УДК 519.44

В. Ф. БАРАННИК, канд. физ.-мат. наук (Ужгород. ун-т),
Л. Ф. БАРАННИК, д-р физ.-мат. наук (Полтав. пед. ин-т)

Об индексах простых компонент скрещенных групповых алгебр конечных групп и поля Р-адических чисел

Установлено, что если $2 \not\equiv 0 \pmod P$, то множество индексов простых компонент скрещенных групповых алгебр конечных нильпотентных групп ступени 2 и поля P-адических чисел совпадает с множеством всех натуральных чисел.

Установлено, що якщо $2 \not\equiv 0 \pmod P$, то множина індексів простих компонент схрещених групових алгебр скінченних нільпотентних груп ступеня 2 і поля P-адичних чисел збігається з множиною всіх натуральних чисел.

Важным инвариантом простой алгебры A является ее индекс $m(A)$. Множество значений $m(A)$, когда A пробегает совокупность простых компонент скрещенных групповых алгебр, изучалось в работах [1—8]. В настоящей статье, продолжающей исследования [6, 8], построены скрещенные групповые алгебры конечных нильпотентных групп ступени 2 и поля P-адических чисел, обладающие простыми компонентами с наперед заданным значением индекса из множества всех натуральных чисел.

Пусть F — конечное расширение поля p-адических чисел Q_p, R — кольцо всех целых величин поля F, $P = (\pi)$ — максимальный идеал R, W_K — группа всех корней из 1 поля K, ε_n — первообразный корень степени p^n из 1, S^* — мультипликативная группа кольца S, $N_{L/K}$ — норма элементов поля L относительно поля K, (G, S, λ) — скрещенное групповое кольцо конечной группы G и кольца S при системе S-факторов $\lambda(a, b)$ ($\lambda(a, b) \in S^*$; a, $b \in G$). Если $\varepsilon_n \in K$, то через $(K, p^n, \lambda, \mu, \varepsilon_n)$ будем обозначать скрещенную групповую алгебру абелевой группы типа (p^n, p^n) и поля K с определяющими соотношениями

$$u^{p^n} = \lambda, \quad v^{p^n} = \mu, \quad v^{-1}uv = \varepsilon_n u \quad (\lambda, \mu \in K^*).$$

Лемма 1. *Пусть $p \neq 2$, $F = Q_p(\varepsilon_n)$. Тогда*

$$A_n = (F, p^n, \varepsilon_n, 1 + p, \varepsilon_n)$$

является алгеброй с делением индекса p^n.

Доказательство. Пусть $u^{p^n} = \varepsilon_n$. Поскольку $L = F(u)$ — вполне разветвленное расширение поля Q_p, то

$$Q_p^*/N_{L/Q_p}(L^*) \cong Z_p^*/N_{L/Q_p}(S^*),$$

где Z_p — кольцо целых p-адических чисел, а S — кольцо всех целых величин поля L. Так как $p \neq 2$, то L — циклическое расширение поля Q_p степени $p^{2n-1}(p-1)$. Но в таком случае (см., например, [9, с. 304]) $N_{L/Q_p}(S^*)$ является подгруппой индекса $p^{2n-1}(p-1)$ в группе Z_p^*.

Если бы A_n не была алгеброй с делением, то

$$(1 + p)^{p^{n-1}} = N_{L/F}(a)$$

для некоторого $a \in L$. Отсюда вытекает

$$N_{F/Q_p}((1+p)^{p^{n-1}}) = N_{F/Q_p}(N_{L/F}(a)) = N_{L/Q_p}(a)$$

или

$$(1+p)^{p^{2n-2}(p-1)} = N_{L/Q_p}(a). \tag{1}$$

Поскольку каждый элемент Z_p^* однозначно записывается в виде $\omega^r(1+p)^\alpha$, где $\omega^{p-1}=1$, $\alpha \in Z_p$, то на основании равенства (1) порядок группы $Z_p^*/N_{L/Q_p}(S^*)$ делит $p^{2n-2}(p-1)^2$. Противоречие. Следовательно, A_n — алгебра с делением. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $p \neq 2$. Для любого числа p^m ($m \geqslant 0$) существует такая p-группа G ступени нильпотентности 2, что некоторая алгебра (G, F, λ) имеет простую компоненту индекса p^m.*

