УДК 517.947.5.37

Б. И. Кнюх

Об одной задаче для дифференциального уравнения Штурма — Лиувилля с операторным коэффициентом

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$ и нормой $\|\cdot\|$, A — самосопряженный положительно определенный оператор в H ($A \geqslant \mu E$, $\mu > 0$, E — тождественный оператор). На области определения $D(A^\alpha)$ оператора A^α, $\alpha \geqslant 0$, введем скалярное произведение $(f, g)_\alpha = (A^\alpha f, A^\alpha g)$. При этом $D(A^\alpha)$ преврат тся в гильбертово пространство, которое мы обозначим H_α. Через $C(H_\alpha, [0, b])$ будем обозначать пространство всех непрерывных на $[0, b]$, $0 < b < \infty$, вектор-функций со значениями в H_α.

Известно (см. [1, 2]), что если $f(t) \in C(H_1, [0, \tau])$, $0 < \tau < \infty$, то для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in H_1$ задача

$$-y''(t) + A^2 y(t) = f(t), \tag{1}$$

$$y(0) = \varphi_1, \quad y(\tau) = \varphi_2 \tag{2}$$

имеет на промежутке $[0, \tau]$ единственное ослабленное решение $y(t) = y(t; \tau)$ и у производной $y'(t)$ существует граничное значение $y'(0) \in H$.

Рассмотрим следующую задачу. Пусть $0 < v$ — заданное число, φ_1, φ_2 — некоторые элементы из H_1, $f(t) \in C(H_1, [0, b])$. Требуется найти $\tau \in (0, b]$, чтобы для ослабленного решения $y(t)$ задачи (1), (2) выполнялось условие

$$\|y'(0)\| = v. \tag{3}$$

Пару $\{y(t), \tau\}$ будем называть ослабленным решением задачи (1)—(3).

Для уравнений в частных производных второго порядка эллиптического типа аналогичная задача рассмотрена в работах [3, 4].

Докажем теорему существования и единственности ослабленного решения задачи (1)—(3).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

а) $0 < \Delta = \|\varphi_1 - \varphi_2\| < vb$;

б) $0 < \rho = \|A\varphi_1\| + \|A\varphi_2\| + \int_0^{l} \|f(s)\|\, ds < \min(v - \Delta/b, v/2)$. *Тогда задача* (1) — (3) *имеет хотя бы одно ослабленное решение* $\{y(t), \tau\}$, *где* $\tau \in [\alpha, \beta] \subset (0, b]$, $\alpha = \Delta(v - 2\rho)[v(v-\rho)]^{-1}$, $\beta = \Delta(v-\rho)^{-1}$.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда для всех $\tau \in (0, b]$ функция

$$y(t; \tau) = \operatorname{sh} A(\tau - t)(\operatorname{sh} A\tau)^{-1}\varphi_1 + \operatorname{sh} At(\operatorname{sh} A\tau)^{-1}\varphi_2 + \int_0^\tau G(t, s, A; \tau) f(s)\, ds,$$

где

$$G(t, s, A; \tau) = \begin{cases} \operatorname{sh} A(\tau - t)\operatorname{sh} As(A\operatorname{sh} A\tau)^{-1}, & 0 \leqslant s \leqslant t; \\ \operatorname{sh} At\operatorname{sh} A(\tau - s)(A\operatorname{sh} A\tau)^{-1}, & t \leqslant s \leqslant \tau, \end{cases}$$

является ослабленным решением уравнения (1) на $[0, \tau]$ и удовлетворяет граничным условиям (2) (см. [1, 2]). Покажем, что существует $\tau \in [\alpha, \beta]$ такое, что $y(t, \tau)$ удовлетворяет граничному условию (3), которое с учетом строгой положительности τ и v представим в эквивалентной форме

$$P(\tau) = 1/v\,\|\tau y'(0; \tau)\| = \tau. \tag{3'}$$

Нетрудно проверить, что

$$P(\tau) = \frac{1}{v}\Big\| - A\tau\operatorname{ch} A\tau(\operatorname{sh} A\tau)^{-1}\varphi_1 + A\tau(\operatorname{sh} A\tau)^{-1}\varphi_1 +$$

$$+ A\tau(\operatorname{sh} A\tau)^{-1}(\varphi_2 - \varphi_1) + \tau\int_0^\tau \operatorname{sh} A(\tau - s)(\operatorname{sh} A\tau)^{-1} f(s)\, ds\Big\|.$$

Покажем, что $P(\tau)$ отображает отрезок $[\alpha, \beta]$ в себя и это отображение непрерывно. Отсюда и следует разрешимость на $[\alpha, \beta]$ уравнения (3′) относительно τ, а вместе с этим существование $\tau \in [\alpha, \beta]$ такого, что пара $\{y(t; \tau), \tau\}$ является ослабленным решением задачи (1)—(3). Воспользовавшись неравенством треугольника и легко проверяемыми оценками

$$\| - A\tau \operatorname{ch} A\tau (\operatorname{sh} A\tau)^{-1} \varphi_1 + A\tau (\operatorname{sh} A\tau)^{-1} \varphi_1 \| \leqslant \tau \| A\varphi_1 \|,$$

$$\| A\tau (\operatorname{sh} A\tau)^{-1} (\varphi_2 - \varphi_1) \| \leqslant \| \varphi_2 - \varphi_1 \|,$$

$$\left\| \int_0^\tau \operatorname{sh} A (\tau - s) (\operatorname{sh} A\tau)^{-1} f(s)\, ds \right\| \leqslant \int_0^b \| f(s) \| ds,$$

