УДК 517.54

О. М. КАТКОВА, канд. физ.-мат. наук (Харьк. ун-т)

Об одной проблеме Фекете

Исследуется возможность умножения целой функции f с неотрицательными коэффициентами на другую целую функцию g, «растущую не быстрее», чем f, таким образом, что произведение fg является производящей функцией частотной последовательности Полиа конечного порядка (кратно положительной последовательности по Фекете).

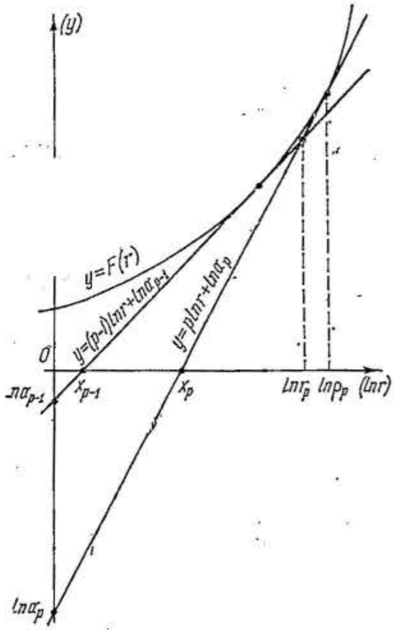
Досліджується можливість умноження цілої функції f з невід'ємними коефіцієнтами на іншу цілу функцію g, яка «росте не швидше», ніж f, таким чином, що добуток fg є твірною функцією частотної послідовності Поліа скінченного порядку (кратно позитивної послідовності за Фекете).

Пусть $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных чисел; введем теплицеву матрицу $A = \| a_{j-i} \|_{i,j=0}^{\infty}$ (полагаем $a_k = 0$ при $k < 0$). Следуя Карлину [1], будем называть последовательность $\{a_k\}$ частотной последовательностью Полиа порядка $m \in \mathbb{N}$ (и записывать $\{a_k\} \in PF_m$), если все миноры порядка $\leqslant m$ матрицы A неотрицательны. Сопоставляя каждой такой последовательности производящую функцию

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

условимся то обстоятельство, что $\{a_k\} \in PF_m$, записывать в виде $f \in \widetilde{PF}_m$.

В связи с задачей Легерра о точном определении числа корней вещественного полинома в интервале с помощью правила Декарта Фекете [2] изучал вопрос о возможности домножения произвольной целой функции f без положительных нулей на другую целую функцию g так, чтобы произведение fg принадлежало $\widetilde{P}F_m$ (см. библиографию из [1]). Исследованию этой задачи посвящены работы [3—6]. В [3, 4] доказано, что для произвольного $m \in \mathrm{N}$ и любой целой функции f без положительных нулей существует целая функция $g \in \widetilde{P}F_m$ без нулей такая, что $fg \in \widetilde{P}F_m$. В доказательстве существования использован очень быстрый по сравнению с f рост «мультипликатора» g. Однако вопрос о существовании «мультипликатора» g, растущего «ненамного быстрее» f, оставался открытым. В [5] построен «мультипликатор» g, растущий медленнее, чем f, при дополнительных ограничениях: f конечного порядка, вполне регулярного роста, не имеет нулей в некотором угле, содержащем положительный луч. В данной статье показано, что существуют целые функции $f \in \widetilde{P}F_1$, которые нельзя домножить ни на какую целую функцию $g \in \widetilde{P}F_1$, растущую в некотором смысле медленнее, чем f, так, чтобы $fg \in \widetilde{P}F_2$.



Рост целых функций будем измерять, сравнивая логарифм максимума модуля с эталонными функциями F, $F(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$, обладающими следующими свойствами: а) F непрерывно дифференцируема на $[0, \infty)$, монотонно возрастает и логарифмически выпукла; б) $(F(x)/(\ln x)^2) \to \infty$, $x \to \infty$.

