УДК 517.5

И. Я. Тырыгин, канд. физ.-мат. наук (Ин-т математики АН Украины, Киев)

УТОЧНЕННЫЕ ОЦЕНКИ ε-ЭНТРОПИИ КЛАССОВ KH_0^α

By using the methods of differential pulse-code modulation and "generalized" polygonal lines, we obtain almost exact estimates for the ε–entropy of the classes modeling signals of various types. The complexity of coding and recovering the functions from the classes under consideration is studied. A numerical solution is given for the problem of minimization of constants in the ordinal inequality for the ε-entropy of the classes KH_0^α.

За допомогою методів диференціальної імпульсно-кодової модуляції та „узагальнених" ламаних одержані майже точні оцінки ε-ентропії класів, які моделюють сигнали різної природи. Вивчена складність кодування та відновлення функцій розглядуваних класів. Наведено чисельний розв'язок задачі мінімізації констант у порядковій нерівності для ε-ентропії класів KH_0^α.

Прогресс в области цифровых средств записи, обработки и восстановления сигналов предъявляет высокие требования к используемому математическому аппарату. Необходимо выяснить точное место и роль каждого из применяемых математических методов и, по возможности, усовершенствовать их. Как показано ниже, в случае одномерных сигналов оптимизация простых методов дает хорошие результаты. Рассматриваемые классы KH_0^α могут служить подходящей моделью для описания множеств сигналов самой различной природы в широком круге практических задач. Почти точные оценки ε-энтропии указанных классов получены с помощью развития и усовершенствования, с одной стороны, аппарата кусочно-постоянных приближений и, с другой, — аппарата типа ломаных. При этом оказывается, что каждый из методов является предпочтительным лишь в своей части задач, тогда как в иной части лучше работает другой метод. Оценивается также сложность реализации рассматриваемых методов. В работе использован общий подход к решению подобных задач, изложенный в [1].

1. Определения. Пусть в пространстве $\mathbb{C}([0,1])$ непрерывных на отрезке $[0,1]$ функций с метрикой

$$\rho(x, y) = \sup_{0\le t\le 1} |x(t) - y(t)|$$

задан класс KH_0^α, $0 < \alpha \le 1$, функций $x(t)$ таких, что

$$|x(t_1) - x(t_2)| \le K\Delta^\alpha, \quad |t_1 - t_2| \le \Delta, \quad x(0) = 0.$$

Классами KH_0^α при различных K и α мы можем описывать множества входных сигналов кодирующего устройства, а именно, звуковые и телеметрические сигналы различной природы. Порядковые оценки (с грубыми константами $\ge (2K)^{1/\alpha}$ в оценке сверху) ε-энтропии $\mathcal{H}_\varepsilon(KH_0^\alpha)$ при $0 < \alpha < 1$ хорошо известны [2 – 4]: $\mathcal{H}_\varepsilon(KH_0^\alpha) = O(\varepsilon^{-1/\alpha})$. При $\alpha = 1$ точное значение $\mathcal{H}_\varepsilon(KH_0^1) = K/\varepsilon$ подсчитано в [5], где для этой оценки использованы приближения ломаными „стандартного" вида. Таким образом, наша задача состоит в уточнении констант в порядковом неравенстве для ε-энтропии. Изложение опирается в основном на работы [6, 7].

2. Дифференциальная импульсно-кодовая модуляция. Под методом дифференциальной импульсно-кодовой модуляции (ДИКМ) будем понимать кодирование и восстановление функций из KH_0^α с помощью разности значений ("дифференциалов") кусочно-постоянных функций „стандартного" вида. Зададим $h, \delta > 0$ и построим множество кусочно-постоянных функций $\omega_i(t)$ вида $\omega_i(t) = kh$, k — целое, $l\delta \le t < (l+1)\delta$, $l \in N$. Подобрав параметры h и δ в зависимости от α и K, построим почти минимальную ε-сеть для KH_0^α. Строго говоря, в качестве ε-сети могут использоваться только функции из $\mathbb{C}([0,1])$, однако на основе кусочно-постоянных функций $\omega_i(t)$ из ε-сети легко построить ε-сеть одинаковой мощности из непрерывных функций $x_i(t)$. Для этого достаточно положить

$$x_i(t) = \frac{1}{2}\left\{\max_{\substack{x \in KH_0^\alpha, \\ \rho(x, \omega_i) \le \varepsilon}} x(t) + \min_{\substack{x \in KH_0^\alpha, \\ \rho(x, \omega_i) \le \varepsilon}} x(t)\right\}.$$