получим $\frac{1}{v}(\Delta - \tau\rho) \leqslant P(\tau) \leqslant \frac{1}{v}(\Delta + \tau\rho)$. Предположив, что $\tau \in [\alpha, \beta]$, и учитывая условия а) и б), найдем $0 < \alpha \leqslant P(\tau) \leqslant \beta \leqslant b$. Непрерывность $P(\tau)$ следует из непрерывности вектор-функций

$$A\tau \operatorname{ch} A\tau (\operatorname{sh} A\tau)^{-1} \varphi_1\ A\tau (\operatorname{sh} A\tau)^{-1} \varphi_2 \int_0^\tau \operatorname{sh} A (\tau - s) (\operatorname{sh} A\tau)^{-1} f(s)\, ds.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и, кроме того, выполняется условие*

$$v > \| A\varphi_1 \| + \| A\varphi_2 \| + 2 \int_0^b \| f(s) \| ds + b \max_{0 \leqslant s \leqslant b} \| f(s) \|.$$

Тогда ослабленное решение задачи (1)—(3) *с* $\tau \in [\alpha, \beta]$ *единственно.*

Доказательство. Отметим, что существующее при условиях теоремы ослабленное решение задачи (1),(2) единственно и определяется формулой (4). Докажем единственность решения уравнения (3′) на отрезке $[\alpha, \beta]$. Для этого достаточно показать, что отображение $P(\tau)$ отрезка $[\alpha, \beta]$ в себя сжимающее, т. е. $| P(\tau'') - P(\tau') | \leqslant q |\tau'' - \tau'|$, где $\tau', \tau'' \in [\alpha, \beta]$, $0 < q < 1$. Имеем

$$|P(\tau'') - P(\tau')| \leqslant \frac{1}{v} \| \tau'' y'(0; \tau'') - \tau' y'(0; \tau') \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{v} \| A\tau'' \operatorname{ch} A\tau'' (\operatorname{sh} A\tau'')^{-1} \varphi_1 - A\tau' \operatorname{ch} A\tau' (\operatorname{sh} A\tau')^{-1} \varphi_1 \| +$$

$$+ \frac{1}{v} \| A\tau'' (\operatorname{sh} A\tau'')^{-1} \varphi_2 - A\tau' (\operatorname{sh} A\tau')^{-1} \varphi_2 \| +$$

$$+ \frac{1}{v} \left\| \tau'' \int_0^{\tau''} \operatorname{sh} A (\tau'' - s) (\operatorname{sh} A\tau'')^{-1} f(s)\, ds - \right.$$

$$\left. - \tau' \int_0^{\tau'} \operatorname{sh} A (\tau' - s) (\operatorname{sh} A\tau')^{-1} f(s)\, ds \right\|.$$

Нетрудно убедиться, что справедливы оценки

$$\| A\tau'' \operatorname{ch} A\tau'' (\operatorname{sh} A\tau'')^{-1} \varphi_1 - A\tau' \operatorname{ch} A\tau' (\operatorname{sh} A\tau')^{-1} \varphi_1 \| \leqslant \| A\varphi_1 \| \, | \tau'' - \tau' |,$$

$$\| A\tau'' (\operatorname{sh} A\tau'')^{-1} \varphi_2 - A\tau' (\operatorname{sh} A\tau')^{-1} \varphi_2 \| \leqslant \| A\varphi_2 \| \, | \tau'' - \tau' |,$$

$$\left\| \tau'' \int_0^{\tau''} \operatorname{sh} A (\tau'' - s) (\operatorname{sh} A\tau'')^{-1} f(s)\, ds - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\tau'} \operatorname{sh} A (\tau' - s) (\operatorname{sh} A\tau')^{-1} f(s)\, ds \right\| \leqslant \left(2 \int_0^b \| f(s) \| ds + b \max_{0 \leqslant s \leqslant b} \| f(s) \| \right) | \tau'' - \tau' |,$$

с учетом которых будем иметь

$$|P(\tau'') - P(\tau')| \leqslant \frac{1}{v}\Big[\|A\varphi_1\| + \|A\varphi_2\| + 2\int_0^b \|f(s)\|\,ds +$$
$$+ b \max_{0\leqslant s\leqslant b}\|f(s)\|\,|\tau'' - \tau'|\Big].$$

Положив $q = \frac{1}{v}\Big[\|A\varphi_1\| + \|A\varphi_2\| + 2\int_0^b \|f(s)\|\,ds + b\max_{0\leqslant s\leqslant b}\|f(s)\|\Big] < 1$, получим требуемую оценку. Теорема доказана.