Обозначим через $\mathrm{K}(F)$ класс целых функций g, обладающих свойствами

$$\text{а) } g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k, \quad b_k \geqslant 0, \quad b_0 = 1; \tag{1}$$

б) существует $\varepsilon > 0$ такое, что

$$\ln g(x) < (1-\varepsilon) F(x), \quad x \geqslant x_\varepsilon. \tag{2}$$

Теорема 1. *Существует целая функция*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k} z^{n_k}, \tag{3}$$

$$a_{n_k} \geqslant 0; \qquad n_k \uparrow \infty, \quad k \to \infty,$$

удовлетворяющая условиям

$$a) \ \ln f(x) \leqslant (1+\varepsilon) F(x); \tag{4}$$

для всех $\varepsilon > 0$ *и* $x \geqslant x_\varepsilon$;

б) найдется последовательность точек $\rho_{n_k} \geqslant 0$, $\rho_{n_k} \uparrow \infty$, $k \to \infty$, *в которых*

$$\ln f(\rho_{n_k}) \geqslant F(\rho_{n_k}), \tag{5}$$

такая, что $fg \notin \widetilde{PF}_2$, *какова бы ни была* $g \in K(F)$. В [6] доказано, что для любого полинома f без положительных нулей можно подобрать такое $s_0 > 0$, что при всех $s \geqslant s_0$ выполняется $f(z)\, e^{sz} \in \widetilde{PF}_m$ и $f(z)(1+z)^s \in$

 ISSN 0041-6053. Укр. мат. журн., 1991, Т. 43, № 9

$\in \widetilde{P}F_m$. Возникает вопрос; справедлив ли аналогичный факт для целых трансцендентных функций? Или в более общей формулировке: существуют какие-нибудь «m-универсальные мультипликаторы», т. е. такие целые функции g, что при заданном $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$, для любой целой функции f без положительных нулей имеем $fg \in \widetilde{P}F_m$? Из теоремы 1 вытекает такое утверждение.

Теорема 2. *Не существует «m-универсальных мультипликаторов» (даже при $m = 2$).*

Доказательство теоремы 1. Построим сначала функцию f, о которой идет речь в формулировке теоремы 1.

В прямоугольной системе координат $(\ln r, y)$ строим график функции $y = F(r)$ (см. рис.). Будем проводить касательные к графику с угловыми коэффициентами $p \in \mathbb{N}$. Точки пересечения этих прямых с осью y будем обозначать $\ln a_p$. Таким образом, уравнения касательных будут иметь вид

$$L_p : y = p \ln r + \ln a_p. \tag{6}$$

Абсциссу точки касания обозначим через $\ln \rho_p$, точки пересечения касательной с осью $\ln r$ — через x_p, абсциссу точки пересечения прямых L_p и L_{p-1} — через $\ln r_p$. Заметим, что

$$a_p r_p^p = a_{p-1} r_p^{p-1} . \tag{7}$$

В силу выпуклости графика кривой $y = F(r)$ выполняется

$$r_1 < r_2 < \ldots < r_p < r_{p+1} < \ldots ;$$

$$\rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_p < \rho_{p+1} < \ldots ;$$

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_p < x_{p+1} < \ldots ;$$

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_p > a_{p+1} > \ldots .$$

Так как $(F(r)/\ln r) \uparrow \infty$, $r \to \infty$, то справедливо

$$r_p \uparrow \infty, \quad \rho_p \uparrow \infty, \quad x_p \uparrow \infty, \quad a_p \downarrow 0, \quad p \to \infty. \tag{8}$$

Выберем теперь последовательность индексов $\{n_k\} \in \mathbb{N}$ так, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\theta_k = \left(\frac{r_{n_{k+1}}}{r_{n_k}}\right)^{1/3} \uparrow \infty, \quad k \to \infty, \tag{9}$$

$$k < \rho_{n_k}, \tag{10}$$

$$n_{k-1} \leqslant \frac{F(\rho_{n_k})}{(\ln \rho_{n_k})^2}, \tag{11}$$

$$a_{n_0} \leqslant 1. \tag{12}$$

(Соотношение (11) может выполняться в силу свойства б) функции F.) Положим

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k} z^{n_k} . \tag{13}$$

Так как $p = -\ln a_p / x_p$, а в силу (9) $x_p \uparrow \infty$, то $\sqrt[p]{a_p} = e^{-x_p} \to 0$, $p \to \infty$, и следовательно, f — целая функция.

