УДК 519.21

И. Б. КИРИЧИНСКАЯ, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

Продолжение полунепрерывных процессов с независимыми приращениями

Рассматривается процесс X_t^1 с независимыми приращениями без положительных скачков в фазовом пространстве $(-\infty; +\infty)$ $\operatorname{Var} X_t^1 = +\infty$. По обрывающемуся процессу в пространстве E^0 строится его продолжение в $E^0 \cup \{0\}$.

Розглядається процес X_t^1 з незалежними приростами без додатніх стрибків у фазовому просторі $(-\infty; +\infty)$ $\operatorname{Var} X_t^1 = +\infty$. Від процесу, що обривається у просторі E^0, будується його продовження в $E^0 \cup \{0\}$.

Рассмотрим стохастически непрерывный однородный марковский процесс X_t^1 с независимыми приращениями в фазовом пространстве $(-\infty; +\infty)$, у которого $X_0^1 = x > 0$, кумулянта $k(s)$ равна

$$k(s) = \frac{1}{t} \ln M e^{sX_t^1} = bs^2 + as + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{sx} - 1 - \frac{sx}{1 + x^2} \right) \Pi(dx), \tag{1}$$

$$s > 0, \quad b > 0, \int_{0<|x|\leqslant 1} x^2 \Pi(dx) < +\infty, \Pi(dx),$$

и

$$\operatorname{Var} X_t^1 = +\infty \tag{2}$$

(здесь исключается случай $b = 0$ и $a < 0$, т. е. X_t^1 немонотонный).

Пусть $\zeta = \inf\{t : X_t^1 \leqslant 0\}$. Обозначим через X_t^0 обрывающийся процесс, полученный обрывом X_t^1 в момент ζ и заданный в пространстве $(0; +\infty)$. Резольвенту X_t^1 обозначим через $G_\lambda f(x)$ и, как известно [1], она равна

$$G_\lambda f(x) = M_x \int_0^{\zeta} e^{-\lambda t} f(X_t^1)\, dt, \quad f \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Теорема. *Существует продолжение процесса X_t^0 до строго марковского однородного стохастически непрерывного феллеровского необрывающегося процесса X_t, заданного в пространстве $[0; +\infty)$, и его продолжение характеризуется постоянными b и c, мерой $N(dy)$. Резольвента X_t имеет* *вид*

$$R_\lambda f(x) = G_\lambda f(x) + (1 - \lambda G_\lambda 1)\,\frac{\int\limits_0^\infty G_\lambda f(y)\,N(dy) + c\,\frac{\partial G_\lambda f}{\partial q}(+0)}{\lambda\left(b + \int\limits_0^\infty G_\lambda 1(y)\,N(dy) + c\,\frac{\partial G_\lambda 1}{\partial q}(+0)\right)}, \tag{4}$$

где $q(y) = M_y(1 - e^{-\zeta})$.

Доказательство. Для того чтобы решить поставленную задачу, рассматриваем лишь те непрерывные функции, которые удовлетворяют следующему условию:

$$f(-\infty) = f(0) = f(+\infty) = 0. \tag{5}$$

Так как X_t^1 стохастически непрерывный процесс, то не ограничивая общности, можно считать его непрерывным справа. Очень легко убедиться, что X_t^1 феллеровский. А из ([1], гл. III) следует, что X_t^1 строго марковский; X_t^0 ([1], гл. X) также будет однородным стохастически непрерывным строго марковским процессом.

Покажем, что для любого $\delta > 0$ при $x \to 0$ $P_x\{\zeta > \delta\} \to 0$. Обозначим $\xi(t) = X_t^1 - x$. Очевидно, $\xi(0) = 0$. Далее воспользуемся результатами теоремы 1, гл. IV, § 3 [2]:

$$P_0\left\{\overline{\lim_{t\to 0}}\,\frac{\xi(t)}{t} = +\infty\right\} = 1,$$

$$P_0\left\{\underline{\lim_{t\to 0}}\,\frac{\xi(t)}{t} = -\infty\right\} = 1. \tag{6}$$

