УДК 512.554.3

Ли Сун Ген

Об алгебрах Ли с нильпотентным радикалом

Цель настоящей заметки — ввести понятие типа алгебры Ли с нильпотентным радикалом и указать конструкцию, играющую ту же роль, которую в теории ассоциативных алгебр играют тензорные алгебры бимодулей [1].

Пусть K — поле характеристики 0, $\mathcal{L}$ — конечномерная алгебра Ли над K такая, что ее радикал R нильпотентен. Обозначим $B = \mathcal{L}/R$, $V = R/R^2$. Пару (B, V) назовем типом алгебры Ли $\mathcal{L}$. Здесь B — полупростая алгебра Ли, V можно рассматривать как B-модуль. Из теоремы Леви и полной приводимости представлений полупростых алгебр [2] следует, что в $\mathscr{L}$ есть подалгебра $\overline{B}$ такая, что $\mathscr{L}=\overline{B}\oplus R$, а в R есть $\overline{B}$-подмодуль $\overline{V}$ такой, что $R=\overline{V}\oplus R^2$ (ясно, что $\overline{B}\simeq B$, $\overline{V}\simeq V$).

Пусть теперь B — полупростая алгебра Ли, V — конечномерный B-модуль. Обозначим через $\mathscr{F}$ свободную алгебру Ли, порожденную векторным пространством V (или, что то же, некоторым базисом V). Действие B на V однозначно продолжается до представления B дифференцированиями алгебры $\mathscr{F}$, так что можно рассмотреть расщепляемое расширение $B\oplus\mathscr{F}$ алгебры B посредством $\mathscr{F}$ [2]. Идеал $I\subseteq B\oplus\mathscr{F}$ назовем правильным, если $\mathscr{F}^2\supseteq I\supseteq\mathscr{F}^m$ для некоторого m.

Теорема. *Для любого правильного идеала $I\subseteq B\oplus\mathscr{F}$ фактор-алгебра $B\oplus\mathscr{F}/I$ есть конечномерная алгебра Ли с нильпотентным радикалом типа (B,V). Наоборот, для всякой конечномерной алгебры Ли $\mathscr{L}$ с нильпотентным радикалом типа (B,V) найдется такой правильный идеал $I\subseteq B\oplus\mathscr{F}$, что $\mathscr{L}\simeq B\oplus\mathscr{F}/I$.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы VIII.5.2 из [1]. Из результатов § 9 главы III работы [2] вытекает, что если $\mathscr{L}'=\mathscr{L}$, то R нильпотентен. Из сформулированной теоремы легко вывести такое следствие.

Следствие. *Пусть $\mathscr{L}$ — конечномерная алгебра Ли с нильпотентным радикалом типа (B,V). Следующие условия равносильны:* 1) $\mathscr{L}'=\mathscr{L}$; 2) $VB=V$; 3) $vB\neq 0$ *для любого ненулевого* $v\in V$.

Замечание. Если алгебра B расщепляема [2], то она полностью определяется своей схемой Дынкина (возможно, несвязной), а модуль V задается набором старших весов своих неприводимых компонент. Так, в этом случае тип алгебры $\mathscr{L}$ можно определить, задав схему Дынкина и сопоставив каждой точке этой схемы n-мерный вектор с неотрицательными целыми координатами, где n — число неприводимых компонент модуля V.

1. *Дрозд Ю. А., Кириченко В. В.* Конечномерные алгебры.— Киев : Вища шк., 1980.— 190 с.
2. *Джекобсон Н.* Алгебры Ли.— М. : Мир, 1964.— 356 с.

Киев. ун-т

Получено 27.12.84