УДК 517.982

Е. В. Токарев

О банаховых пространствах с супераппроксимационным свойством

Пусть X и Y — банаховы пространства (БП). Скажем, что X *финитно представимо в* Y, если для каждого $\varepsilon > 0$ и каждого конечномерного подпространства X_n пространства X найдутся такие конечномерное подпространство $Y_n \subset Y$ и изоморфизм $T_n : X_n \to Y_n$, что $\| T \| \| T^{-1} \| \leqslant \leqslant 1 + \varepsilon$.

БП X обладает *супераппроксимационным свойством* (супер-АС), если всякое финитно представимое в X БП Y обладает *аппроксимационным свойством* (АС), т. е. всякий компактный оператор из произвольного БП Z в Y можно аппроксимировать конечномерными. (По поводу финитной представимости и АС см. [1, 2]).

Обозначим через $L(X, Y)$, $K(X, Y)$, $F(X, Y)$ пространства линейных операторов из БП X в БП Y, которые соответственно ограничены, компактны или конечномерны. Замыкание $F(X, Y)$ в топологии равномерной сходимости пространства $L(X, Y)$ обозначим $\overline{F}(X, Y)$.

Тогда наличие АС в БП X можно записать так: для всякого БП Y $K(Y, X) = \overline{F}(Y, X)$.

Одновременно с АС рассмотрим его усиление — *равномерное аппроксимационное свойство* (РАС) (см. [3]).

БП X обладает РАС, если существуют конечная функция $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и число $\lambda < \infty$ такие, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и каждого n-мерного подпространства $X_n \subset X$ найдется оператор $T_n \in F(X, X)$ такой, что $\| T_n \| \leqslant \lambda$; $T_n x = x$ для всех $x \in X_n$ и $\dim T_n X \leqslant f(n)$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Если БП X обладает РАС, а всякое подпространство X обладает АС, то X обладает супер-АС.*

Доказательство опирается на некоторые идеи Фигеля [4]. Пусть X, Y — БП; $T \in L(X, Y)$. Пара операторов (A, B) называется *факторизацией* T через БП Z, если $A \in L(X, Z)$; $B \in L(Z, Y)$; $BA = T$.

Если при этом A и B оба компактны (соответственно аппроксимируемы), то факторизация (A, B) называется *K-факторизацией* (соответственно *$\overline{F}$-факторизацией*).

Лемма 1. *Пусть X, Y, Z — БП; Y финитно представимо в Z; Z обладает РАС, а всякий оператор $Q \in \overline{F}(X, Y)$ допускает $\overline{F}$-факторизацию через Z. Тогда всякий $T \in K(X, Y)$ допускает K-факторизацию через некоторое подпространство Z.*

Доказательство. Согласно известным свойствам *ультрапроизведений* (см. [3]) существует изометрическое вложение j БП Y в некоторую ультрастепень $(Z)_{\mathfrak{U}}$. Поскольку Z обладает РАС, то же верно и для $(Z)_{\mathfrak{U}}$ [3], в частности $K(X, (Z)_{\mathfrak{U}}) = \overline{F}(X, (Z)_{\mathfrak{U}})$. Пусть $T \in K(X, Y)$. Тогда $jT \in \overline{F}(X, (Z)_{\mathfrak{U}})$. По условию леммы существует $\overline{F}$-факторизация (A, B) оператора jT через Z. Пусть Z_1 — подпространство Z такое, что $AX \subseteq Z_1 \subseteq B^{-1}(jY)$. Выберем $A_1 \in K(X, Z_1)$ и $B_1 \in K(Z_1, Y)$ так, чтобы $A_1 x = Ax$ для $x \in X$; $B_1 z = j^{-1} Bz$ для $z \in Z_1$. Очевидно, (A_1, B_1) и есть искомая K-факторизация T.

Лемма 2. *Пусть БП X обладает РАС; $Z = (\Sigma \oplus X)_{l_2}$; $(Z)_{\mathfrak{U}}$ — некоторая ультрастепень Z. Тогда любой оператор $T \in \overline{F}(Y, (Z)_{\mathfrak{U}})$, где Y — произвольное БП, допускает $\overline{F}$-факторизацию через Z.*

Доказательство. Пусть $T \in \overline{F}(Y, (Z)_{\mathfrak{U}})$. Положим $S_0 = 0$ и для каждого $i = 1, 2, 3, \ldots$ выберем оператор $S_i \in F(Y, (Z)_{\mathfrak{U}})$ так, чтобы $\| T - S_i \| \leqslant 4^{-i}$.

Положим $T_i = S_i - S_{i-1}$. Тогда $T = \Sigma T_i$ и ряд справа сходится абсолютно. Положим $E_i = T_i Y$.