Из (6) вытекает

$$\forall\varepsilon > 0 \quad \exists\{t_n\} : \lim_{n\to\infty} t_n = 0, \quad \exists N \quad \forall n > N$$

$$[n > N] \Rightarrow \left[\frac{X_{t_n}^1 - x}{t_n} < -\varepsilon\right]$$

с вероятностью 1; $X_{t_n}^1 < x - \varepsilon t_n$,

$$x = \varepsilon t_n. \tag{7}$$

Из (7) следует, что $\zeta < x/\varepsilon$; ε можно выбрать сколь угодно большим, а из этого следует $\zeta \to 0$.

В [3] построено продолжение однородного стохастически непрерывного строго марковского процесса, заданного в фазовом пространстве $E^0 = E \setminus \{o\}$ до необрывающегося строго марковского феллеровского стохастически непрерывного однородного процесса X_t, заданного в E, где E — метрический компакт. Это продолжение характеризуется мерами $N(dy)$, $M(dy)$ и постоянной b, и его резольвента равна

$$R_\lambda f(x) = G_\lambda f(x) + (1 - \lambda G_\lambda 1)\,\times$$

$$\times\,\frac{bf(o) + \int\limits_{E^0} G_\lambda f(y)\,N(dy) + \int\limits_{\partial\hat{E}} \frac{\partial G_\lambda f}{\partial q}(z)\,M\,dz)}{\lambda\left(b + \int\limits_{E^0} G_\lambda 1(y)\,N(dy) + \int\limits_{\partial\hat{E}} \frac{\partial G_\lambda 1}{\partial q}(z) M(dz)\right)}, \tag{8}$$

здесь $G_\lambda f(x)$ — резольвента X_t^0, $\partial\hat{E} = \hat{E} \setminus E^0$, $\hat{E}$ — пополнение E^0 по псевдометрик $|K_\lambda f(x) - K_\lambda f(y)|$, $K_\lambda f(x) = G_\lambda f(x)/G_1 1(x)$;

E — локальный компакт, но в силу условия (5) результаты [3] можно применить для поставленной задачи, а формула (8) перепишется в виде

$$R_\lambda f(x) = G_\lambda f(x) + (1 - \lambda G_\lambda 1) \times$$

$$\times \frac{\int\limits_0^\infty G_\lambda f(y)\, N(dy) + \int\limits_{\partial\widehat{E}} \frac{\partial C_\lambda f}{\partial q}(z)\, M(dz)}{\lambda \left(b + \int\limits_0^\infty G_\lambda 1(y)\, N(dy) + \int\limits_{\partial\widehat{E}} \frac{\partial G_\lambda 1}{\partial q}(z)\, M(dz) \right)}.$$

Убедимся в существовании предела

$$\lim_{x\to 0} \frac{G_\lambda f(x)}{G_1 1(x)}.$$

Согласно [4] $G_\lambda f(x)$ можно представить в виде

$$G_\lambda f(x) = R_\lambda(x) \int\limits_0^\infty e^{-\rho(\lambda) y} f(y)\, dy - \int\limits_0^x R_\lambda(x-y) f(y)\, dy, \tag{9}$$

здесь $\rho(\lambda)$ — положительный корень уравнения $k(s) = \lambda$,

$$R_\lambda(x) = \rho(\lambda) \int\limits_0^x e^{\rho(\lambda)(x-y)} dF_\lambda(y),$$

$$F_\lambda(y) = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} P_0 \{\inf_{0<\tau\leqslant t} X_\tau^1 > -y\}\, dt,$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-sx} R_\lambda(x)\, dx = \frac{1}{k(s) - \lambda}, \quad s > \rho(\lambda).$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 0} \frac{G_\lambda f(x)}{G_1 1(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{R_\lambda(x) \int\limits_0^\infty e^{-\rho(\lambda) y} f(y)\, dy - \int\limits_0^x R_\lambda(x-y) f(y)\, dy}{\frac{R_1(x)}{\rho(\lambda)} - \int\limits_0^x R_1(x-y)\, dy}.$$

