УДК 517-911

РААД НООРИ БУТРИС, асп. (Киев. ун-т)

# О периодических решениях нелинейных систем дифференциально-операторных уравнений с импульсным воздействием

Рассматриваются численно-аналитические методы исследования существования и приближенного построения периодических решений нелинейных дифференциально-операторных уравнений, подверженных импульсному воздействию.

Розглядаються численно-аналітичні методи дослідження існування та наближеної побудови періодичних розв'язків нелінійних диференціально-операторних рівнянь, підданих імпульсній дії.

В настоящей статье с использованием идеи численно-аналитического метода [1—2] исследуются периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений, подверженных импульсному воздействию:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, Ax), \quad t \neq t_i, \tag{1}$$
$$\Delta x|_{t=t_i} = I_i(x, Ax),$$

где $x \in D \subset R^n$, $D$ — замкнутая ограниченная область евклидова пространства $R^n$, $f(t, x, y)$ $n$-мерная векторная функция, периодическая по $t$ с периодом $T$, определенная и непрерывная при

$$(t, x, y) \in R \times D \times D_1 = (-\infty, \infty) \times D \times D_1. \tag{2}$$

Здесь $D_1 \subset R^n$ — ограниченная область, $I_i(x, y)$ — непрерывные функции, определенные в области (2), и

$$I_{i+p}(x, y) = I_i(x, y), \quad t_{i+p} = t_i + T \tag{3}$$

для всех $i \in \mathbb{Z}$, $x \in D$, $y \in D_1$ и при некотором натуральном $p$.

Предположим, что оператор $A$ определен в классе кусочно-непрерывных функций и переводит его в класс кусочно-непрерывных функций. Кроме того, $Ax(t) = Ax(t+T)$.

Предположим, что в области (2) функции $f(t, x, y)$, $I_i(x, y)$ и оператор $A$ удовлетворяют неравенствам

$$\|f(t, x, y)\| \leqslant M, \quad \|I_i(x, y)\| \leqslant M, \tag{4}$$

$$\|f(t, x_1, y_1) - f(t, x_2, y_2)\| \leqslant K\|x_1 - x_2\| + L\|y_1 - y_2\|, \tag{5}$$
$$\|I_i(x_1, y_1) - I_i(x_2, y_2)\| \leqslant K\|x_1 - x_2\| + L\|y_1 - y_2\|,$$

$$\|Ax_1(t) - Ax_2(t)\| \leqslant Q\|x_1(t) - x_2(t)\| \tag{6}$$

для всех $t \in R$, $x, x_1, x_2 \in D$, $y, y_1, y_2 \in D_1$, где $M$ — положительная постоянная и $K$, $L$, $Q$ — константы Липшица.

Рассмотрим матрицу

$$\Lambda = \begin{pmatrix} (K + LQ)\dfrac{T}{3} & (K + LQ) \\ pT(K + LQ) & 2p(K + LQ) \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Будем в дальнейшем рассматривать лишь такие системы уравнений (1), для которых в областях $D$ и $D_1$ постоянная $M$ и матрица $\Lambda$ удовлетворяют условиям:

а) множества $D_f = D - \frac{T}{2}M\left(1 + \frac{4p}{T}\right)$ и $D_{1f} = D_1 - Q\frac{T}{2}M\left(1 + \frac{4p}{T}\right)$ не пусты;

б) наибольшее собственное значение $\lambda_{\max}$ матрицы $\Lambda$ не превышает единицы, что равносильно тому, что

$$(K + LQ)\frac{T}{3} + p(K + LQ)\left[2 + (K + LQ)\frac{T}{3}\right] < 1. \tag{8}$$

Существование периодических систем и нахождение их приближенных решений рассматривается в следующей теореме.

