УДК 517.97

А. И. Владимирова

Метод возмущений линейных операторов в минимаксном оценивании состояний динамических систем

В настоящей статье решена задача минимаксного оценивания состояний динамических систем.

Пусть задана система уравнений

$$\frac{d\vec{x}(t)}{dt} = A(t)\vec{x}(t) + \vec{\xi}_1(t), \quad \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \tag{1}$$

где $A(t)$ — квадратная матрица n-го порядка, элементами которой являются кусочно-непрерывные функции, $x(t)$ — вектор состояния системы размерности n, $\vec{\xi}_1(t)$ — вектор помех размерности n, вектор $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ задан.

Предположим, что задан вектор наблюдений $\vec{y}(t)$ размерности m, связанный с вектором $\vec{x}$ следующим соотношением:

$$\vec{y}(t) = C(t)\vec{x}(t) + \vec{\xi}_2(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{2}$$

где $C(t)$ — матрица размерности $m \times n$, элементами которой являются кусочно-непрерывные функции, $T > 0$ — некоторое постоянное число, $\vec{\xi}_2(t)$ — вектор помех размерности m. Будем считать, что компоненты векторов $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ являются кусочно-непрерывными функциями.

Предположим, что векторы $\vec{\xi}_1(t)$ и $\vec{\xi}_2(t)$ принадлежат области G: $G = \left\{\vec{\xi}_1(\cdot), \vec{\xi}_2(\cdot) : \int\limits_0^T \{\|\vec{\xi}_1(z)\|^2 + \|\xi_2(z)\|^2\}\, dz \leqslant 1\right.$, где $\|\vec{x}\|^2 = (\vec{x}, \vec{x})$.

Пусть R — множество матриц $K(t)$ размерности $m \times n$ и векторов $\vec{l}(T)$ размерности n, причем элементы матрицы $K(t)$ принадлежат пространству $L_2[0, T]$, $\|\vec{l}\| < \infty$.

Задача оценивания состояния $\vec{x}(t)$ заключается в нахождении матрицы $K_0(t)$ и вектора $l_0(T)$, которые удовлетворяют уравнению

$$\left\|\vec{x}(T) - \int\limits_0^T K_0(u)\vec{y}(u)\,du - \vec{l}_0(T)\right\|^2 =$$

$$= \min_{(K(\cdot),\vec{l}(T))\in R}\ \max_{\vec{\xi}_1(t),\, \vec{\xi}_2(t)\in G} \left\|\vec{x}(t) - \int\limits_0^T K(u)\vec{y}(u)\,du - \vec{l}(T)\right\|^2. \tag{3}$$

Выражение $\hat{\vec{x}}(T) = \int\limits_0^T K_0(u)\vec{y}(u)\,du - \vec{l}_0(T)$ называется минимаксной оценкой состояния $\vec{x}(t)$.

Теорема. *При сформулированных выше предположениях решения $K(t)$, $\vec{l}(T)$ уравнения (3) являются решениями системы уравнений*

$$[K'(u) - C(u)S(u)]\,\vec{l}_1\vec{l}_1' = 0, \quad 0 \leqslant u \leqslant T, \tag{4}$$

где $\vec{l}_1$ — *собственный вектор, соответствующий собственному числу* λ_1 *матрицы*

$$\int_0^T [Z(u) Z'(u) + K(u) K'(u)]\, du,$$

матрица $S(u)$ *удовлетворяет уравнению*

$$dS(t)/dt = A(t) S(t) - Z'(t), \quad S(0) = 0, \quad 0 \leqslant u \leqslant T, \quad \vec{l}_0(T) = Z(0)\vec{x}_0, \tag{5}$$

где матрица $Z(u)$ *удовлетворяет уравнению*

$$dZ(t)/dt = -Z(t) A(t) + K_0(t) C(t), \quad Z(t) = I, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \tag{6}$$

Одно из решений уравнения (4) *имеет вид*

$$K_0(u) = S'(u) C'(u), \quad 0 \leqslant u \leqslant T. \tag{7}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$\left\| \vec{x}(t) - \int_0^T K(u)\vec{y}(u)\, du - \vec{l}(T) \right\| = \left\| \vec{x}(t) - \int_0^T K(u) C(u)\vec{x}(u)\, du - \right.$$

$$\left. - \int_0^T K(u)\vec{\xi}_2(u)\, du - \vec{l}(T) \right\|. \tag{8}$$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $dZ(u)/du = -Z(u) \times A(u) + K(u) C(u)$, $Z(T) = I$, $0 \leqslant u \leqslant T$. Тогда

$$\vec{x}(t) = Z(t)\vec{x}(t) = \int_0^T d(Z(t) x(t))\, dt + Z(0) x_0 = \int_0^T K(t) C(t)\vec{x}(t)\, dt +$$

