УДК 517.9:519.46

А. Г. НИКИТИН, д-р физ.-мат. наук (Ин-т математики АН УССР, Киев)

Полный набор операторов симметрии уравнения Дирака

Найден полный набор операторов симметрии произвольного конечного порядка, допускаемых уравнением Дирака. Исследована алгебраическая структура этого набора и выделены подмножества операторов симметрии, образующие базисы алгебр и супералгебр Ли.

Знайдено повний набір операторів симетрії довільного скінченного порядку для рівняння Дірака. Досліджена алгебраїчна структура цього набору і визначені підмножини операторів симетрії, які утворюють базиси алгебр та супералгебр Лі.

1. Введение. Хорошо известно, что для многих уравнений математической физики существуют такие интегралы движения и операторы симметрии, которые в принципе не могут быть найдены в рамках классического группового анализа [1]. Действительно, в классическом инфинитезимальном подходе Ли исследование симметрии дифференциального уравнения сводится к нахождению генераторов его группы инвариантности, которые являются дифференциальными операторами первого порядка по зависимым и независимым переменным [2]. При этом вне сферы исследования остаются операторы симметрии (ОС) высших порядков, принадлежащие классам дифференциальных операторов порядка $n > 1$.

ОС высших порядков несут информацию о скрытой симметрии уравнения, в том числе о симметриях типа Ли — Беклунда [3] и суперсимметрии [4, 5]. Одним из важнейших приложений таких операторов является описание систем координат, в которых уравнение допускает решения в разделяющихся переменных [6, 7].

В работах [8, 9] получен набор ОС произвольного порядка n для скалярного волнового уравнения (уравнения Клейна — Гордона — Фока (КГФ)). Этот результат открывает новые возможности в изучении ОС волновых уравнений для полей, обладающих спином, — уравнений Дирака, Кеммера — Деффина — Петье и др.

Настоящая работа посвящена исследованию ОС высших порядков, допускаемых релятивистскими волновыми уравнениями. Основной результат работы состоит в нахождении в явном виде полного набора ОС уравнения Дирака произвольного конечного порядка. Исследованы также алгебраические свойства этого набора и найдены новые супералгебры скрытой симметрии уравнения Дирака.

2. Оператор симметрии уравнения КГФ. Уравнение КГФ для комплексной скалярной функции $\Psi(x)$, $x=(x_0, x_1, x_2, x_3)$, $\Psi \in L_2(R_4)$, запишем в виде

$$L\Psi = 0, \tag{1}$$

где L — линейный дифференциальный оператор,

$$L = p_\mu p^\mu - \varkappa^2, \quad p_\mu = i\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{2}$$

Пусть F_0 — множество решений уравнения (1) (нуль-пространство оператора (2)): $\Psi \in F_0$: $\Psi \in L_2(R_4)$, $L\Psi = 0$.

Определение. *Линейный дифференциальный оператор порядка n называется ОС уравнения КГФ* (*порядка n*), *если*

$$[Q, L]\Psi = 0, \quad \Psi \in F_0. \tag{3}$$

Хорошо известным примером ОС уравнения КГФ являются генераторы группы Пуанкаре

$$\hat{P}_\mu = p_\mu, \quad \hat{J}_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu. \tag{4}$$

ОС произвольного конечного порядка $j \leqslant n$ можно представить в виде [8, 9]

$$Q^{(j)} = [[\ldots[F^{a_1a_2\ldots a_j}, p_{a_1}]_+, p_{a_2}]_+, \ldots]_+, p_{a_j}]_+, \tag{5}$$

где $[A, B]_+ = AB + BA$, $F^{a_1a_2\ldots a_j}$ — симметричные тензоры ранга j. Условие (3) для операторов (2), (5) сводится к следующим уравнениям для коэффициентов ОС:

$$p^{(a_{j+1}}F^{a_1a_2\ldots a_j)} = 0, \tag{6}$$

где подразумевается симметризация по индексам, заключенным в круглые скобки.

В работах [8, 9] получено общее решение уравнений (6) и найден явный вид соответствующих ОС. Количество линейно независимых ОС порядка n равно

$$N^{(n)} = \frac{1}{4!}(n+1)(n+2)(2n+3)(n^2+3n+4), \tag{7}$$

а общее число ОС порядка $j \leqslant n$ задается формулой

$$\hat{N}^{(n)} = \frac{1}{72}(n+1)(n+2)^2(n+3)(n^2+4n+6). \tag{8}$$

Каждый ОС порядка n можно представить в виде [8]

$$Q^{(n)} = \sum_{c=0}^{n} \lambda^{a_1a_2\ldots a_c[a_{c+1}b_1]\ldots[a_nb_{n-c}]}\hat{P}_{a_1}\hat{P}_{a_2}\ldots\hat{P}_{a_c}\hat{J}_{a_{c+1}b_1}\ldots\hat{J}_{a_nb_{n-c}}. \tag{9}$$

Здесь $\hat{P}_a$, $\hat{J}_{ab}$ — генераторы (4), $\lambda^{a_1a_2\ldots a_c[a_{c+1}b_1]\ldots[a_nb_{n-c}]}$ — произвольные параметры, удовлетворяющие следующим условиям:

1) симметричность и бесследовость по индексам $a_1, a_2, \ldots a_c$;

2) симметричность относительно перестановки пар индексов $[a_{c+i}b_i]$ и $[a_{c+j}\, b_j]$; $i, j = 1, 2, \ldots, n-c$;

3) антисимметричность относительно перестановки индексов a_{c+i} с b_i;

4) свертка по любой тройке индексов с абсолютно антисимметричным тензором $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ равна нулю.