Не умаляя общности, можно положить $\lambda = 1$. Очевидно,

$$\int\limits_0^x R_1(x-y)\, dy = \int\limits_0^x R_1(y)\, dy, \tag{10}$$

а $R_1(x)$ — монотонно возрастающая функция, $R_1(0) = 0$.
Полагаем, что $f \geqslant 0$. Тогда

$$0 \leqslant \frac{\int\limits_0^x R_1(x-y) f(y)\, dy}{R_1(x)} \leqslant \frac{R_1(x) \|f\| \cdot x}{R_1(x)} = \|f\| \cdot x. \tag{11}$$

Значит,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^x R_1(x-y) f(y)\, dy}{R_1(x)} = 0, \tag{12}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{G_1 f(x)}{G_1 1(x)}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{R_1(x)\int_0^\infty e^{-\rho(1)y}f(y)\,dy}{\frac{R_1(x)}{\rho(1)}-\int_0^x R_1(x-y)\,dy}-\right.$$

$$\left.-\frac{\int_0^x R_1(x-y)f(y)\,dy}{\frac{R_1(x)}{\rho(1)}-\int_0^x R_1(x-y)\,dy}\right]=\rho(1)\int_0^\infty e^{-\rho(1)y}f(y)\,dy;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{G_\lambda f(x)}{G_1 1(x)}=\rho(1)\int_0^\infty e^{-\rho(1)y}\left[f(y)+(1-\lambda)\,G_\lambda f(y)\right]dy. \qquad (13)$$

Рассматриваем любую сходящуюся последовательность $\{x_n\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0\neq 0$. В силу свойств функции $K_\lambda f(x)$ как псевдометрики $\lim\limits_{x\to x_0} K_\lambda f(x) = K_\lambda f(x_0)$. Если же рассматривать последовательность $\{x_n\}$, стремящуюся к нулю, то $K_\lambda f(0)$ не определено, поэтому дополняем E^0 точкой $+0$, для которой справедливо

$$\lim_{x\to 0} K_\lambda f(x) = K_0 = K_\lambda f(+0), \qquad (14)$$

а формула (8) имеет вид

$$R_\lambda f(x) = G_\lambda f(x) + (1-\lambda G_\lambda 1)\,\frac{\int_0^\infty G_\lambda f(y)\,N(dy)+\frac{\partial G_\lambda f}{\partial R_1}(+0)\,c}{\lambda\left(b+\int_0^\infty G_\lambda 1(y)\,N(dy)+c\,\frac{\partial G_\lambda 1}{\partial q}(+0)\right)}. \qquad (15)$$

Пусть A^0 — инфинитезимальный оператор процесса X_t^0, A — инфинитезимальный оператор процесса X_t. Согласно ([2], гл. 11, § 4)

$$G_\lambda A^0 f(x) = G_\lambda A f(x), \quad x>0, \qquad (16)$$

$$G_\lambda A^0 f(x) = \lambda G_\lambda f(x) - f(x), \quad x>0. \qquad (17)$$

Тогда несложно убедиться, что

$$bAf(0)=\int_0^\infty f(y)\,N(dy)+\int_{\partial\hat{E}}\frac{\partial f}{\partial R_1}(z)\,M(dz) \qquad (18)$$

или, учитывая то, что $\partial\hat{E}=\{+0\}$,

$$bAf(0)=\int_0^\infty f(y)\,N(dy)+c\,\frac{\partial f}{\partial R_1}(+0), \qquad (19)$$

где c — постоянная.

1. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы.— М. : Наука, 1963.— 860 с.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т.— М. : Наука, 1973.— Т. 2.— 640 с.
3. *Шуренков В. М., Киричинская И. Б.* Одноточечные продолжения марковского процесса // Стохастический анализ и его приложения.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989.— С. 113—120.
4. *Супрун В. Н., Шуренков В. М.* О резольвенте процесса с независимыми приращениями, обрывающегося в момент выхода на отрицательную полуось // Исследования по теории случайных процессов,— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1976.— С. 170—174.

Получено 11.12.90