Итак, пусть задана фукнция $x(t) \in KH_0^\alpha$ и на интервале $[l\delta, (l+1)\delta]$ константа наилучшего приближения для $x(t)$ есть C. Восстановим $x(t)$ на этом интервале константой $[C/h + 1/2]h$. Погрешность такого восстановления равна $\varepsilon = h/2 + + K\delta^\alpha/2$. Назовем такой метод восстановления наилучшим квантованным приближением. Каждой функции $x(t) \in KH_0^\alpha$ ставится в соответствие кусочно-постоянная функция $\omega_i(t)$ „стандартного" вида так, что $\rho(x, \omega_i) \le \varepsilon$, и $\omega_i(t)$ образуют конечную ε-сеть для компакта KH_0^α. Функция $x(t)$ на интервале $[(l+1)\delta, (l+2)\delta]$ может быть закодирована „дифференциалом" — целым числом Q, $|Q| \le 2([2\varepsilon/h]+1)+1$, таким, что $C_1 = C + + Qh$, где C_1 — константа наилучшего квантованного приближения для $x(t)$ на интервале $[(l+1)\delta, (l+2)\delta]$. Тогда

$$\mathcal{H}_\varepsilon(KH_0^\alpha) \le \left(\left[\frac{1}{\delta}\right]+1\right)\log_2\left(2\left(\left[\frac{2\varepsilon}{h}\right]+1\right)+1\right) \le \left(\frac{1}{\delta}+1\right)\log_2\left(\frac{4\varepsilon}{h}+3\right).$$

Сделаем замену переменной: $u = 4\varepsilon/h + 3$, т. е.

$$h = \frac{4\varepsilon}{u-3}, \quad \delta = \left(\frac{2\varepsilon}{K}\right)^{1/\alpha}\left(\frac{u-5}{u-3}\right)^{1/\alpha},$$

где $u > 5$ в силу условия $4\varepsilon/h = 2 + 2K\delta^\alpha/h > 2$. Отсюда получаем

$$\mathcal{H}_\varepsilon(KH_0^\alpha) \le \left\{\left(\frac{K}{2\varepsilon}\right)^{1/\alpha}\left(\frac{u-3}{u-5}\right)^{1/\alpha}+1\right\}\log_2 u.$$

Предполагая для простоты $u = 2^n - 1$, $n \in N$, $n \ge 3$, выводим оценку

$$\mathcal{H}_\varepsilon(KH_0^\alpha) < \left\{\left(\frac{K}{2\varepsilon}\right)^{1/\alpha}\left(\frac{2^n-4}{2^n-6}\right)^{1/\alpha}+1\right\}n = \varphi_\alpha(n)\left(\frac{K}{2\varepsilon}\right)^{1/\alpha} + n,$$

где

$$\varphi_\alpha(n) = \left(\frac{2^n-4}{2^n-6}\right)^{1/\alpha} n.$$

Численно минимизируем теперь главную часть оценки по целым $n \ge 3$, т. е. решаем задачу

$$\varphi_\alpha(n) \to \min_{n \ge 3}.$$

Нетрудно показать, что при $n > 0$ эта функция имеет только один минимум, и, следовательно, задача минимизации легко разрешима. Результаты минимизации приведены в таблице в п. 4.

3. „Обобщенные" ломаные. Обратимся к другому способу построения ε-сети для KH_0^α, который назовем „обобщенными" ломаными. Этот аппарат позволит расширить метод оценки ε-энтропии классов KH_0^1 из [5] на классы KH_0^α. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на интервалы длины δ точками $k\delta$, $k \in N$. Рекуррентно построим семейство непрерывных функций $x_i(t)$, полагая $x_i(t) = 0$, $0 \le t \le \delta$, и затем на каждом новом интервале, продолжая $x_i(t)$ „стандартным" образом вверх или вниз согласно равенствам

$$x_i(t) = (K/2)\{(t-k\delta)^\alpha - \delta^\alpha - ((k+1)\delta - t)^\alpha\} + x_i(k\delta),$$

либо

$$x_i(t) = (-K/2)\{(t-k\delta)^\alpha - \delta^\alpha - ((k+1)\delta - t)^\alpha\} + x_i(k\delta), \quad k\delta \le t \le (k+1)\delta.$$