Тензоры $\lambda^{a_1 \dots}$, обладающие свойствами 1—4, будем называть базисными. Эти тензоры приводимы, так как вообще говоря имеют ненулевой след по любой паре индексов $(a_l, a_{l'})$, если $l > c$ и (или) $l' > c$. Общее выражение ОС уравнения КГФ произвольного порядка n, содержащее только неразложимые параметры, может быть получено из (9) с помощью разложения базисных тензоров по неприводимым. Соответствующие довольно громоздкие формулы приведены в [8, 9].

Таким образом, все ОС произвольного порядка n для уравнения КГФ представляют собой полиномы порядка n от генераторов группы Пуанкаре (4), которые можно представить в виде (9).

3. Общий вид ОС порядка n для уравнения Дирака. Уравнение Дирака также можно представить в виде (1), где Ψ — четырехкомпонентный биспинор, L — линейный дифференциальный оператор первого порядка с матричными коэффициентами

$$L = \gamma^\mu p_\mu - m, \tag{10}$$

где γ_μ — числовые матрицы размерности 4×4, удовлетворяющие алгебре Клиффорда

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}. \tag{11}$$

Формальным определением ОС порядка n, допускаемых уравнением Дирака, может служить соотношение (3), где F_0 — нуль-пространство оператора (10): $\Psi \in F_0$: $\Psi_\alpha \in L_2(R_4)$, $L\Psi = 0$ (Ψ_α, $\alpha = 1, 2, 3, 4$ — компоненты биспинора Ψ). При этом предполагается, что коэффициенты ОС являются матрицами размерности 4×4, вообще говоря, зависящими от x.

Хорошо известными ОС уравнения Дирака являются генераторы группы Пуанкаре

$$P_\mu = p_\mu, \quad J_{\mu\nu} = x_\mu p_\nu - x_\nu p_\mu + S_{\mu\nu}, \tag{12}$$

где

$$S_{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]. \tag{13}$$

В работах [4, 6, 10] описан полный набор ОС уравнения Дирака в классах дифференциальных операторов первого и второго порядков с матричными коэффициентами. Задача описания таких операторов связана с решением очень громоздкой системы определяющих уравнений для коэффициентных функций [10].

Ниже приведено простое доказательство того, что все ОС уравнения Дирака произвольного порядка n представляют собой полиномы от генераторов (12), и найден явный вид всех линейно независимых ОС. Основная идея доказательства состоит в использовании того факта, что решения уравнения Дирака покомпонентно удовлетворяют уравнению КГФ, и, следовательно, ОС уравнения Дирака одновременно должны быть ОС уравнения (1), (2).

Подвергнем биспинор Ψ и оператор (10) обратимому преобразованию

$$\Psi \to \Psi' = W_+ \Psi, \quad L \to L' = W_-^{-1} L W_+^{-1}, \tag{14}$$

где

$$W_\pm = \exp\left(-\frac{1}{m} P_\pm \gamma^\mu p_\mu\right) \equiv 1 - \frac{P_\pm}{m} \gamma^\mu p_\mu,$$

$$W_\pm^{-1} = 1 + \frac{1}{m} P_\pm \gamma^\mu p_\mu, \quad P_\pm = \frac{1}{2}(1 \mp i\gamma_4), \quad \gamma_4 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3. \tag{15}$$

В результате с использованием соотношений (11) приходим к эквивалентному уравнению

$$L'\Psi' = 0, \quad L' = -P_+ m + P_-(p^\mu p_\mu - m^2), \tag{16}$$

которое ввиду ортогональности проекторов P_+ и P_- распадается на незацепляющиеся подсистемы

$$(p^\mu p_\mu - m^2)\,\Psi_+ = 0, \tag{17}$$

$$\Psi_- = 0, \quad \Psi_\pm = P_\mp \Psi'. \tag{18}$$

Матрицу $i\gamma_4$, не умаляя общности, можно выбрать диагональной. Тогда Ψ' будет иметь только две отличных от нуля компоненты.

Каждому ОС Q уравнения Дирака можно поставить во взаимно однозначное соответствие ОС Q' уравнения (16):

$$Q' = W_+ Q W_+^{-1}, \quad Q = W_+^{-1} Q' W_+, \tag{19}$$

где W_+ — оператор (15). Оператор Q', определенный на множестве функций Ψ' с двумя отличными от нуля компонентами, удобно разложить по полному набору четырех матриц σ^μ

$$Q' = \sigma^\mu Q'_\mu, \quad \sigma_a = \varepsilon_{abc} S^{bc}, \quad \sigma_0 = \frac{1}{3}\,\sigma_a \sigma^a. \tag{20}$$

Здесь S_{bc} — матрицы (13), $b, c = 1, 2, 3$. Тогда Q'_μ должны быть ОС уравнения КГФ для скалярной функции, полный набор которых описан в предыдущем пункте.

Пусть Q'_μ — ОС уравнения (1), (2) произвольного фиксированного порядка n. Тогда согласно (8), (9) они полиномиально зависят от $\hat{P}_\mu$, $\hat{J}_{\mu\nu}$ (4), или от P_μ, $J_{\mu\nu} - S_{\mu\nu}$, где P_μ, $J_{\mu\nu}$ — генераторы (12). Но матрицы $S_{\mu\nu}$ на множестве решений уравнения (15) выражаются через P_μ и $J_{\mu\nu}$ [1, 4]:

$$2S_{\mu\nu}\Psi' = \frac{1}{m^2}\left(P_\mu W_\nu - P_\nu W_\mu + i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} W^\rho P^\sigma\right)\Psi', \tag{21}$$

где

$$W_\mu = \frac{1}{2}\,\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} P^\sigma \tag{22}$$

— вектор Любанского — Паули. Отсюда заключаем, что ОС являются полиномами от генераторов (12).