Доказательство. Пусть $K_n = Q_p(\varepsilon_n)$, $A_n = (K_n, p^n, \varepsilon_n, 1+p, \varepsilon_n)$. По лемме 1 A_n — алгебра с делением, ее центр совпадает с полем K_n. Разложение $F \otimes_{Q_p} A_n$ в прямую сумму простых компонент определяется разложением $F \otimes_{Q_p} K_n$ в прямую сумму полей. Поскольку $F \otimes_{Q_p} K_n \cong \cong F_n \oplus \ldots \oplus F_n$, где $F_n = F(\varepsilon_n)$, то $F \otimes_{Q_p} A_n \cong B_n \oplus \ldots \oplus B_n$, где $B_n = = F_n \otimes_{K_n} A_n$. Очевидно, $[F_n : K_n] \leqslant [F : Q_p]$. Пусть $[F_n : K_n] = p^s l$, где $l \not\equiv 0 \pmod p$. На основании результатов [10] об индексах циклических алгебр над локальным полем получаем, что индекс B_n равен p^{n-s} при $s \leqslant n$ и равен 1 при $s > n$. Значит, для любого натурального r существует такое n, что индекс алгебры B_n равен p^t, где $t \geqslant r$. Если индекс алгебры B_n равен p^t, то индекс алгебры

$$D_n = (F_n, p^n, \varepsilon_n^{p^k}, 1+p, \varepsilon_n)$$

равен p^{t-k} при $k < t$ и равен 1 при $k \geqslant t$. Отсюда вытекает, что для каждого натурального числа p^m существует такая алгебра D_n, что ее индекс равен p^m.

Пусть G — группа с определяющими соотношениями

$$a^{p^{2n}} = 1, \quad b^{p^n} = 1, c^{p^n} = 1, \quad [a, b] = c, \quad [a, c] = 1, \quad [b, c] = 1.$$

Алгебру (G, F, λ) зададим такими определяющими соотношениями:

$$u_a^{p^{2n}} = 1, \quad u_b^{p^n} = 1 + p, \quad u_c^{p^n} = 1;$$

$$u_b^{-1} u_a u_b = u_c u_a, \; u_c^{-1} u_a u_c = u_a, \quad u_c^{-1} u_b u_c = u_b.$$

Пусть $D_n = \sum_{i,j} \oplus F_n u^i v^j$, где

$$u^{p^n} = \varepsilon_n^{p^k}, \quad v^{p^n} = 1 + p, \quad v^{-1} u v = \varepsilon_n u.$$

Продолжая по линейности отображение $u_a \to u$, $u_b \to v$, $u_c \to \varepsilon_n$, получим F-гомоморфизм алгебры (G, F, λ) на алгебру D_n. Но тогда D_n — простая компонента алгебры (G, F, λ). Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть q — простое число, отличное от p. Для любого числа q^k существует такая q-группа G ступени нильпотентности 2, что некоторая алгебра (G, F, λ) имеет простую компоненту индекса q^k.*

Доказательство. Пусть ξ — первообразный корень степени q^k из 1, $K = F(\xi)$, η — образующая силовской q-подгруппы группы W_h, q^l — порядок η. Очевидно, $K = F(\eta)$. Пусть G — группа с определяющими соотношениями

$$a^{q^{k+l}} = 1, \quad b^{q^k} = 1, \quad c^{q^k} = 1, \quad [a, b] = c, \quad [a, c] = 1, \quad [b, c] = 1.$$

Алгебру (G, F, λ) зададим такими определяющими соотношениями:

$$u_a^{q^{k+l}} = 1, \quad u_b^{q^k} = \pi, \quad u_c^{q^k} = 1,$$

$$u_b^{-1}u_a u_b = u_c u_a, \quad u_c^{-1}u_a u_c = u_a, \quad u_c^{-1}u_b u_c = u_b.$$

$$\text{Пусть } \mathfrak{M} = K(u), \text{ где } u^{q^k} = \eta.$$

Поле $\mathfrak{M}$ является неразветвленным расширением поля K степени q^k (см., например, [10, с. 140]). Через A обозначим K-алгебру с определяющими соотношениями

$$u^{q^k} = \eta, \quad v^{q^k} = \pi, \quad v^{-1}uv = \xi u.$$

Так как A — скрещенное произведение циклического поля $\mathfrak{M}$ и его группы Галуа, соответствующее элементу π, который является простым и в кольце целых величин поля $\mathfrak{M}$, то в силу [10] A является K-центральной алгеброй индекса q^k. Поскольку отображение $u_a \to u$, $u_b \to v$, $u_c \to \xi$ можно продолжить до F-гомоморфизма алгебры (G, F, λ) на алгебру A, то A — простая компонента алгебры (G, F, λ). Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть $p \neq 2$, $m = q_1^{k_1} \dots q_s^{k_s}$ — каноническое разложение натурального числа m. Тогда среди нильпотентных групп ступени 2 существует такая группа G порядка $q_1^{l_1} \dots q_s^{l_s}$, что некоторая алгебра (G, F, λ) имеет простую компоненту индекса m.*

