УДК 517.53

Е. В. Глейзер

О росте целых функций с нулями на системе лучей

Обозначим через $D = D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ систему лучей $\bigcup\limits_{\mu=1}^{m} \{z : z = re^{i\alpha_\mu}, 0 \leqslant r < \infty\}$. Пусть $D_l = D(l\alpha_1, \ldots, l\alpha_m)$, $l \in \mathbb{N}$. Через $G(D_l)$ обозначим внутренность выпуклой оболочки множества $\{e^{il\alpha_1}, \ldots, e^{il\alpha_m}\}$. Пусть $V(D) = \{l \in \mathbb{N} : 0 \notin G(D_l)\}$, $v(D) = \{l \in \mathbb{N} : 0 \notin \overline{G(D_l)}\}$ (ясно, что $v(D) \subset V(D)$). Например, если $m = 1$, то $v(D) = V(D) = \mathbb{N}$, а если $m = 2$, то $V(D) = \mathbb{N}$ и при любом $n \in \mathbb{N}$ одно из чисел $n, n+1$ принадлежит $v(D)$. Из теоремы Г. Вейля [1, с. 123] следует (см., например, [2]), что при любом m множество $v(D)$ бесконечно.

Обозначим через $\rho[f]$ и $\lambda[f]$ соответственно порядок и нижний порядок функции f. Из теоремы А. А. Гольдберга о мероморфных функциях с разделенными нулями и полюсами [3, 4, гл. VI] непосредственно следует такая теорема.

Теорема А. *Пусть нули целой функции f лежат на системе лучей D. Если $l \in v(D)$, то не может выполняться неравенство $\lambda[f] < l < \rho[f]$.*

Н. Штейнмец [5] высказал гипотезу, что при любом $m \in \mathbb{N}$ для целой функции f с нулями на $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$

$$\rho[f] \leqslant E(\lambda[f]) + m, \tag{1}$$

где $E(x)$ — целая часть от x.

В случае $m = 1$ и $m = 2$ соотношение (1) сразу вытекает из теоремы A. При $m = 1$ это следствие было сформулировано в [3], хотя Н. Штейнмец в этом случае ссылается на статью [6], а при $m = 2$ дает новое доказательство.

В настоящей работе показано, что гипотеза Н. Штейнмеца неверна, а именно доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Для всякого $s \in \mathbb{N}$ существуют $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in [0, 2\pi]$ и целая функция f с нулями на $D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, для которой $\rho[f] - \lambda[f] > s$.*

В противоположном направлении будет доказана такая теорема.

Теорема 2. *Пусть f — целая функция с нулями на $D(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. Тогда*

$$E(\rho[f]) \leqslant 3(E(\lambda[f]) + 1). \tag{2}$$

Оценка (2) *является точной.*

Доказательство теоремы 1 основывается на следующем, более общем результате, являющемся в определенном смысле обращением теоремы А.

Теорема 3. *Пусть имеется система лучей D и натуральные числа $q, q', q \leqslant q'$, такие что $\{q, q+1, \ldots, q'\} \cap V(D) = \varnothing$. Тогда существует целая функция f с нулями на D, для которой $\lambda[f] < q \leqslant q' < \rho[f]$.*

Для доказательства теоремы 3 нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть заданы числа $m, q, s \in \mathbb{N}$; $\beta_{\mu l} \in]0, \infty[$, $1 \leqslant \mu \leqslant m$, $0 \leqslant l \leqslant s-1$. Тогда существуют m конечных последовательностей $(x_{\mu j})$, $1 \leqslant j \leqslant n(\mu)$, $1 \leqslant \mu \leqslant m$, таких, что*

$$\sum_{j=1}^{n(\mu)} x_{\mu j}^{q+l} = (\beta_{\mu l}/\beta_{ml}) \sum_{j=1}^{n(m)} x_{mj}^{q+l}, \tag{3}$$

где $0 \leqslant l \leqslant s-1$, $1 \leqslant \mu \leqslant m-1$.