Оператор W_+ (15), очевидно, коммутирует с P_μ, $J_{\mu\nu}$ (12), поэтому из (19) следует $Q' = Q$, т. е. все ОС произвольного конечного порядка n для уравнения Дирака являются полиномами от генераторов группы Пуанкаре.

Следует отметить, что принадлежность всех ОС конечного порядка обертывающей алгебре, порождаемой генераторами группы симметрии исследуемого уравнения, в общем случае совсем не обязательна. В частности, для безмассового уравнения Дирака существуют операторы симметрии первого порядка, не принадлежащие такой алгебре [4].

4. Алгебраические свойства ОС первого порядка. При описании ОС произвольного порядка n ключевую роль играет случай $n = 1$, рассматриваемый ниже. По доказанному в предыдущем пункте полный набор соответствующих ОС может быть получен прямым перебором полиномов от P_μ, $J_{\mu\nu}$, причем, как будет показано ниже, достаточно ограничиться полиномами порядка $n \leqslant 3$. В результате получим известные [4, 6] 26 линейно независимые ОС, включающих генераторы P_μ, $J_{\mu\nu}$ (12), единичный оператор I и следующие 15 операторов:

$$W_\mu = \frac{i}{2}\,\gamma_4 (p_\mu - m\gamma_\mu), \quad W_{\mu\nu} = \frac{i}{2}\,\gamma_4 (\gamma_\mu p_\nu - \gamma_\nu p_\mu), \tag{23}$$

$$B = i\gamma_4 (D - m\gamma^\mu x_\mu), \quad A_\mu = \frac{i}{2}\,\gamma_4 \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho}\gamma^\sigma + \frac{1}{2}\,\gamma_\mu, \tag{24}$$

где $D = x^\mu p_\mu + \frac{3}{2}\,i$.

ОС высших порядков выражаются через произведения операторов (12), (23), (24), что делает актуальным исследование алгебраических свойств этого набора. Оказывается, операторы (12), (23), (24) включают подмножества, образующие базисы алгебр и супералгебр Ли.

Прямым вычислением получаем коммутационные соотношения

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [P_\mu, J_{\nu\sigma}] = i(g_{\mu\nu}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\nu),$$
$$[J_{\mu\nu}, J_{\lambda\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}J_{\nu\lambda} + g_{\nu\lambda}J_{\mu\sigma} - g_{\mu\lambda}J_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}J_{\mu\lambda}); \tag{25}$$

$$[P_\mu, W_\nu] = 0, \quad [P_\mu, W_{\sigma\lambda}] = 0, \quad [W_\mu, J_{\nu\sigma}] = i(g_{\mu\nu}W_\sigma - g_{\mu\sigma}W_\nu),$$
$$[J_{\mu\nu}, W_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}W_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}W_{\mu\sigma} - g_{\mu\rho}W_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma}W_{\mu\rho}); \tag{26}$$

$$[W_\mu, W_\nu] = \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}W^{\rho\sigma}, \quad [W_\mu, B] = \frac{i}{2}P_\mu + imA_\mu,$$
$$[W_\mu, A_\nu] = ig_{\mu\nu}B + i[J_{\mu\lambda}, W_\nu^\lambda]_+,$$
$$[W_\mu, W_{\rho\sigma}] = \frac{i}{2}(\varepsilon_{\mu\sigma\lambda k}P_\rho - \varepsilon_{\mu\rho\lambda k}P_\sigma)W^{\lambda k},$$
$$[A_\mu, W_{\lambda\sigma}] = i\left\{-\frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\sigma\lambda\rho}P^\rho - (g_{\mu\lambda}P_\sigma - g_{\mu\sigma}P_\lambda)B + [W_\mu, J_{\lambda\sigma}]_+\right\},$$
$$[A_\mu, B] = i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}J^{\nu\rho}A^\sigma, \tag{27}$$
$$[A_\mu, A_\nu] = -iJ_{\mu\nu} + i\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}(J^{\rho\sigma}B - W^{\rho\sigma}),$$
$$[W_{\mu\nu}, B] = \frac{i}{2}([P_\mu, A_\nu]_+ - [P_\nu, A_\mu]_+),$$
$$[P_\mu, B] = 2iW_\mu, \quad [P_\mu, A_\nu] = 2iW_{\mu\nu},$$
$$[W_{\mu\nu}, W_{\rho\sigma}] = \frac{i}{2}(\varepsilon_{\mu\nu\rho k}P_\sigma + \varepsilon_{\rho\sigma\nu k}P_\mu - \varepsilon_{\mu\nu\sigma k}P_\rho - \varepsilon_{\rho\sigma\mu k}P_\nu)W^k.$$

Соотношения (25) определяют алгебру Ли группы Пуанкаре $AP(1, 3)$, базис которой образуют генераторы (12). Остальные ОС первого порядка, задаваемые формулами (23), (24), не образуют алгебру Ли. Однако можно указать такое подмножество ОС (23), (24), которое образует базис алгебры Ли. Такой базис образуют операторы

$$\Sigma_{\mu\nu}^\pm = \frac{1}{m^2}\left(\pm W_{\mu\nu} + \frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}W^{\rho\sigma}\right), \tag{28}$$

которые удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям на множестве решений уравнения Дирака (выберем в (28) для определенности знак $+$ и обозначим $\Sigma_{\mu\nu}^+ = \Sigma_{\mu\nu}$):

$$[\Sigma_{\mu\nu}, \Sigma_{\rho\sigma}] = [\Sigma_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(g_{\mu\sigma}\Sigma_{\nu\rho} + g_{\nu\rho}\Sigma_{\mu\sigma} - \Sigma_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\mu\rho}\Sigma_{\nu\sigma}),$$
$$[\Sigma_{\mu\nu}, P_\lambda] = 0.$$

Мы видим, что расширение класса ОС позволяет обнаружить более широкую алгебру инвариантности уравнения Дирака, чем хорошо известная алгебра Ли группы Пуанкаре. 16-мерная алгебра, натянутая на базис (12), (28), включает алгебру $AP(1, 3)$ как подалгебру [4].