Доказательство. В силу лемм 2, 3 для каждого t_i существует такая q_i-группа G_i ступени нильпотентности 2, что некоторая алгебра (G_i, F, λ_i) имеет простую компоненту

$$A_i = (F(\eta_i), q_i^{t_i}, \lambda_i, \mu_i, \zeta_i)$$

индекса $q_i^{t_i}$, где

$$\eta_i^{q_i^{r_i}} = 1, \quad \lambda_i, \quad \mu_i \in F(\eta_i), \quad \zeta_i^{q_i^{t_i}} = 1 \text{ и } \zeta_i \in F(\eta_i) \ (i = 1, \dots, s).$$

Пусть θ — первообразный корень степени $q_1 q_2 \dots q_s$ из 1, $K = F(\theta)$, $l = [K : F]$, $q_i^{d_i}$ — q_i-часть $[K(\eta_i) : F(\eta_i)]$. Так как $[K(\eta_i) : F(\eta_i)] \leqslant [K : F]$, то $q_i^{d_i} \leqslant l$. В силу [10] индекс алгебры

$$B_i = K(\eta_i) \otimes_{F(\eta_i)} A_i$$

равен $q_i^{t_i - d_i}$ при $d_i \leqslant t_i$ и равен 1 при $d_i > t_i$. Выберем t_i и λ_i, μ_i так, чтобы индекс алгебры B_i был равен $q_i^{k_i}$.

Пусть $G = G_1 \otimes \dots \otimes G_s$, $(G, F, \lambda) = (G_1, F, \lambda_1) \otimes_F \dots \otimes_F (G_s, F, \lambda_s)$. Так как

$$F(\eta_1) \otimes_F \dots \otimes_F F(\eta_s) \cong L \oplus \dots \oplus L,$$

где $L = F(\eta_1, \dots, \eta_s)$, то (G, F, λ) имеет простую компоненту

$$C = (L, q_1^{t_1}, \lambda_1, \mu_1, \zeta_1) \otimes_L \dots \otimes_L (L, q_s^{t_s}, \lambda_s, \mu_s, \zeta_s).$$

Поскольку $K(\eta_i)$ — подполе поля L и $[L : K(\eta_i)] \not\equiv 0 \pmod{q_i}$, то индекс алгебры $(L, q_i^{t_i}, \lambda_i, \mu_i, \zeta_i)$ равен $q_i^{k_i}$, а потому индекс C равен m. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть F — конечное расширение поля Q_2, содержащее корни 4-ой степени из 1, $m = q_1^{k_1} \dots q_s^{k_s}$ — каноническое разложение натурального числа m. Тогда среди нильпотентных групп ступени 2 существует такая группа G порядка $q_1^{l_1} \dots q_s^{l_s}$, что некоторая алгебра $F(G, F, \lambda)$ имеет простую компоненту индекса m.*

Доказательство теоремы 2 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть F — конечное расширение поля Q_p $(p \neq 2)$, e — показатель ветвления F/Q_p, r — наибольший общий делитель чисел $p - 1$ и e. Если $e \not\equiv 0 \pmod p$, то натуральное число $p^s k$, $k \not\equiv 0 \pmod p$, является индексом простой компоненты некоторой скрещенной групповой алгебры $F \otimes_R (G, R, \lambda)$ тогда и только тогда, когда $(p-1) r^{-1} \equiv 0 \pmod k$.*

Доказательство. Пусть G — конечная группа, λ — система R-факторов группы G, $|G| = d = p^t d_1$, где $d_1 \not\equiv 0 \pmod p$. Известно, что

$$\lambda(g, g')^d = \frac{\alpha(g)\cdot\alpha(g')}{\alpha(gg')},$$

где $\alpha(h) \in R^*(g, g', h \in G)$. Произвольный элемент $\mu \in R^*$ однозначно представляется в виде

$$\mu = \omega^a \xi^b \eta_1^{\delta_1} \dots \eta_n^{\delta_n}, \tag{2}$$

где $\omega^{p^f-1} = 1$, $\xi^p = 1$, $0 \leqslant a < p^f - 1$, $0 \leqslant b < p$ при $\xi \neq 1$; $\delta_1, \dots, \delta_n \in Z_p$, $n = [F : Q_p]$, $ef = n$ [11]. Пусть θ_i — корень полинома

$$f_i(x) = x^{p^t} - \eta_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$K = F(\theta_1, \dots, \theta_n)$. Нетрудно доказать, что $[K : F] = p^{tn}$.