Пример. Пусть в ограниченной области $G \subset \mathbb{R}^m$ с достаточно гладкой границей Γ задано самосопряженное эллиптическое выражение $l(u) = -\sum_{i,k=1}^{m} \partial/\partial x_i\,(a_{ik}(x)\,\partial u/\partial x_k) + c(x)\,u$ $\Big(a_{ik}(x) = a_{ki}(x),\ \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(x)\,\xi_i\bar{\xi}_k \geqslant \alpha\sum_{i=1}^{m}|\xi_i|^2,\ \alpha = \mathrm{const} > 0\ \forall\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m \in \mathbb{C},\ c(x) \geqslant 0\Big)$ с достаточно гладкими коэффициентами (например, $a_{ik}(x) \in C^3(G \cup \Gamma)$, $c(x) \in C^1(G \cup \Gamma)$). Через $\partial/\partial\mu$ обозначим дифференцирование по направлению конормали в точке границы $\Gamma: \partial/\partial\mu = \sum_{i,k=1}^{m} a_{ik}(x)\cos(\nu, x_k)\,\partial/\partial x_i$, где ν — единичный вектор внешней нормали к поверхности Γ, и введем граничные условия:

(D) $u|_\Gamma = 0$,

(σ) $\partial u/\partial\mu + \sigma(s)\,u|_\Gamma = 0$ $(\sigma(s) \geqslant 0$ — некоторая достаточно гладкая функция на Γ).

В пространстве $L_2(G)$ рассмотрим операторы L'_D, L'_σ, порожденные выражением $l(u)$ на дважды непрерывно дифференцируемых в $G \cup \Gamma$ функциях, удовлетворяющих соответственно условиям (D), (σ). При этом в случае оператора L'_σ предполагаем, что или $c(x) \not\equiv 0$ в $G \cup \Gamma$, или $\sigma(s) \not\equiv 0$ на Γ. L'_D, L'_σ — положительно определенные эрмитовы операторы, их замыкания $L_D = \overline{L'_D}$, $L_\sigma = \overline{L'_\sigma}$ — положительно определенные самосопряженные операторы в $L_2(G)$ [5], областями определения которых являются подмножества функций соболевского пространства $W_2^2(G)$, удовлетворяющие в некотором смысле (см. [5, с. 84—87]) граничным условиям (D), (σ) соответственно. Из [5—7] легко заключить, что областями определения операторов $\sqrt{L_D}$ и $\sqrt{L_\sigma}$ являются соболевские пространства $\overset{0}{W}{}_2^1(G)$ и $W_2^1(G)$. Если теперь принять в качестве A^2 один из операторов L_D или L_σ, то рассмотренная выше задача формулируется следующим образом: пусть $0 < v$ — заданное число, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ — некоторые функции из $D(\sqrt{A^2})$, $f(t, x)$ — функция из $C(D(\sqrt{A^2}), [0, b])$. Требуется найти $\tau \in (0, b]$ такое, чтобы существовала функция $u(t, x) \in D(A^2)$ при всех $t \in (0, \tau)$, непрерывно дифференцируемая по t в $L_2(G)$ на $[0, \tau]$, дважды непрерывно дифференцируемая по t в $L_2(G)$ на $(0, \tau)$, которая удовлетворяет уравнению $-\partial^2u/\partial t^2 + l(u) = f$, $(t, x) \in (0, \tau) \times G$ и граничным условиям $u(0, x) = \varphi_1(x)$, $u(\tau, x) = \varphi_2(x)$, $\|\partial u(0, x)/\partial t\|_{L_2(G)} = v$, $u|_{[0,\tau]\times\Gamma} = 0$ (соответственно $\partial u/\partial\mu + \sigma(s)\,u|_{[0,\tau]\times\Gamma} = 0$).

Существование и единственность такой пары $\{u(t, x), \tau\}$ $(\tau \in [\alpha, \beta]$, α, β определяются теоремой 1) будут обеспечены, если потребовать, чтобы выполнялись условия а)—в) теорем 1 и 2.

Отметим, что в случае $A^2 = L_D$ вопросы существования и единственности классического решения аналогичной задачи рассмотрены в [3, 4].

1. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве.— М. : Наука, 1967.— 464 с.
2. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* О задаче Дирихле для операторного уравнения Штурма—Лиувилля.— Мат. заметки, 1978, **24**, № 6, с. 801—807.
3. *Шамилов А. Х.* Об одной задаче для дифференциальных уравнений в частных производных.— Докл. АН АзССР, 1980, **36**, № 12, с. 9—13.
4. *Шамилов А. Х.* О разрешимости одной задачи для эллиптического уравнения.— Дифференц. уравнения, 1982, **18**, № 6, с. 1061—1071.
5. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 800 с.
6. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала.— М.; Л. : Физматгиз, 1952.— 216 с.
7. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных.— М. : Наука, 1976.— 392 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 23.03.84,
после доработки — 10.06.85