Операторы (12), (23), (24) включают подмножества, обладающие структурой супералгебры Ли. Для выделения этих подмножеств вычислим антикоммутационные соотношения (которые будут использованы также для конструктивного описания независимых ОС уравнения Дирака)

$$[W_\mu, W_\nu]_+ = \frac{1}{2}(P_\mu P_\nu - m^2 g_{\mu\nu}),$$

$$[W_\mu, W_{\rho\sigma}]_+ = \frac{1}{2} m^2 (g_{\mu\sigma} P_\rho - g_{\mu\rho} P_\sigma),$$

$$[W_{\mu\nu}, W_{\rho\sigma}]_+ = \frac{1}{2}(g_{\mu\rho} P_\nu P_\sigma + g_{\nu\sigma} P_\mu P_\rho - g_{\mu\sigma} P_\nu P_\rho - g_{\nu\rho} P_\mu P_\sigma),$$

$$[W_\mu, B]_+ = -\frac{1}{2}[J_{\mu\nu}, P^\nu]_+,$$

$$[W_\mu, A_\nu]_+ = -\frac{m}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\rho\sigma} - W_{\mu\nu}, \tag{29}$$

$$[W_{\mu\nu}, B]_+ = -mJ_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} W^{\rho\sigma},$$

$$[A_\sigma, W_{\mu\nu}]_+ = \frac{1}{2}(\varepsilon_{\sigma\mu\lambda\rho} P_\nu - \varepsilon_{\sigma\nu\lambda\rho} P_\mu) J^{\lambda\rho} + g_{\sigma\mu} W_\nu - g_{\sigma\nu} W_\mu,$$

$$[A_\mu, A_\nu]_+ = \frac{1}{2}\left\{g_{\mu\nu}\left(J_{\alpha\beta} J^{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\right) - [J_{\mu\lambda}, J^\lambda{}_\nu]_+\right\}$$

$$[A_\mu, B]_+ = 0, \quad B^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} J_{\mu\nu} J^{\mu\nu}.$$

Используя (25), (26), (28) и (29), можно выделить несколько различных наборов ОС уравнения Дирака, образующих базис суперлгебры Ли. Укажем набор, включающий алгебру $AP(1, 3)$ и максимальное количество ОС первого порядка:

$$\{W_\mu, W_{\lambda\sigma}; P_\mu, J_{\mu\nu}, P_\mu P_\nu, I\}. \tag{30}$$

Здесь слева от точки с запятой стоят нечетные (Н), а справа — четные (Ч) элементы супералгебры. Согласно (25), (26), (29) коммутационные и антикоммутационные соотношения операторов (30) укладываются в схему

$$[\text{Ч}, \text{Ч}] \sim \text{Ч}, \quad [\text{Ч}, \text{Н}] \sim \text{Н}, \quad [\text{Н}, \text{Н}]_+ \sim \text{Ч}, \tag{31}$$

характеризующую супералгебру [11]. Размерность супералгебры (30) равна 30.

Итак, помимо известной релятивистской инвариантности уравнение Дирака обладает скрытой симметрией относительно различных алгебр и супералгебр Ли, включающих $AP(1, 3)$ как подалгебру.

Приведем еще ряд используемых в дальнейшем соотношений для операторов (12), (23), (24), выполняющихся на множестве решений уравнения Дирака:

$$m W_{\mu\nu} = P_\mu W_\nu - P_\nu W_\mu,$$

$$B = \frac{1}{4}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\mu\nu} J^{\rho\sigma}, \tag{32}$$

$$A_\mu = \frac{1}{m}\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\rho} W^\sigma - \frac{1}{2m} P_\mu;$$

$$P_\mu P^\mu = m^2, \quad P_\mu W^\mu = 0,$$

$$P_\mu A^\mu = m, \quad P^\mu W_{\mu\lambda} = m W_\lambda,$$

$$[J_{\mu\nu}, W^\nu]_+ = mB, \tag{33}$$

$$[J_{\mu\nu}, A^{\nu}]_+ = 0,$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} W^{\nu\rho} P^{\sigma} = 0;$$

$$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\mu\nu} W^{\rho\sigma} = \frac{3}{2} m,$$

$$[J_{\mu\nu}, W_{\rho\sigma}]_+ - [J_{\rho\sigma}, W_{\mu\nu}]_+ = \frac{1}{4} [\varepsilon_{\nu\rho\sigma\lambda} P_{\mu} + \varepsilon_{\rho\mu\nu\lambda} P_{\sigma} - \varepsilon_{\mu\rho\sigma\lambda} P_{\nu} - \varepsilon_{\sigma\mu\nu\lambda} P_{\rho}, A^{\lambda}]_+. \tag{34}$$