Теорема 1. *Если система* (1), *удовлетворяющая условиям* (4), (5), (6) *и* а), б), *имеет $T$-периодическое решение $x = x(t, x_0)$, проходящее при $t = 0$ через точку $x_0 \in D_f$ и $Ax_0 \in D_{1f}$, то это решение является пределом равномерно сходящейся последовательности периодических функций, определенных на периоде $T$ по формуле*

$$x_{m+1}(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \Big[f(s, x_m(s, x_0), \quad Ax_m(s, x_0)) -$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T (f(s, x_m(s, x_0), \quad Ax_m(s, x_0))\,ds\Big)\,ds +$$

$$+\sum_{0<t_i<t} I_i((x_m(t_i, x_0), \quad Ax_m(t_i, x_0)) - \frac{t}{T}\sum_{i=1}^{p} I_i(x_m(t_i, x_0),$$

$$Ax_m(s, x_0)); \qquad x_0(t, x_0) = x_0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots . \tag{9}$$

Доказательство. Каждая из функций этой последовательности $x_m(t, x_0)$ периодична по $t$ с периодом $T$. Более того, при $x_0 \in D$ в силу леммы 1 [1] для $t \in [0, T]$ имеем

$$\| x_m(t, x_0) - x_0 \| \leqslant M\alpha(t) + 2pM \leqslant \frac{T}{2}M\left(1 + \frac{4p}{T}\right), \tag{10}$$

где $\alpha(t) = 2t(1 - t/T)$.

Из (10) получаем оценку

$$\| Ax_m(t, x_0) - Ax_0 \| \leqslant Q\frac{T}{2}M\left(1 + \frac{4p}{T}\right), \tag{11}$$

т. е. $x_m(t, x_0) \in D$, $Ax_m(t, x_0) \in D_1$ при $x_0 \in D_f$ и $Ax_0 \in D_{1f}$.

Для доказательства сходимости последовательности функций (9) оценим разности $x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0)$ при всех $m$, согласно (10) будем иметь

$$\| x_{m+1}(t, x_0) - x_m(t, x_0) \| \leqslant N_m\alpha(t) + M_m \leqslant N_m\frac{T}{2} + M_m,$$

где

$$N_{m+1} = (K + LQ)\frac{T}{3}N_m + (K + LQ)M_m, \quad N_0 = M, \tag{12}$$

$$M_{m+1} = pT(K + LQ)N_m + 2p(K + LQ)M_m, \quad M_0 = 2pM,$$
$$m = 0, 1, 2, \ldots .$$

Отсюда для равномерной сходимости последовательности функций $x_m(t, x_0)$ достаточно, чтобы все решения разностных уравнений (12) стремились к нулю при $m \to \infty$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы собственные числа матрицы $\Lambda$ были меньше единицы, что эквивалентно выполнению неравенства (8).

Таким образом, благодаря условию (8), обеспечивается равномерная относительно $(t, x_0) \in R \times D_f$ сходимость последовательности (9). Положим

$$\lim_{m\to\infty} x_m(t, x_0) = x^0(t, x_0). \tag{13}$$

Переходя к пределу $m \to \infty$, убеждаемся, что $x^0(t, x_0)$ — периодическое решение уравнения

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t \Big[f(s, x(s, x_0), \quad Ax(s, x_0)\Big] -$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T \Big[f(x(s, x_0), Ax(s, x_0)\,ds\Big]\,ds + \sum_{0<t_i<t} I_i(x(t_i, x_0), \tag{14}$$

$$Ax(t_i, x_0) - \frac{t}{T}\sum_{i=1}^{p} I_i(x(t_i, x_0), \quad Ax(t_i, x_0)),$$

при этом

$$\| x^0(t, x_0) - x_0 \| \leqslant \frac{T}{2} M\left(1 + \frac{4p}{T}\right),$$

$$\| x^0(t, x_0) - x_m(t, x_0) \| \leqslant \lambda^m (1-\lambda)^{-1} \frac{T}{2} M\left(1 + \frac{4p}{T}\right), \tag{15}$$

где $\lambda$ — положительное собственное число матрицы $\Lambda$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что уравнение (14) не может иметь двух различных $T$-периодических решений. Это можно сделать так, как и в [2, с. 162].