$$+ \int_0^T Z(t)\vec{\xi}_1(t)\, dt + Z(0) x_0.$$

Используя это равенство, а также (8), имеем

$$\left\| \vec{x}(T) - \int_0^T K(t)\vec{y}(t)\, dt - \vec{l}(t) \right\|^2 = \left\| Z(0)\vec{x}_0 - \vec{l}(t) + \right.$$

$$\left. + \int_0^T (Z(t)\vec{\xi}_1(t) - K(t)\vec{\xi}_2(t))\, dt \right\|^2.$$

Используя формулу Рэлея, как и в работе [3], находим

$$\min_{K,\vec{l}} \max_{\vec{\xi}_1, \vec{\xi}_2 \in G} \left\| \vec{x}(T) - \int_0^T K(u)\vec{y}(u)\, du - \vec{l}(T) \right\|^2 =$$

$$= \min_{K \in R} \lambda_1 \left(\int_0^T (Z'(t) Z(t) + K'(t) K(t))\, dt \right),$$

где λ_1 — максимальное собственное число матрицы

$$\int_0^T (Z'(u) Z(u) + K'(u) K(u))\, du.$$

Используя формулы возмущений (см. [2]), получаем, что искомая матрица K удовлетворяет уравнению

$$\left(\int_0^T (\tilde{Z}Z' + \theta K')\, du\vec{l}_1, \vec{l}_1 \right) = 0,$$

где матрица $\tilde{Z}$ удовлетворяет уравнению $d\tilde{Z}/du = -\tilde{Z}(u)A(u) + \theta C$, $\tilde{Z}(T) = 0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $\vec{l}_1$ — собственный вектор, соответствующий максимальному собственному числу матрицы $\int\limits_0^T (Z'Z + K'K)\,du$, и θ — произвольная матрица размерности $n \times n$.

Введем вспомогательную систему уравнений $\frac{d}{du} S = AS - Z'$, $S(0) = 0$, $0 \leqslant u \leqslant T$. Тогда

$$\int\limits_0^T (\tilde{Z}(u) Z'(u) + \theta(u) K'(u))\,du = \int\limits_0^T (\theta(u) K'(u) + \theta C(u) S(u))\,du.$$

Таким образом, для матрицы $K(u)$ получаем уравнение

$$\left(\int\limits_0^T \theta (K'(u) + C(u) S(u))\,du l_1,\ l_1 \right) = 0.$$

Из этого уравнения в силу произвольности матрицы θ вытекает утверждение теоремы. Теорема доказана.

Легко показать, что уравнение (4) в общем случае имеет неединственное решение.

Как и в методе наименьших квадратов, уравнение (4) можно приближенно заменить регуляризованным уравнением, решение которого единственно. Для этого вместо уравнения (3) рассмотрим следующее регуляризованное уравнение:

$$\min_{K(\cdot),\ \vec{l}(T))\in R}\ \max_{\vec{\xi}_1(\cdot),\ \vec{\xi}_2(\cdot)\in G} \left\{ \left\| \vec{x}(t) - \int\limits_0^T K(u)\vec{y}(u)\,du - \vec{l}(T) \right\|^2 + \alpha\,\mathrm{Sp} \int\limits_0^T K(u) K'(u)\,du = \right.$$

$$\left. = \left\{ \left\| \vec{x}(T) - \int\limits_0^T K_0(u)\vec{y}(u)\,du - \vec{l}_0(T) \right\|^2 + \alpha\,\mathrm{Sp} \int\limits_0^T K_0(u) K_0'(u)\,du \right\}, \right.$$

где $\alpha > 0$.

Для этого уравнения справедливы все предыдущие рассуждения, и вместо уравнения (4) получаем следующее:

$$[K'(u) - C(u) S(u)]\vec{l}_1,\ \vec{l}_1 + \alpha K(u) = 0, \quad 0 \leqslant u \leqslant T. \tag{9}$$

Очевидно, что решение этого уравнения единственно при $\alpha > 0$, однако для него весьма трудно найти какое-нибудь простое решение, такое, как решение (7).

1. *Кириченко М. Ф.* Аналітичне конструювання мінімаксних регуляторів в лінійних системах.— Доп. АН УРСР. Сер. А, 1977, № 7, с. 591—594.
2. *Функциональный* анализ / Под общ. ред. С. Г. Крейна.— М. : Наука, 1972.— 544 с.
3. *Наконечный А. Г.*, *Владимирова А. И.* Метод возмущений в задачах минимаксного оценивания.— Киев, 1982.— 18 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т кибернетики; 82-53).

Киев. ун-т

Получено 14.12.83,
после доработки — 13.05.85