5. П о л н ы й н а б о р ОС п р о и з в о л ь н о г о п о р я д к а n, д о п у с к а е м ы х у р а в н е н и е м Д и р а к а. Согласно доказанному в п. 3, описание всех неэквивалентных ОС уравнения Дирака порядка n сводится к перебору линейно независимых комбинаций вида

$$Q^{ck} = \eta^{a_1 a_2 \ldots a_c [a_{c+1} b_1] \ldots [a_k b_{k-c}]} P_{a_1} P_{a_2} \ldots P_{a_c} J_{a_{c+1} b_1} \ldots J_{a_k b_{k-c}}, \tag{35}$$

где P_a, J_{ab} — генераторы (12), $\eta^{a_1 a_2 \ldots a_c [a_{c+1} b_1] \ldots [a_k b_{k-c}]}$ — произвольные параметры. Индекс k может принимать любые целые значения из интервала $[0, n]$, и, кроме того, a priori нельзя исключить возможность $k > n$. Как будет показано ниже, достаточно положить $0 \leqslant k \leqslant n+2$, $0 \leqslant c \leqslant k$.

Согласно (25), (32) можно считать, что тензоры $\eta^{a_1 a_2 \ldots a_c [a_{c+1} b_1] \ldots [a_k b_{k-c}]}$ обладают свойствами 1—3, сформулированными выше в пояснениях к формуле (9), но, вообще говоря, не обладают свойством 4, т. е. не являются базисными. Это объясняется тем, что для операторов (12) (в отличие от генераторов (4)) вектор Любанского — Паули (22) не равен нулю.

Для эффективного описания линейно независимых операторов (35) удобно разложить $\eta^{a_1 a_2 \ldots a_c [a_{c+1} b_1] \ldots [a_k b_{k-c}]}$ по базисным тензорам. Выпишем первые члены такого разложения:

$$\eta^{a_1 a_2 \ldots a_c [a_{c+1} b_1] \ldots [a_k b_{k-c}]} = \lambda^{a_1 a_2 \ldots a_c [a_{c+1} b_1] \ldots [a_k b_{k-c}]} + \varepsilon^{a_{k-1} b_{k-1-c} a_k b_{k-c}} \times$$
$$\times \lambda^{a_1 a_2 \ldots a_c [a_{c+1} b_1] \ldots [a_{k-2} b_{k-2-c}]} + \varepsilon_{d_1}{}^{b_1 a_{c+1} a_1} \lambda^{d_1 a_2 a_3 \ldots a_c [a_{c+2} b_2] \ldots [a_k b_{k-c}]} +$$
$$+ \varepsilon_{d_1}{}^{b_1 a_{c+1} a_1} \lambda^{a_2 a_3 \ldots a_{c-1} [a_c d_1][a_{c+2} b_2] \ldots [a_k b_{k-c}]} + \varepsilon_{d_1}{}^{b_1 a_{c+1} a_1} \varepsilon_{d_2}{}^{d_1 a_{c+2} b_2} \times$$
$$\times \lambda^{d_2 a_2 \ldots a_c [a_{c+3} b_3] \ldots [a_k b_{k-c}]} + \varepsilon^{a_{c+1} b_1 a_{c+2} b_2} \varepsilon^{a_{c+3} b_3 a_{c+4} b_4} \lambda^{a_1 a_2 \ldots a_c [a_{c+5} b_5] \ldots [a_k b_{k-c}]} +$$
$$+ \varepsilon^{a_{c+1} b_1 a_{c+2} b_2} \varepsilon_{d_1}{}^{b_3 a_{c+3} a_1} \lambda^{d_1 a_2 \ldots a_c [a_{c+4} b_4] \ldots [a_k b_{k-c}]} + \varepsilon^{a_{c+1} b_1 a_{c+2} b_2} \varepsilon_{d_1}{}^{b_3 a_{c+3} a_1} \times$$
$$\times \lambda^{a_2 \ldots a_{c-1} [d_1 a_c][a_{c+4} b_4] \ldots [a_k b_{k-c}]} + \varepsilon_{d_1}{}^{b_1 a_{c+1} a_1} \varepsilon_{d_2}{}^{d_1 a_{c+2} a_2} \varepsilon_{d_3}{}^{d_2 a_{c+3} b_3} \times$$
$$\times \lambda^{d_3 a_2 a_3 \ldots a_c [a_{c+4} b_4] \ldots [a_k b_{k-c}]} + \ldots \tag{36}$$

Здесь многоточием обозначены члены, включающие произведения трех и более абсолютно антисимметричных тензоров $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$; по индексам $a_1, a_2, \ldots, a_c$ и по парам индексов $[a_{c+i}, b_i]$, $i = 1, 2, \ldots, k-c$, подразумевается симметризация. Вычисляя различные свертки $\eta^{a_1 \ldots}$ с $\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$, формулу (36) можно обратить, т. е. выразить $\lambda^{a_1 \ldots}$ через $\eta^{a_1 \ldots}$.

Подставим (36) в (35) и условимся перебирать возможные значения k в порядке их возрастания. Первому слагаемому в правой части (36) соответствует ОС вида

$$Q_1 = \sum_{c=0}^{k} \lambda_1^{a_1 a_2 \ldots a_c [a_{c+1} b_1] \ldots [a_k b_{k-c}]} P_{a_1} P_{a_2} \ldots P_{a_c} J_{a_{c+1} b_1} \ldots J_{a_k b_{k-c}}, \tag{37}$$

где P_a и J_{ab} — генераторы (12). Порядок этого оператора (отличающегося от (9) только заменой $\hat{J}_{ab} \to J_{ab}$) равен k, а количество ОС порядка n задается формулой (7).

