{y}\left(\frac{2^t l_2(k)}{y}\right)^y = g_1(y), \quad y = 2^x.$$

При $2 \leqslant y \leqslant 2^{t-1}$ функция $g_1(y)$ возрастает. Поэтому при $r = y \leqslant 2^{t-1}$

$$\Gamma : Z(\Gamma) \leqslant \beta(2^{t-1})\,g_1(2^{t-1}) = \mu(t, k).$$

Непосредственно проверяется, что при $r = 2^t$

$$\Gamma : Z(\Gamma) = \beta(2^t)\,2^{2^t-1} < \mu(t, k).$$

c). Из лемм 2, 3 следует

$$G:\Delta^*\leqslant 2^{2(t-x)-2}l_2(k),\quad |\mathrm{Syl}_q(G)|\leqslant 2^{t-x}l_2(k).$$

Нетрудно видеть, что если поле k удовлетворяет условию II, то $l_2(k)\geqslant 8$. С учетом этого, как и в случае в), можно показать, что $\Gamma:Z(\Gamma)\leqslant\frac{1}{2}\mu(t,k)$.

Покажем, что полученные оценки неулучшаемы. Пусть $k_q=k$, T — мономиальная подгруппа $\mathrm{GL}(q^t,k)$, изоморфная максимальной нильпотентной подгруппе симметрической группы S_{q^t}, D — подгруппа $\mathrm{GL}(q^t,k)$, состоящая из всех матриц вида $\mathrm{diag}[d_1,\dots,d_{q^t}]$, $d_i\in\mathrm{Syl}_q(k^*)$. Положим $\Gamma=TDk^*$. Нетрудно видеть, что

$$Z(\Gamma)=k^*,\qquad \Gamma:Z(\Gamma)=\beta(q^t)\,\rho(q^t,1,l_q(k)).$$

Пусть теперь $k\neq k_2$, $H=G^{2^t}D$ (см. (5)), где G — подгруппа $\mathrm{GL}(2,k)$, определяемая (2), если поле k удовлетворяет условию I и (3), если поле удовлетворяет условию II. Положим $\Gamma=TH$, где T — мономиальная подгруппа $\mathrm{GL}(2^t,k)$, изоморфная транзитивной максимальной нильпотентной подгруппе группы $S^{2^{t-1}}$. Нетрудно видеть, что если поле k удовлетворяет условию I, то $\Gamma:Z(\Gamma)=\mu(t,k)$. В противном случае $\Gamma:Z(\Gamma)=1/2\,\mu(t,k)$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть Γ — неприводимая нильпотентная подгруппа $\mathrm{GL}(n,k)$, $l_n(k)<\infty$. Тогда*

$$\Gamma:Z(\Gamma)\leqslant\beta(n)(l_n(k))^n e_n^{-1}(k).$$

Эта оценка достижима при $n=q^t$, $k_q=k$, q — простое число.

Доказательство. Можно считать, что Γ — максимальна среди нильпотентных подгрупп $\mathrm{GL}(n,k)$, причем $Z(\Gamma)\neq\Gamma$. Пусть $\Delta=\langle Z(\Gamma)\rangle_k$, $\Delta:k=m$,

$$r=nm^{-1}=q_1^{\alpha_1}\dots q_k^{\alpha_k}\tag{8}$$

— каноническое разложение числа r. Будем рассматривать Γ как подгруппу группы $\mathrm{GL}(r,\Delta)$. Тогда

$$\Gamma=\Gamma_1\dot\times\dots\dot\times\Gamma_h,\tag{9}$$

где Γ_i — абсолютно неприводимая нильпотентная подгруппа $\mathrm{GL}(q_i^{\alpha_i},\Delta)$.