Пусть S — кольцо всех целых величин поля K. Из (2) вытекает, что для каждого $h \in G$ существует такой элемент $\beta(h) \in S^*$, что $\beta(h)^d = \alpha(h)^{-1}\gamma(h)$, где $\gamma(h) \in W_F = \langle\omega\rangle \times \langle\xi\rangle$. Полагаем

$$\mu(g, g') = \frac{\beta(g)\cdot\beta(g')}{\beta(gg')}\lambda(g, g').$$

Очевидно,

$$\mu(g, g')^d = \frac{\gamma(g)\cdot\gamma(g')}{\gamma(gg')} \in W_F.$$

Пусть $\Lambda = (G, R, \lambda)$, $\Lambda' = S \otimes_R \Lambda$. В силу приведенных рассуждений $\Lambda' = (G, S, \mu)$, а потому существует такая конечная группа $\hat{G}$, что $K\hat{G} \cong \tilde{\Lambda}' \oplus C$, где $\tilde{\Lambda}' = K \otimes_S \Lambda'$, а C — некоторая K-алгебра. На основании [5] индексы простых компонент алгебры $\tilde{\Lambda}'$ делят $(p-1)r^{-1}$. Отсюда в силу общих результатов об индексе Шура заключаем, что индексы простых компонент алгебры $\tilde{\Lambda} = F \otimes_R \Lambda$ делят $p^{t'}(p-1)r^{-1}$ $(t' \geqslant 0)$.

Пусть теперь $(p-1)r^{-1} \equiv 0 \pmod k$; T — поле инерции F/Q_p; $f = [T : Q_p]$; ε, ω — первообразные корни из 1 степеней p^{2n} и $p-1$ соответственно; μ — натуральное число, мультипликативный порядок которого по $\operatorname{mod} p^{2n}$ равен $p^n(p-1)$; $K = T(\varepsilon)$; B — скрещенное произведение поля K и циклической группы $\langle b\rangle$ порядка $p^n(p-1)$ с определяющими соотношениями

$$u_b^{p^n(p-1)} = \omega\cdot(1+p), \quad u_b^{-1}\varepsilon u_b = \varepsilon^\mu.$$

Используя довольно громоздкие рассуждения, можно доказать, что если p^l есть p-часть f и $n \geqslant l$, то индекс алгебры B равен $p^{n-l}(p-1)$. Так как $e \not\equiv 0 \pmod p$, то $F \otimes_T B$ — простая алгебра индекса $p^{n-l}(p-1)r^{-1}$. Полагаем $n - l = s$.

Очевидно, алгебра B является гомоморфным образом скрещенной групповой алгебры (H, T, λ) с определяющими соотношениями

$$v_a^{p^{2n}} = 1, \quad v_b^{p^n(p-1)} = \omega\cdot(1+p), \quad v_b^{-1}v_a v_b = v_a^\mu.$$

Вследствие этого $F \otimes_T B$ является простой компонентой алгебры $(H, F\ \lambda) = F \otimes_T (H, T, \lambda)$. Пусть $(p-1)r^{-1} = kq$. Индекс алгебры

$$C = (F \otimes_T B)^q = (F \otimes_T B) \otimes_F \dots \otimes_F (F \otimes_T B)$$

равен $p^s k$. Алгебра C является простой компонентой скрещенной групповой алгебры $(H, F, \lambda) \otimes_F \dots \otimes_F (H, F, \lambda)$ (q сомножителей). Теорема доказана.

1. *Brauer R.* Untersuchungen über die aritmetischen Eigenschaften von Gruppen linear Substitutionen. II // Math. Z. — 1930.— **31**.— S. 737—747.
2. *Roquette P.* Realisierung von Darstellungen endlicher nilpotenter Gruppen // Arch. Math.— 1958.— **9**.— S. 241—250.
3. *Берман С. Д.* Об индексе Шура // Успехи мат. наук.— 1961.— **2**.— С. 95—99.
4. *Берман С. Д.* Представления конечных групп над произвольным полем и над кольцом целых чисел // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1966.— **30**.— С. 69—132.
5. *Берман С. Д.* Об индексе Шура характеров конечных групп относительно локального поля // VIII Всесоюз. коллоквиум по общ. алгебре.— Рига, 1967.— С. 15.
6. *Баранник Л. Ф.* Об индексе Шура проективных представлений конечных групп / Мат. сб.— 1971.— **86**, № 1.— С. 110—120.
7. *Jamada T.* The Schur Subgroup of the Brauer Group // Lect. Notes Math.— 1974.— **397**.— P. 1—159.
8. *Баранник В. Ф.* Об индексе Шура проективных представлений конечных групп относительно локального поля // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1982.— № 10.— С. 3—5.
9. *Вейль А.* Основы теории чисел.— М. : Мир, 1972.— 408 с.
10. *Albert A. A.* Structure of algebras.— New York: Acad. press, 1939.— 210 p.
11. *Hasse H.* Zahlentheorie.— Berlin : Akademie-Verlag, 1969.— 612 s.

Получено 24.01.91