Используя соотношения (22), (32)—(34), получаем следующее представление для операторов, соответствующих второму, третьему, четвертому и пятому — седьмому слагаемым в правой части (36):

$$Q_2 = B\sum_{c=0}^{k-2} \lambda_2^{a_1a_2\ldots a_c[a_{c+1}b_1]\ldots[a_{k-2}b_{k-2-c}]} P_{a_1}P_{a_2}\ldots P_{a_c}J_{a_{c+1}b_1}\ldots J_{a_{k-2}b_{k-2-c}};$$

$$Q_3 = \sum_{c=1}^{k-2} \lambda_3^{a_1a_2\ldots a_c[a_{c+1}b_1]\ldots[a_{k-2}b_{k-2-c}]} W_{a_1}P_{a_2}P_{a_3}\ldots P_{a_c}J_{a_{c+1}b_1}\ldots J_{a_{k-2}b_{k-2-c}};$$

$$Q_4 = \sum_{c=0}^{k-4} \lambda_4^{a_1a_2\ldots a_c[a_{c+1}b_1]\ldots[a_{k-3}b_{k-3-c}]} P_{a_1}\ldots P_{a_c}W_{a_{c+1}b_1}J_{a_{c+2}b_2}\ldots J_{a_{k-3}b_{k-3-c}};$$

$$Q_5 = \sum_{c=1}^{k-3} \lambda_5^{a_1a_2\ldots a_c[a_{c+1}b_1]\ldots[a_{k-3}b_{k-3-c}]} A_{a_1}P_{a_2}\ldots P_{a_c}J_{a_{c+1}b_1}\ldots J_{a_{k-3}b_{k-3-c}} +$$

$$+ \sum_{i=0}^{\left\{\frac{k-3}{2}\right\}} \sum_{c=0}^{k-5-2i} \lambda_6^{a_1a_2\ldots a_c[a_{c+1}b_1]\ldots[a_{k-4-2i}b_{k-4-2i-c}]} P_{a_1}\ldots P_{a_{c+1}}A_{b_1}J_{a_{c+2}b_2}J_{a_{c+3}b_3}\ldots$$

$$\ldots J_{a_{k-4-2i}b_{k-4-2i-c}}(J_{\mu\nu}J^{\mu\nu})^i + \sum_{i=0}^{\left\{\frac{k}{2}-2\right\}} \sum_{c=0}^{k-6-2i} \lambda_7^{a_1a_2\ldots a_c[a_{c+1}b_1]\ldots[a_{k-6-2i}b_{k-6-2i-c}]} \times$$

$$\times (P_{a_c}P_{a_{c+1}b}P^b + P_{a_{c+1}}J_{a_cb}P^b)\, A_{b_1}P_{a_1}P_{a_2}\ldots P_{a_{c-1}}J_{a_{c+2}b_2}\ldots J_{a_{k-6-2i}b_{k-6-2i-c}} \times$$

$$\times (J_{\mu\nu}J^{\mu\nu})^i + \sum_{c=1}^{k-4} \lambda_8^{a_1a_2\ldots a_c[a_{c+1}b_1]\ldots[a_{k-4}b_{k-4-c}]} \varepsilon_{a_1\mu\nu\sigma}J^{\mu\nu}A^\sigma P_{a_2}\ldots P_{a_c}J_{a_{c+1}b_1}\ldots$$

$$\ldots J_{a_{k-4}b_{k-4-c}}. \tag{38}$$

Здесь $W_\mu, W_{\mu\nu}, B, A_\mu$ — операторы (23), (24), $P_\mu, J_{\mu\nu}$ — генераторы (12), $\lambda_6^{a_1\cdots}, \lambda_7^{a_1\cdots}$ — произвольные неприводимые тензоры, $\lambda_i^{a_1\cdots}$, $i = 8, 1, 2, \ldots$ $\ldots, 5,$ — произвольные базисные тензоры, удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered}
\lambda_3^{a_1a_2\ldots a_c[a_{c+1}b_1]\ldots[a_fb_{f-c}]} g_{b_1b_2}g_{a_{c+1}a_{c+2}} = 0,\\
\lambda_3^{a_1a_2\ldots a_c[a_{c+1}b_1]\ldots[a_fb_{f-c}]} g_{a_1a_{c+1}}g_{a_2a_{c+2}} = 0,\\
\lambda_3^{a_0[a_1b_1][a_2b_2]\ldots[a_fb_f]} g_{a_1a_2} = 0;
\end{gathered} \tag{39}$$

$$\lambda_4^{a_1a_2\ldots a_c[a_{c+1}b_1]\ldots[a_fb_{f-c}]} g_{a_1b_1}g_{a_2b_2}\ldots g_{a_{f-c}b_{f-c}} = 0, \quad c \geqslant \frac{f}{2}; \tag{40}$$

$$\lambda_4^{a_1a_2\ldots a_c[a_{c+1}b_1]\ldots[a_fb_{f-c}]} g_{a_{c+1}a_{c+2}}g_{b_1b_2}g_{a_{c+3}a_{c+4}}g_{b_3b_4}\ldots g_{a_{f-1}a_f}g_{b_{f-c-1}b_{f-c}} = 0; \tag{41}$$

$$\lambda_\alpha^{a_1a_2\ldots a_c[a_{c+1}b_1]\ldots[a_fb_{f-c}]} g_{a_1b_1}g_{a_2b_2}\ldots g_{a_cb_c} = 0, \quad c \leqslant \frac{f}{2}, \quad \alpha = 5, 8. \tag{42}$$

Слагаемые, обозначенные в (36) многоточием, можно опустить. Соответствующие ОС включают произведения операторов (23), (24), что позволяет с использованием соотношений (26), (29) свести их к виду (37) или (38) с меньшим значением k.