Покажем, что функция f удовлетворяет условиям (4) и (5). Рассмотрим $\mu(r, f) = \max\limits_{0 \leqslant k < \infty} a_{n_k} r^{n_k}$ — максимальный член функции f. Заметим, что $\ln \mu(r, f)$ — верхняя огибающая подмножества прямых (7), отвечающих $p = n_k$. Следовательно,

$$\ln \mu(r, f) \leqslant F(r), \quad r \geqslant 0, \tag{14}$$

$$\ln \mu(\rho_{n_k}, f) = F(\rho_{n_k}). \tag{15}$$

Лемма. *Для функции f, задаваемой равенством* (13), *справедливо следующее соотношение*:

$$\ln f(r) = \ln \mu(r, f) + O(1). \qquad (16)$$

Доказательство. Пусть $r > 0$ достаточно велико. В силу (8) и (9) найдется k такое, что

$$r \in (r_{n_{k-1}}\theta_{k-1},\ r_{n_{k+1}}/\theta_k). \qquad (17)$$

Представим f в виде суммы следующих слагаемых:

$$f(r) = a_{n_{k-1}} r^{n_{k-1}}\left(1 + \sum_{j=0}^{k-2} \frac{a_{n_j}}{a_{n_{k-1}}} r^{n_j - n_{k-1}}\right) +$$

$$+ a_{n_k} r^{n_k}\left(1 + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{a_{n_j}}{a_{n_k}} r^{n_j - n_k}\right) \leqslant \mu(r, f) \times$$

$$\times \left(2 + \sum_{j=0}^{k-2} (a_{n_j}/a_{n_{k-1}})\, r^{n_j - n_{k-1}} + \sum_{j=k+1}^{\infty} (a_{n_j}/a_{n_k})\, r^{n_j - n_k}\right) =$$

$$= \mu(r, f)(2 + S_1 + S_2).$$

Покажем, что $S_1 = o(1)$ и $S_2 = o(1)$, откуда будет следовать (16). Для этого заметим, что в силу (7) имеем

$$a_{n_p} = a_{n_{p-1}} r_{n_p}^{-1} = a_{n_{p-2}} (r_{n_p} r_{n_{p-1}})^{-1} = \ldots =$$

$$= a_{n_0} (r_{n_p} r_{n_{p-1}} \ldots r_{n_0+1})^{-1},\ p \in \mathbb{N};$$

следовательно, учитывая (17), (9), (8), получаем

$$\frac{a_{n_j}}{a_{n_{k-1}}} r^{n_j - n_{k-1}} \leqslant \left(\frac{r_{n_{k-1}}}{r}\right)^{n_{k-1} - n_j} \leqslant \left(\frac{1}{\theta_{k-1}}\right)^{n_{k-1} - n_j},\ j \leqslant k - 2,$$

аналогично,

$$\frac{a_{n_j}}{a_{n_k}} r^{n_j - n_k} \leqslant \left(\frac{1}{\theta_k}\right)^{n_j - n_k},\quad j \geqslant k + 1.$$

Так как при $j \leqslant k - 2$ имеем $n_{k-1} - n_j \geqslant k - 1 - j$, то, учитывая (9), получаем

$$S_1 = \sum_{j=0}^{k-2} (a_{n_j}/a_{n_{k-1}})\, r^{n_j - n_{k-1}} \leqslant \sum_{j=0}^{k-2} \left(\frac{1}{\theta_{k-1}}\right)^{k-1-j} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\theta_{k-1}}\right)^{p} = \frac{1}{\theta_{k-1} - 1} = o(1).$$

Аналогично получаем, что $S_2 = o(1)$. Лемма доказана.

Продолжим доказательство теоремы 1. В силу (16) и (14) имеем

$$\ln f(r) = \ln \mu(r, f) + O(1) \leqslant F(r) + O(1),$$

откуда следует выполнение условия (4). С другой стороны, из неравенств Коши для коэффициентов голоморфной функции и (15) вытекает

$$\ln f(\rho_{n_k}) \geqslant \ln \mu(\rho_{n_k}, f) = F(\rho_{n_k}),$$

что доказывает (5).

