УДК 512.99

И. П. Мельниченко

Бигармонические базисы в алгебрах второго ранга

Если в коммутативной и ассоциативной ненильпотентной алгебре второго ранга над действительным полем R или над комплексным полем C найдутся два линейно независимых элемента e_1 и e_2, для которых выполняются условия

$$(e_1^2 + e_2^2)^2 = 0, \tag{1}$$

$$e_1^2 + e_2^2 \neq 0, \tag{2}$$

то будем называть базис $\{e_1, e_2\}$ бигармоническим. Алгебру, содержащую такие элементы, назовем бигармонической и обозначим буквой B.

Для алгебр второго ранга над C в работах [1, 2] показано, что если базис $\{e_1, e_2\}$ является бигармоническим, то дифференцируемые функции вида

$$f(\zeta) = \sum_{n=1}^{2} [u_n(x, y) + iv_n(x, y)]\, e_n, \quad \zeta = xe_1 + ye_2,$$

где i — мнимая единица, а x, y, u_n, $v_n \in R$, имеют компоненты, удовлетворяющие бигармоническому уравнению. Все указанные дифференцируемые функции $f(\zeta)$ при этом составляют алгебру.

В этих же работах показано, что вид компонент u_n, v_n, $n = 1, 2$, дифференцируемых функций $f(\zeta)$ зависит от структуры таблицы умножения для бигармонического базиса — построены $f(\zeta)$, компоненты которых задают как решения бигармонического уравнения для односторонне ориентированных областей [1], так и решения типа Гурса [2].

Выясним, какие алгебры второго ранга являются бигармоническими и какие в них есть бигармонические базисы?

Согласно условиям (1) и (2) алгебра B должна содержать нетривиальный радикал, а так как B по определению не является нильпотентной, то этот радикал не совпадает со всей алгеброй. Выделим элемент $e_1^2 + e_2^2$, принадлежащий согласно (1), (2) радикалу, и будем рассматривать его как базисный элемент алгебры. Так как всякая ненильпотентная алгебра содержит идемпотент (см., например, [3, с. 27]), то можно выделить в качестве второго базисного элемента алгебры некоторый идемпотент.

Пусть задана ассоциативная и коммутативная алгебра над R или C с базисом $\{\mathcal{I}, \Omega\}$, удовлетворяющим условиям $\mathcal{I}^2 = \mathcal{I}$, $\Omega^2 = 0$. Тогда

$$\mathcal{I}\Omega = \Omega\mathcal{I} = k\Omega, \quad k \in C, \tag{3}$$

так как произведение любого элемента радикала на произвольный элемент алгебры есть снова элемент радикала.

Единственное нетривиальное условие ассоциативности умножения элементов $\mathcal{I}$ и Ω будет $(\Omega\mathcal{I})\mathcal{I} = \Omega(\mathcal{I}\mathcal{I})$, и тогда с учетом соотношения (3) получим $k^2\Omega = k\Omega$, или $k^2 - k = 0$, что приводит к двум возможностям: $k = 1$, $k = 0$. При $k = 1$ идемпотент $\mathcal{I}$ является главной единицей алгебры, для которой введем обозначение $\mathcal{I} = E$. В случае $k = 0$ $\mathcal{I}$ — собственный идемпотент, обозначим его через $\mathcal{I}_0$.

Рассмотрим первый случай. Тогда таблица умножения имеет вид

$$E^2 = E, \quad \Omega^2 = 0, \quad E\Omega = \Omega. \tag{4}$$

Предположим, что эта алгебра содержит бигармонический базис $\{e_1, e_2\}$ с разложением

$$e_1 = \alpha_1 E + \alpha_2 \Omega, \quad e_2 = \beta_1 E + \beta_2 \Omega, \tag{5}$$

$$e_1^2 + e_2^2 = \Omega. \tag{6}$$

Тогда числа α_i, β_i, $i = 1, 2$, должны удовлетворять условию

$$\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 \neq 0. \tag{7}$$

Определим, какие еще соотношения вытекают из условия бигармоничности базиса $\{e_1, e_2\}$.

Пользуясь таблицей (4), имеем

$$e_1^2 = \alpha_1^2 E + 2\alpha_1\alpha_2\Omega, \quad e_2^2 = \beta_1^2 E + 2\beta_1\beta_2\Omega,$$

откуда

$$e_1^2 + e_2^2 = (\alpha_1^2 + \beta_1^2) E + 2(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)\Omega.$$

Сравнивая последнее равенство с (6), получаем

$$\alpha_1^2 + \beta_1^2 = 0, \quad \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 = 1/2. \tag{8}$$

Итак, в рассматриваемом случае коэффициенты разложений (5) удовлетворяют условиям (7) и (8). Первое равенство системы (8) имеет либо комплексные решения, либо $\alpha_1 = \beta_1 = 0$. Последнее решение противоречит условию (7), откуда вытекает, что данная бигармоническая алгебра должна быть задана над полем C.