Таким образом, любой ОС уравнения Дирака порядка n можно представить либо в форме (37), либо как произведение ОС (37) на один из операторов (23), (24). При этом необходимо положить в (37), (38) $k = n$ для Q_1, $k = n + 1$ для Q_2, Q_3 и $k = n + 2$ для Q_4, Q_5.

Суммируя независимые компоненты тензоров $\lambda_i^{a_1\cdots}$ в (37), (38), нетрудно вычислить количество линейно независимых ОС порядка n. Для операторов (37) это количество ($N_1^{(n)}$) задается формулой (7), а для операторов (38) получаем

$$N_2^{(n)} = \frac{1}{4!} n (n + 1) (2n + 1) (n^2 + n + 2), \tag{43}$$

$$N_3^{(n)} = \frac{1}{6} n (n + 1) (5n^2 - 3n + 13) - n, \tag{44}$$

$$N_4^{(n)} = N_1^{(n)} - \frac{1}{6} n (2n^2 + 9n + 13) - \frac{1}{2} [1 + (-1)^n], \tag{45}$$

$$N_5^{(n)} = \frac{1}{6} n (n + 1) (n + 3) (n^2 + n + 1). \tag{46}$$

Общее число операторов симметрии порядка n получаем, складывая (7), (43)—(46):

$$N^{(n)} = \sum_{i=1}^{5} N_i^{(n)} = 5N_n^{(1)} - \frac{1}{6} (2n + 1) (13n^2 + 19n + 18) - \frac{1}{2} [1 + (-1)^n]. \tag{47}$$

В частности, $N^{(0)} = 1$, $N^{(1)} = 25$, $N^{(2)} = 154$, $N^{(3)} = 601$.

Суммируем полученные результаты в виде следующего утверждения.

Теорема. *Уравнение Дирака допускает $N^{(n)}$ линейно независимых ОС порядка n, где $N^{(n)}$ задается формулой* (47), *а явный вид соответствующих операторов — формулами* (37), (38).

6. Заключение. Мы определили количество и явный вид всех линейно независимых ОС уравнения Дирака произвольного конечного порядка. Эти ОС задаются с точностью до произвольных параметров, представляющих собой базисные тензоры, удовлетворяющие условиям (39)—(42). Разлагая эти тензоры на неприводимые, несложно получить представление ОС, зависящих от неразложимых наборов параметров.

Перечислим линейно независимые ОС второго и третьего порядков, получаемые из общих формул (37)—(42) (ОС нулевого порядка сводятся к единичной матрице, а ОС первого порядка перечислены в (12), (23), (24)):

$$\begin{gathered} n = 2\colon\ \lambda_1^{ab} P_a P_b,\ \ \tilde{\lambda}_1^{ab} J_{ac} J_b^c,\ \ \lambda_1^{ab} P_a J_{bc},\ \ \lambda_1^a J_{ab} P^b, \\ \lambda_1^{[ab][cd]} J_{ab} J_{cd},\quad \lambda_1 J_{ab} J^{ab},\quad \lambda_2^a P_a B,\quad \lambda_2^{[ab]} B J_{ab}, \\ \lambda_3^{ab} P_a W_o,\quad \lambda_3^{a[bc]} W_a J_{bc},\quad \lambda_4^{a[bc]} P_a W_{bc},\quad \lambda_4^{ab} W_{ac} J^c{}_b, \\ \lambda_4^{[ab][cd]} W_{ab} J_{cd},\quad \lambda_5^{ab} P_a A_b,\quad \lambda_5^{a[bc]} A_a J_{bc}, \\ \lambda_6^{[ab]} P_a A_b,\quad \lambda_8^a \varepsilon_{abcd} J^{bc} A^d; \end{gathered} \tag{48}$$

$$\begin{gathered} n = 3\colon\ \lambda_1^{abc} P_a P_b P_c,\quad \lambda_1^{ab[cd]} P_a P_b J_{cd},\quad \lambda_1^a P_a J_{bc} J^{bo}, \\ \lambda_1^{a[bc][de]} P_a J_{oc} J_{de},\quad \lambda_1^{[ab][cd][ef]} J_{ab} J_{cd} J_{ef}, \\ \lambda_1^{ab} P_a J_{bc} P^c,\quad \lambda_1^{a[bc]} J_{ad} P^d J_{bc},\quad \lambda_1^{[ab]} J_{ab} J_{cd} J^{cd}, \\ \tilde{\lambda}_1^{abc} P_a J_{bk} J_c^k,\quad \lambda_2^{ab} P_a P_b B,\quad \lambda_1^{ab[cd]} J_{ak} J_b^k J_{cd}, \\ \lambda_2^{a[bc]} P_a J_{bc} B;\qquad \lambda_2^{[ab][cd]} J_{ab} J_{cd} B,\ \tilde{\lambda}_2^a J_{ab} P^b B, \\ \lambda_2 J_{ab} J^{ab} B,\quad \tilde{\lambda}_2^{ab} J_{ac} J_b^c B,\quad \lambda_3^{ab[cd]} W_a P_o J_{cd}, \\ \lambda_3^{abc} W_a P_b P_c,\quad \lambda_3^{a[bc][de]} W_a J_{bc} J_{de},\quad \lambda_3^{ab} W_a J_{bc} P^c, \end{gathered}$$