Переходя к определению условий существования периодических решений уравнения (1), докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 2. *Пусть для системы уравнений* (1) *выполняются условия:*

1) *для некоторого целого $m$ отображение $\Delta_m$*

$$x_0 \to \Delta_m(x_0) = \frac{1}{T}\int_0^t f(t, x_m(t, x_0), \ Ax_m(t, x_0))\,dt +$$

$$+\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{p} I_i(x_m(t_i, x_0), \quad Ax_m(t_i, x_0)) \tag{16}$$

*имеет изолированную особую точку $x_0 = x^0$, $\Delta_m(x^0) = 0$;*

2) *индекс этой точки отличен от нуля;*

3) *в некоторой замкнутой выпуклой области $D_2 \subset D_f$ с границей $\Gamma_{D_2}$, содержащей единственную особую точку $x^0$ отображения $\Delta_m$, выполняется неравенство*

$$\inf_{x \in \Gamma_{D_2}} \| \Delta_m(x) \| \geqslant \lambda^m (1-\lambda)^{-1} \left[(K + LQ) + \frac{p}{T}(K + LQ)\right] \frac{T}{2} M\left(1 + \frac{4p}{T}\right). \tag{17}$$

*Тогда система уравнений* (1) *имеет периодическое решение $x = x(t, x_0)$, для которого $x(0, x_0) \in D_2 \subset D_f$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы аналогично доказательству теоремы 7.1 из [1]. С учетом этого в оценках разности $\| \Delta(x_0) - \Delta_m(x_0) \|$, используемых при доказательстве настоящей теоремы, следует положить

$$\| \Delta(x_0) - \Delta_m(x_0) \| \leqslant \lambda^m (1-\lambda)^{-1} \left[(K + LQ) + \frac{p}{T}(K + LQ)\right] \times$$

$$\times \frac{T}{2} M\left(1 + \frac{4p}{T}\right). \tag{18}$$

Аналогичный результат можно получить для другого класса уравнений, в частности, для уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x, \int\limits_{a(t)}^{b(t)} g(s, x(s))\, ds\right), \quad t \neq t_i,$$

$$\Delta x|_{t=t_i} = I_i\left(x, \int\limits_{a(t_i)}^{b(t_i)} g(s, x(s))\, ds\right). \tag{19}$$

Следующая теорема является аналогом теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть в системе* (19) *векторные функции* $f(t, x, y)$, $g(t, x)$ *и* $a(t)$, $b(t)$ *являются периодическими по* $t$ *с периодом* $T$, *определенными и непрерывными в* $R \times D \times D_1$, $R \times D$, $R$, $R$, $I_i(x, y)$ — *непрерывные функции, определенные в области* (2) *и* $I_{i+p}(x, y) = I_i(x, y)$, $t_{i+p} = t_i + T$. *Предположим, что* $f(t, x, y)$, $I_i(x, y)$ *и* $g(t, x)$ *удовлетворяют неравенствам* (4), (5),

$$\|g(t, x_1) - g(t, x_2)\| \leqslant Q\|x_1 - x_2\| \tag{20}$$

*и условиям:* а) *множества* $D_f = D - \frac{T}{2}M\left(1 + \frac{4p}{T}\right)$ *и* $D_{1f} = D_1 - hQ \times \frac{T}{2}M\left(1 + \frac{4p}{T}\right)$ *не пусты;* б) *наибольшее собственное значение* $\lambda_{\max}$ *матрицы* $\Lambda$ *не превышает единицы, что равносильно тому, что*

$$(K + LQh)\left[(K + LQh)\frac{pT}{3} + \frac{T}{3} + 2p\right] < 1, \tag{21}$$

*где*

$$h = \max_{t \in [0, T]} \|b(t) - a(t)\|.$$

*Тогда последовательности периодических по* $t$ *функций, определяемых на периоде* $[0, T]$ *по формуле*