Так как

$$\beta(2^{t-1})(2l_2(k))^{2^{t-1}}\leqslant\beta(2^t)(l_2(k))^{2^t}e_2(k)^{-1},$$

то в силу леммы 4

$$\Gamma_i:Z(\Gamma_i)\leqslant\beta(q_i^{\alpha_i})(ml_n(k))^{q_i^{\alpha_i}}e_n^{-1}(k).\tag{10}$$

Очевидно $\beta(q_1^{\alpha_1})\dots\beta(q_k^{\alpha_k})=\beta\left(\frac{n}{m}\right)$, $q_1^{\alpha_1}+\dots+q_k^{\alpha_k}\leqslant\frac{n}{m}$. Отсюда и из (9), (10) следует

$$\Gamma:Z(\Gamma)\leqslant\beta\left(\frac{n}{m}\right)(ml_n(k))^{\frac{n}{m}}e_n^{-1}(k).\tag{11}$$

Функция $f(y)=(y\,l_n(k))^{n/y}$ достигает максимума в точке $y_0=el_n(k)^{-1}$, причем при $y>y_0$ она убывает. Отсюда и из (11) с учетом того, что $\beta\left(\frac{n}{m}\right)\leqslant\beta(n)$, следует неравенство

$$\Gamma:Z(\Gamma)\leqslant\beta(n)\,l_n(k)^n e_n^{-1}(k).$$

Пример, приведенный в конце доказательства леммы 4, показывает, что эта оценка достижима при $n = q^t$, $k_q = \mathrm{k}$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть* Q — *поле рациональных чисел*, Γ — *неприводимая нильпотентная подгруппа* $\mathrm{GL}(n, Q)$. *Тогда* $\Gamma : Z(\Gamma) \leqslant \beta(n) 2^n$. *Эта оценка достижима при* $n = 2^t$, $t \geqslant 1$.

Доказательство. Очевидно поле Q удовлетворяет условию I, $l_2(Q) = 4$, $ml_q(Q)(Q_q : Q)^{-1} \leqslant 2m$. Пусть $\Gamma = \Gamma_1 \dot{\times} \ldots \dot{\times} \Gamma_k$— представление Γ в виде (9).

Тогда $\Gamma_i : Z(\Gamma_i) \leqslant \beta(q_i^{\alpha_i})(2m)^{q_i^{\alpha_i}}$ и, следовательно,

$$\Gamma : Z(\Gamma) \leqslant \beta\left(\frac{n}{m}\right)(2m)^{\frac{n}{m}}.$$

Функция $f(y) = (2y)^{\frac{n}{y}}$, $y \geqslant 1$, достигает максимума в точке $e/2$, причем при $y > e/2$ она убывает. Отсюда в силу того, что $\beta\left(\frac{n}{m}\right) \leqslant \beta(n)$, а $f(1) = f(2)$, следует неравенство $\Gamma : Z(\Gamma) \leqslant \beta(n) 2^n$. Пример, приведенный в конце доказательства леммы 4, показывает, что эта оценка достижима при $n = 2^k$, $k \geqslant 1$. Теорема доказана.

1. *Супруненко Д. А.* Группы матриц.— М. : Наука, 1972.— 351 с.
2. *Конюх В. С.* Локально нильпотентные линейные группы // Докл. АН БССР.— 1984.— 28, № 3.— С. 197—199.
3. *Конюх В. С.* Неприводимые локально нильпотентные группы.— Минск, 1984.— 34 с.— (Препринт / АН БССР. Ин-т математики; № 10 (185)).
4. *Супруненко Д. А.* О матричных нильпотентных группах // Учен. зап. Белорус. ун-та.— 1953.— Вып. 15.— С. 13.
5. *Закирьянов К. Х.* Об индексе центра неприводимой нильпотентной линейной группы над алгебраически замкнутым полем // Мат. заметки.— 1983.— 34, № 2.— С. 171—178.
6. *Dixon J. D.* The structure of linear groups.— New York, 1971.— 183 p.
7. *Dixon J. D.* Nilpotence and local nilpotence of linear groups // Linear Algebra and Its. Appl.— 1976.— 13, N 112.— P. 59—67.
8. *Супруненко Д. А.* Локально нильпотентные линейные группы над произвольным полем // Мат. сб.— 1965.— 68, № 4.— С. 614—622.
9. *Залесский А. Е.* Сверхразрешимые и нильпотентные подгруппы простых алгебр // Докл. АН БССР.— 1962.— 7, № 12.— С. 800—802.

Получено 08.01.91