Легко видеть, что любые числа α_1, β_1, α_2, $\beta_2 \in C$, удовлетворяющие условиям (7) и (8), порождают бигармонический базис, удовлетворяющий условиям (5) и (6).

Построим теперь таблицу умножения для таких бигармонических базисов. Так как параметры α_i, β_i, $i = 1, 2$, связаны двумя равенствами (8), то два из них можно исключить.

Из первого уравнения системы (8) имеем $\beta_1 = \pm i\alpha_1$. Подставляя β_1 во второе уравнение, находим $\beta_2 = \pm i(\alpha_2 - 1/(2\alpha_1))$, и система (5) принимает вид

$$e_1 = \alpha_1 E + \alpha_2 \Omega, \quad e_2 = \pm i\left[\alpha_1 E + \left(\alpha_2 - \frac{1}{2\alpha_1}\right)\Omega\right]. \tag{9}$$

При любых комплексных α_1 и α_2, кроме $\alpha_1 = 0$, разложения (9) задают бигармонический базис.

Из системы (9) имеем

$$\Omega = 2\alpha_1(e_1 \pm ie_2), \quad E = 2\left(\frac{1}{2\alpha_1} - \alpha_2\right)e_1 \mp 2i\alpha_2 e_2.$$

Производя теперь умножение элементов бигармонического базиса $\{e_1, e_2\}$, с учетом найденных разложений для E и Ω получаем

$$\begin{gathered} e_1^2 = (\alpha_1 + 2\alpha_1^2\alpha_2)\, e_1 \pm 2\alpha_1^2\alpha_2 ie_2, \\ e_2^2 = (\alpha_1 - 2\alpha_1^2\alpha_2)\, e_1 \pm 2(\alpha_1 - \alpha_1^2\alpha_2)\, ie_2, \\ e_1e_2 = \pm 2\alpha_1^2\alpha_2 ie_1 + (\alpha_1 - 2\alpha_1^2\alpha_2)\, e_2, \end{gathered} \tag{10}$$

где числа α_1, $\alpha_2 \in C$ могут быть выбраны произвольно (кроме $\alpha_1 = 0$), а в выражениях с двойным знаком следует брать всюду одновременно верхний или нижний.

Например, при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$ и верхнем знаке получаем таблицу умножения, приведенную в работе [1], а выбирая $\alpha_1 = 2i$, $\alpha_2 = -i/8$ и нижний знак, находим таблицу умножения, приведенную в работе [2]. Следовательно, построенные в работах [1, 2] базисы — бигармонические, выделенные в одной и той же алгебре.

Во втором случае ($k = 0$, $\mathcal{I} = \mathcal{I}_0$) таблица умножения алгебры имеет вид $\mathcal{I}_0^2 = \mathcal{I}_0$, $\Omega^2 = 0$, $\mathcal{I}_0\Omega = \Omega\mathcal{I}_0 = 0$. Предположим, что в этой алгебре существует бигармонический базис $\{e_1, e_2\}$ с разложением $e_1 = \tau_1\mathcal{I}_0 + \tau_2\Omega$, $e_2 = \eta_1\mathcal{I}_0 + \eta_2\Omega$, удовлетворяющий условию (6). Тогда $\tau_1\eta_2 - \tau_2\eta_1 \neq 0$ и $e_1^2 + e_2^2 = (\tau_1^2 + \eta_1^2)\,\mathcal{I}_0$. Сравнивая последнее равенство с (6), получаем $\tau_1^2 + \eta_1^2 = 0$, а значит, $e_1^2 + e_2^2 = 0$, что противоречит условию (2). Следовательно, в этой алгебре бигармонических базисов нет.

Таким образом, над R бигармонической алгебры второго ранга не существует, а над C такая алгебра существует, единственна и имеет главную единицу. В этой алгебре существует двупараметрическое семейство бигармонических базисов, определяемых таблицей умножения (10).

1. *Ковалев В. Ф., Мельниченко И. П.* Бигармонические функции на бигармонической плоскости.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1981, № 8, с. 25—27.
2. *Ковалев В. Ф., Мельниченко И. П.* Бигармонические алгебры и геометрия области краевой задачи.— Там же, 1983, № 11, с. 17—19.
3. *Чеботарев Н. Г.* Введение в теорию алгебр.— М. ; Л. : Гостехтеоретиздат, 1949.— 88 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 14.12.84