$$\widetilde{\lambda}_3^{abc} W_a J_{bk} J_c^k, \quad \lambda_4^{[ab][cd][ef]} W_{ab} J_{cd} J_{ef},$$

$$\lambda_4^{ab[cd]} P_a P_b W_{cd}, \quad \lambda_4^{a[bc][de]} P_a J_{bc} W_{de},$$

$$\lambda_4^{a[bc]} J_{ad} P^d W_{bc}, \quad \lambda_4^{[ab]} W_{ab} J_{cd} J^{ca},$$

$$\lambda_4^{abc} P_a J_{bk} W_c^k, \quad \widetilde{\lambda}_4^{ab[cd]} J_{ak} J_b^k W_{cd}, \quad \lambda_5^{abc} P_a P_b A_c,$$

$$\lambda_5^{ab[cd]} P_a A_b J_{cd}, \quad \lambda_5^{a[bc][de]} A_a J_{bc} J_{de}, \quad \lambda_5^{ab} A_a J_{bc} P^c,$$

$$\lambda_5^{abc} A_a J_{bk} J_c^k, \quad \lambda_5^a A_a J_{bc} J^{bc}, \quad \lambda_6^{a[bc]} P_a P_b A_c,$$

$$\lambda_6^{[ab][cd]} P_a A_b J_{cd}, \quad \lambda_7^{[ab]} A_a J_{bc} P^c,$$

$$\lambda_8^{ab} \varepsilon_{aken} J^{ke} A^n P_b, \quad \lambda_8^{a[bc]} \varepsilon_{aken} J^{ke} A^n J_{bc}. \tag{49}$$

Здесь P_a, J_{ab}, W_a, W_{ab}, A_b, B — операторы (12), (23), (24), $\lambda_i^{a\cdots}$ — произвольные неприводимые тензоры. Как нетрудно подсчитать, количества операторов (48), (49) совпадают с задаваемыми формулой (47).

Следует отметить, что набор ОС (48) отличается от найденного в [10], где часть ОС являются линейно зависимыми на множестве решений уравнения (1), (10).

Помимо приложений, указанных во введении, найденные ОС могут быть использованы для построения супералгебр скрытой симметрии уравнения Дирака. Пример такой супералгебры в классе дифференциальных операторов второго порядка рассматривался в п. 4. Укажем цепочку супералгебр в классе ОС порядка n.

Пусть $\{\widetilde{Q}^k\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, — подмножества ОС уравнения Дирака порядка k, удовлетворяющих дополнительному условию $[\widetilde{Q}^k, P_\mu] = 0$. Согласно доказанной теореме

$$\{\widetilde{Q}^k\} = \{q^{a_1 a_2 \ldots a_k}, q_2^{a_1 a_2 \ldots a_k}, q_3^{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}[a_k a_{k+1}]}\},$$

где

$$q_1^{a_1 a_2 \ldots a_{k'}} = p^{a_1} p^{a_2} \ldots p^{a_{k'}}, q_2^{a_1 a_2 \ldots a_k} = W^{a_1} P^{a_2} P^{a_3} \ldots P^{a_k},$$

$$q_3^{a_1 a_2 \ldots a_{k-1}[a_k a_{k+1}]} = p^{a_1} p^{a_2} \ldots p^{a_{k-1}} W^{a_k a_{k+1}}$$

— ОС, являющиеся неприводимыми тензорами. Объявляя $q_2^{a_1}$ и $q_3^{a_1\cdots}$ нечетными, а $q_1^{a_1,\cdots}$ и P_μ, $J_{\mu\nu}$ — четными и используя соотношения (25), (29), убеждаемся, что коммутационные и антикоммутационные соотношения для этих операторов соответствуют схеме (31), характеризующей супералгебру, при любых $k \leqslant n$ и $k' \leqslant 2n$.

1. *Фущич В. И., Никитин А. Г.* Симметрия уравнений квантовой механики.— М. : Наука, 1990.— 400 с.
2. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 400 с.
3. *Anderson R. L., Ibragimov N. H.* Lie — Bäclund transformations in applications.— Philadelphia: SIAM, 1979.— 200 p.
4. *Fushchich W. I., Nikitin A. G.* On the new invariance algebras anb superalgebras of relativistic wave equations // J. Phys. A : Math. anb Gen.— 1987.— **20**, N 3.— P. 537—549.
5. *Fushchich W. I., Nikitin A. G.* On superalgebras of symmetry operators of relativistic wave equations // Selec. Topics in OFT and Math. Phys.— Singapore : Wolb Scientific.— 1990.— P. 385—391.
6. *Шаповалов В. Н., Экле Г. Г.* Алгебраические свойства уравнения Дирака.— Элиста: Калмыц. ун-т, 1972.— 69 с.
7. *Миллер У.* Симметрия и разделение переменных.— М. : Мир, 1981.— 342 с.
8. *Никитин А. Г., Прилипко А. И.* Обобщенные тензоры Киллинга и симметрия уравнения Клейна — Гордона — Фока.— Киев, 1990.— 60 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 90.23).

9. *Никитин А. Г.* Обобщенные тензоры Киллинга произвольного ранга и порядка // Укр. мат. журн.— 1991.— 43, № 6.— С. 786—795.
10. *Kalnins E. G., Miller W. (jr), Williams G. C.* Matrix operator symmetries of the Dirac equation and separation of variables // J. Math. Phys.—1986.— 27, N 7.— P. 1893—1990.
11. *Уэст П.* Введение в суперсимметрию и супергравитацию.— М. : Мир, 1989.— 328 с.

Получено 27.03.91