Для завершения доказательства теоремы 1 остается установить, что не существует целой функции $g \in K(F)$ такой, что $h = fg \in \widetilde{PF}_2$.

Пусть существует $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \in K(F)$ такая, что

$$h(z) = f(z)\,g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k \in \widetilde{PF}_2.$$

По определению класса $\widetilde{PF}_2$ имеем $c_k^2 - c_{k-1}c_{k+1} \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$, т. е. функция $(-\ln c_k)$ выпукла от k. Поэтому

$$\ln c_{n_k-1} \geqslant \left(1 - \frac{1}{n_k - n_{k-1}}\right) \ln c_{n_k} + \frac{1}{n_k - n_{k-1}} \ln c_{n_{k-1}}. \qquad (18)$$

Оценим c_{n_k} и $c_{n_{k-1}}$ снизу. Имеем

$$c_{n_k} = \sum_{j=0}^{k} a_{n_j} b_{n_k - n_j} \geqslant a_{n_k} b_0 = a_{n_k};$$

аналогично, учитывая (8), получаем $c_{n_{k-1}} \geqslant a_{n_{k-1}} \geqslant a_{n_k}$. Оценим теперь сверху c_{n_k-1}. В силу (12) и (8) будем иметь

$$c_{n_k-1} = \sum_{j=0}^{k-1} a_{n_j} b_{n_k-1-n_j} \leqslant k b_{n_k-1-n_p},$$

где $0 \leqslant p \leqslant k-1$ выбрано таким образом, что $b_{n_k-1-n_p} = \max\limits_{0 \leqslant j \leqslant k-1} b_{n_k-1-n_j}$. Подставляя полученные оценки в (18), имеем

$$\ln b_{n_k-1-n_p} \geqslant \ln a_{n_k} - \ln k.$$

Отсюда в силу выбора последовательности $\{\rho_{n_k}\}$ и (10), (15) получаем

$$\ln g(\rho_{n_k}) \geqslant \ln \mu(\rho_{n_k}, g) \geqslant \ln b_{n_k-1-n_p} + (n_k - 1 - n_p) \ln \rho_{n_k} \geqslant$$
$$\geqslant \ln a_{n_k} + n_k \ln \rho_{n_k} - n_p \ln \rho_{n_k} - 2 \ln \rho_{n_k} \geqslant \mu(\rho_{n_k}, f) -$$
$$- n_{k-1} \ln \rho_{n_k} - 2 \ln \rho_{n_k} = F(\rho_{n_k}) + O(n_{k-1} \ln \rho_{n_k}).$$

В силу (11) и (8)

$$\frac{n_{k-1} \ln \rho_{n_k}}{F(\rho_{n_k})} \leqslant \frac{1}{\ln \rho_{n_k}} \to 0, \quad k \to \infty,$$

что противоречит условию (2). Таким образом, теоремы 1 и 2 доказаны.

1. *Karlin S.* Total positivity.— Stanford: Univ. Press, 1968.— 576 p.
2. *Fekete M., Polya G.* Uber ein Problem von Laguerre // Rend. Girc. Mat. Palermo.— 1912.— 34.— P. 89—120.
3. *Каткова О. М., Островский И. В.* Нулевые множества целых производящих функций частотных последовательностей Полиа конечного порядка // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1988.— № 1.— С. 13—15.
4. *Каткова О. М., Островский И. В.* О нулевых множествах целых производящих функций частотных последовательностей Полиа конечного порядка // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1989.— № 4.— С. 771—781.
5. *Каткова О. М.* Об индикаторах целых функций конечного порядка с кратно-положительными последовательностями коэффициентов // Харьков, 1989.— Деп. в ВИНИТИ.— № 6.— б/о 61.— 27 с.
6. *Каткова О. М.* Об одном способе построения частотных последовательностей Полиа // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1989.— Вып. 51.— С. 129—137.

Получено 23.10.90