$$x_{m+1}(t, x_0) + \int\limits_0^t \left[f\left(s, x_m(s, x_0), \int\limits_{a(s)}^{b(s)} g(\tau, x_m(\tau, x_0))\, d\tau\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{T}\int\limits_0^T \left(f\left(s, x_m(s, x_0), \int\limits_{a(s)}^{b(s)} g(\tau, x_m(\tau, x_0))\, d\tau\right) ds\right] ds +$$

$$+ \sum_{0 < t_i < t} I_i\left(x_m(t_i, x_0), \int\limits_{a(t_i)}^{b(t_i)} g(\tau, x_m(\tau, x_0))\, d\tau\right) -$$

$$- \frac{t}{T}\sum_{i=1}^{p} I_i\left(x_m(t_i, x_0), \int\limits_{a(t_i)}^{b(t_i)} g(\tau, x_m(\tau, x_0))\, d\tau\right);$$

$$x_0(\tau, x_0) = x_0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

*сходятся при* $m \to \infty$ *равномерно относительно* $(t, x_0) \in R \times D_f$

$$\left(y_0(t) = \int\limits_{a(t)}^{b(t)} g(s, x_0)\, ds \in D_{1f}, \quad \forall t \in [0, T]\right),$$

*к функции* $x^0(t, x_0)$, *определенной в области* (2) *периодической по* $t$ *с периодом* $T$ *и удовлетворяющей системе уравнений*

$$x(t, x_0) = x_0 + \int\limits_0^t \left[f\left(s, x(s, x_0), \int\limits_{a(s)}^{b(s)} g(\tau, x(\tau, x_0))\right) d\tau - \right.$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T f\left(s, x(s, x_0), \int_{a(s)}^{b(s)} g(\tau, x(\tau, x_0))\, d\tau\right) ds]\, ds +$$

$$+\sum_{0<t_i<t} I_i\left(x(t_i, x_0), \int_{a(t_i)}^{b(t_i)} g(\tau, x(\tau, x_0))\, d\tau\right) -$$

$$-\frac{t}{T}\sum_{i=1}^{p} I_i\left(x(t_i, x_0), \int_{a(t_i)}^{b(t_i)} g(\tau, x(\tau, x_0))\, d\tau\right). \qquad (23)$$

*Это решение единственно, причем*

$$\| x^0(t, x_0) - x_m(t, x_0) \| \leqslant \lambda^m (1-\lambda)^{-1} \frac{T}{2} M\left(1 + \frac{4p}{T}\right) \qquad (24)$$

*для всех $t \in R$, $m > 1$, где $\lambda$ — положительное собственное число матрицы $\Lambda$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Рассматривая отображение

$$\Delta_m(x_0) = \int_0^T f\left(t, x_m(t, x_0), \int_{a(t)}^{b(t)} g(s, x_m(s, x_0))\, ds\right) dt +$$

$$+\frac{1}{T}\sum_{i=1}^{p} I_i\left(x_m(t_i, x_0), \int_{a(t_i)}^{b(t_i)} g(s, x_m(s, x_0))\, ds\right), \qquad (25)$$

можно сформулировать теорему, аналогичную теореме 2, где

$$\lambda_{\max} = (K + LQh)\left(\frac{T}{3} + 2p\right) + (K + LQh)\sqrt{\frac{(T/3 + 2p)^2}{4} + \frac{pT}{3}}. \qquad (26)$$


1. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений.— Киев : Вища шк., 1976.— 180 с.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.— Киев : Вища шк., 1987.— 288 с.
3. *Завалыкут Г. Д.* Численно-аналитический метод дифференциально-операторных уравнений // Диф. уравнения.— 1983.— **19**, № 4.— С. 569—575.


Получено 24.01.91