Пользуясь техникой, развитой в [3], нетрудно проверить, что для всякого $i = 1, 2, 3, \ldots$ найдется конечномерное подпространство $F_i \subset (Z)_{\mathfrak{U}}$, $F_i \supset E_i$, такое, что существуют операторы J_i, P_i; $J_i : F_i \to Z$; $P_i : Z \to F_i$, причем $P_i J_i x = x$ для всех $x \in E_i$; $\| P_i \| \| J_i \| \leqslant \lambda$, где λ — из определения РАС и $P_i J_j = \delta_{ij} \mathrm{Id}_{E_j}$, где δ_{ij} — символ Кронекера, а Id_X — тождественный на X оператор.

Определим $A \in \overline{F}(Y, Z)$ и $B \in \overline{F}(Z, (Z)_{\mathfrak{U}})$ так:

$$Ay = \Sigma 2^i J_i T_i y \quad \text{для } y \in Y;$$

$$Bz = \Sigma 2^{-i} P_i z \quad \text{для } z \in Z.$$

Поскольку ряды сходятся абсолютно, с учетом изложенного выше имеем

$$BAx = \Sigma 2^{-j} P_j (\Sigma 2^i J_i T_i) x = \Sigma 2^{-i} P_i J_i T_i 2^i x = \Sigma T_i x = Tx.$$

Поэтому (A, B) — искомая факторизация.

Доказательство теоремы. Пусть Y финитно представимо в X. Тогда Y изометрично подпространству некоторой ультрастепени $(X)_{\mathfrak{U}}$ и по лемме 2 всякий оператор $T \in \overline{F}(Z, (X)_{\mathfrak{U}})$ допускает $\overline{F}$-факторизацию через

X. По лемме 1 всякий $T \in K(Z, Y)$ допускает K-факторизацию через некоторое подпространство $X_1 \subset X$. Поскольку по условию теоремы X_1 обладает АС, то $K(Z, X_1) = \overline{F}(Z, X_1)$, т. е. A — предел последовательности $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subset F(Z, X_1)$. Тогда $BA_n \in F(Z, X_1)$, причем $\| T - BA_n \| = \| BA - BA_n \| \leqslant \| B \| \| A - A_n \| \underset{n \to \infty}{\to} 0$, т. е. $T \in \overline{F}(Z, Y)$. Поскольку Z произвольно, Y обладает АС. Теорема доказана.

Замечание 1. Конечно, всякое гильбертово пространство обладает супер-АС. Приведем пример БП X, отличного от гильбертова, но все же обладающего супер-АС.

Пример. Рассмотрим БП $X_J = (\Sigma \oplus l_{p_j}^{n_j})_{l_2}$, где $p_j \to 2$ и $n_j \to \infty$ — две последовательности; $n_j = \dim l_{p_j}^{n_j}$. Конечно, X_J не изоморфно гильбертову. При этом в [5] доказано, что последовательности (p_j) и (n_j) можно выбрать так, что X_J обладает РАС, а всякое подпространство X_J обладает АС. Из теоремы 1 вытекает, что X_j обладает супер-АС.

Замечание 2. Два условия теоремы 1 гарантируют, что в X выполнено супер-АС. Это а) наличие в X РАС и б) наследуемость АС подпространствами X.

Необходимость условия б) очевидна. Вопрос о необходимости условия а) представляется достаточно сложным. Он имеет утвердительный ответ, если дополнительно предположить *суперрефлексивность* пространства X (X суперрефлексивно, если и только если рефлексивно всякое финитно представимое в X пространство), поскольку в этом случае наличие РАС в X эквивалентно тому, что всякая ультрастепень $(X)_{\mathfrak{U}}$ обладает АС (см. [3]).

В частности, условие а) необходимо, если положительно решается следующая известная проблема. Пусть из условия «l_p финитно представимо в X» с необходимостью вытекает $p = 2$. Верно ли, что X суперрефлексивно?

Следует также отметить, что неизвестно: независимы ли условия а) и б)? Весьма вероятно, что справедлива импликация б) $\Rightarrow$ а).

1. *Кадец М. И.* Геометрия нормированных пространств. — Итоги науки и техники АН СССР, ВИНИТИ. Сер. Мат. анализ, 1975, вып. 13, с. 85—103.
2. *Grothendieck A.* Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires.— Mem. Amer. Math. Soc., 1955, N 16.
3. *Heinrich S.* Ultraproducts in Banach space theory.— J. reine und angew. Math., 1980, **313**, S. 702—734.
4. *Figiel T.* Factorisation of compact operators and applications to the approximation problem.— Stud. Math., 1973, **45**, p. 191—210.
5. *Johnson W. B.* Banach spaces all of whose subspaces have the approximation property.— Spec. Topics Appl. Math., 1980, N 1, p. 16—26.

ВНИИкондиционер, Харьков

Получено 27.03.84,
после доработки — 19.03.85