Нетрудно видеть, что множество KH_0^α может быть покрыто с точностью $\varepsilon = K\delta^\alpha/2 + K(\delta/2)^\alpha$ конечным числом функций $x_i(t)$, т. е. $x_i(t)$ образуют ε-сеть. Для любой функции $x(t) \in KH_0^\alpha$ можно указать такую функцию $x_{i_0}(t)$ из ε-сети, что

$$|x(k\delta) - x_{i_0}(k\delta)| \le K\delta^\alpha, \quad k \in N,$$

и тогда $\rho(x, x_{i_0}) \le \varepsilon$. Кодом функции $x(t)$ на интервале $[k\delta, (k+1)\delta]$ будет

$$\operatorname{sgn}\{x_{i_0}((k+1)\delta) - x_{i_0}(k\delta)\}.$$

Оценка сверху для ε-энтропии имеет вид

$$\mathcal{H}_\varepsilon(KH_0^\alpha) \le \left[\frac{1}{\delta}\right] \le \left(\frac{K}{2\varepsilon}\right)^{1/\alpha} (1 + 2^{1-\alpha})^{1/\alpha} = \theta_\alpha \left(\frac{K}{2\varepsilon}\right)^{1/\alpha}.$$

Значения θ_α приведены в таблице в п. 4.

4. Оценки снизу. Построение множества 2ε-различимых функций в KH_0^α, число элементов которого даст возможность оценить ε-энтропию снизу, опирается в своей основе также на идею „обобщенных" ломаных, однако более сложного вида. Выберем δ из условия $K\{1 - (1-\delta)^\alpha + \delta^\alpha\} > 2\varepsilon$. Функции $y_i(t)$ из 2ε-различимого множества будем строить рекуррентно с помощью частей функции Kt^α. Вначале на интервале $[0, \delta]$ все $y_i(t)$ совпадают либо с Kt^α, либо с $(-K)t^\alpha$. На интервале $[\delta, 2\delta]$ каждая из функций $y_i(t)$ совпадает с одной из четырех функций $\pm Kt^\alpha$, $\pm K(\delta^\alpha - (t-\delta)^\alpha)$. Далее на отрезке $[2\delta, 3\delta]$ каждая $y_i(t)$ совпадает с одной из восьми функций

$$\pm Kt^\alpha, \quad \pm K((2\delta)^\alpha - (t-2\delta)^\alpha), \quad \pm K(\delta^\alpha - (t-\delta)^\alpha), \quad \pm K(t-2\delta)^\alpha,$$

и т. д. На каждом новом k-м шаге число функций $y_i(t)$ увеличивается вдвое и эти функции при $k\delta \le t \le (k+1)\delta$ либо продолжаются по одной из „усеченных" функций $C \pm K(t-l\delta)^{\alpha}$, $l<k$, либо совпадают с $C \pm K(t-k\delta)^{\alpha}$, где C определяется исходя из непрерывности $y_i(t)$ в точках разбиения. Нетрудно проверить, что в силу выбора δ все $y_i(t)$ 2ε-различимы. Тогда $[1/\delta] \le \le \mathcal{H}_{\varepsilon}(KH_0^{\alpha})$. Для явного нахождения δ можно использовать неравенство

$$1+\delta^{\alpha}-(1-\delta)^{\alpha} > ((2\varepsilon)^{1-1/\alpha}+\alpha)\delta, \quad 0<\delta \le (2\varepsilon)^{1/\alpha}.$$

Решая уравнение $((2\varepsilon)^{1-1/\alpha}+\alpha)\delta = 2\varepsilon/K$, получаем выражение для δ и оценку снизу:

$$\left(\frac{K}{2\varepsilon}\right)^{1/\alpha} + \frac{\alpha K}{2\varepsilon} - 1 \le \mathcal{H}_{\varepsilon}(KH_0^{\alpha}).$$

Соединим все полученные оценки в следующей теореме.

Теорема. *Справедливы неравенства*

$$\left(\frac{K}{2\varepsilon}\right)^{1/\alpha} + \frac{\alpha K}{2\varepsilon} - 1 \le \mathcal{H}_{\varepsilon}(KH_0^{\alpha}) \le \min\left\{\varphi_{\alpha}(n)\left(\frac{K}{2\varepsilon}\right)^{1/\alpha} + n,\ \theta_{\alpha}\left(\frac{K}{2\varepsilon}\right)^{1/\alpha}\right\},$$

где значения $\varphi_{\alpha}(n)$ и θ_{α} приведены в таблице.

α	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,01
θ_{α}	2,0	2,25	2,60	3,15	4,06	5,83	10,04	24,94	$\theta_{\alpha} \gg \varphi_{\alpha}(n)$			
$\varphi_{\alpha}(n)$	4,80	4,90	5,02	5,19	5,42	5,76	6,02	6,40	7,11	8,24	9,38	12,13
n	4	4	4	4	4	4	5	5	6	7	8	11

Сравнивая значения θ_{α} с $\varphi_{\alpha}(n)$, получаем, что при $0<\alpha \le \alpha_0 \approx 0{,}5$ (точнее $\alpha_0 = 0{,}51$) предпочтительным является метод ДИКМ с соответствующими параметрами, а при $\alpha_0 \le \alpha \le 1$ лучше работает метод „обобщенных" ломаных. Однако и при α, близких к 1, метод ДИКМ увеличивает количество информации по сравнению с методом „обобщенных" ломаных не более чем в 2,4 раза. Для приложений важно, что при $\alpha = 1$ метод наилучшего квантованного приближения, используемый в ДИКМ, можно заменить на обычную интерполяцию, не увеличивая погрешность, т. е. в качестве приближающей константы для $x(t)$ на интервале $[k\delta, (k+1)\delta]$ брать

$$\left[\frac{x((k+1/2)\delta)}{h} + \frac{1}{2}\right]h.$$

5. Сложность. Подсчитаем выраженную в условных единицах стоимость (сложность) реализации алгоритмов рассмотренных методов. В качестве базисных операций выберем четыре арифметических действия, операцию нахождения целой части числа ([ ]) и операцию сравнения ($\le$). Стоимость каждой из базисных операций примем равной $O(1)$. Кроме указанных операций нам необходимо оценить стоимость реализации алгоритма нахождения с определенной точностью ε_0 максимума и минимума функции на отрезке длины δ. Оптимальный последовательный алгоритм (подробнее см. [8]) на классах KH_0^{α} имеет сложность $p = O(\delta\varepsilon_0^{-1/\alpha})$. Примем во внимание, что в методе наилучшего квантованного приближения, где используется операция нахождения экстремумов функции, $\delta = O(\varepsilon^{1/\alpha})$, и получим $p = O((\varepsilon/\varepsilon_0)^{1/\alpha})$. Заранее положим $\varepsilon_0 = O(\varepsilon)$, т. е. $p = O(1)$. Проводя несложный анализ количества операций, необходимых для реализации методов ДИКМ и „обобщенных" ломаных, находим, что стоимость как кодирования, так и восстановления функций из классов KH_0^α каждым из этих методов на одном шаге равна $O(1)$ и на всем отрезке составляет $O(\varepsilon^{-1/\alpha})$. Отметим, что для методов ДИКМ с применением наилучшего квантованного приближения погрешность алгоритма увеличится до $\varepsilon + \varepsilon_0$ за счет приближенного нахождения экстремумов функции на отрезках разбиения.

1. *Тырыгин И. Я.* ε-энтропийный подход к задаче сжатия информации // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 11. – С. 1598–1604.
2. *Витушкин А. Г.* Оценка сложности задачи табулирования. – М.: Физматгиз, 1959. – 228 с.
3. *Тиман А. Ф.* Теория приближений функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
4. *Lorentz G. G.* Approximation of functions. – New York: Holt, 1966. – 240 p.
5. *Колмогоров А. Н., Тихомиров В. М.* ε-энтропия и ε-емкость множеств в функциональных пространствах // Успехи мат. наук. – 1959. – **14**, № 2. – С. 3–86.
6. *Тырыгин И. Я.* Один подход к вычислению ε-энтропии и ε-энтропия классов H_0^ω. – Киев, 1989. – 32 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 98.72).
7. *Тырыгин И. Я.* Возможности метода ДИКМ и ε-энтропия классов H_0^α. – Киев, 1989. – 21 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.75).
8. *Сухарев А. Г., Тимохов А. В., Федоров В. В.* Курс методов оптимизации. – М.: Наука, 1986. – 328 с.

Получено 22.04.92