Доказательство. Обозначим $p = 2s+1$. Построим m конечных последовательностей положительных чисел $(t_{\mu j})$, $0 \leqslant j \leqslant 2p-2$, $1 \leqslant \mu \leqslant m$, со следующими свойствами:

$$t_{\mu,2k+1}=0,\quad 0\leqslant k\leqslant p-2,$$

$$\begin{vmatrix} t_{\mu0} & t_{\mu1} & \dots & t_{\mu k}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ t_{\mu k} & t_{\mu,k+1} & \dots & t_{\mu,2k}\end{vmatrix}>0,\quad 0\leqslant k\leqslant p-1, \tag{4}$$

$$t_{\mu,2k}/t_{m,2k}=\beta_{\mu k}/\beta_{mk},\quad 0\leqslant k\leqslant s-1. \tag{5}$$

Построение ведем по индукции: по известным величинам $t_{\mu0},\dots,t_{\mu,2k-2}$ находим $T_{\mu,2k}$ такое, что для всякого $t_{\mu,2k}>T_{\mu,2k}$ будет выполняться (4). Теперь выбираем числа $t_{\mu,2k}$, $1\leqslant\mu\leqslant m$, из интервалов $]T_{\mu,2k},\infty[$, такие, чтобы удовлетворялись равенства (5).

Воспользуемся следующей теоремой ([7, теорема 3]): Для всякой конечной последовательности (t_k), $0\leqslant k\leqslant 2p-2$, удовлетворяющей (4) с t_k вместо $t_{\mu k}$, существуют числа $a_j\in[0,\infty[$; $\xi_j\in\mathbb{R}$, попарно неравные между собой и такие, что $t_k=\sum\limits_{j=1}^{p}a_j\xi_j^k$, $0\leqslant k\leqslant 2p-2$.

Из этой теоремы для всякого μ, $1\leqslant\mu\leqslant m$, следует существование чисел $a_{\mu j}\in]0,\infty[$; $\xi_{\mu j}\in\mathbb{R}$, $1\leqslant j\leqslant p$, таких, что $\xi_{\mu j}\neq\xi_{\mu i}$ при $j\neq i$ и $t_{\mu k}=\sum\limits_{j=1}^{p}a_{\mu j}\xi_{\mu j}^k$, $0\leqslant k\leqslant 2p-2$. Возьмем $y_{\mu j}=\xi_{\mu j}^2$. Тогда

$$t_{\mu,2k}=\sum_{j=1}^{p}a_{\mu j}y_{\mu j}^k,\quad 0\leqslant k\leqslant p-1. \tag{6}$$

Поскольку $p=2s+1$, то для фиксированного μ имеется не менее s различных положительных чисел $y_{\mu j}$. В случае необходимости меняя нумерацию, считаем, что $y_{\mu 1},\dots,y_{\mu s}$ разные. Из (5) и (6) получаем равенства ($1\leqslant\mu\leqslant m-1$, $0\leqslant l\leqslant s-1$)

$$\sum_{j=1}^{p}a_{\mu j}y_{\mu j}^l=(\beta_{\mu l}/\beta_{ml})\sum_{j=1}^{p}a_{mj}y_{mj}^l. \tag{7}$$

Положим $b_{\mu j}=a_{\mu j}/y_{\mu j}^q$. Тогда равенства (7) примут вид

$$\sum_{j=1}^{p}b_{\mu j}y_{\mu j}^{q+l}=(\beta_{\mu l}/\beta_{ml})\sum_{j=1}^{p}b_{mj}y_{mj}^{q+l}. \tag{8}$$

Поскольку равенства (8) однородны относительно $b_{\mu j}$ и $y_{\mu j}$, $1\leqslant\mu\leqslant m$, то можно считать, что $y_{\mu j}\geqslant 1$, $b_{\mu j}\geqslant 2$. Зафиксируем некоторое μ, $1\leqslant\mu\leqslant m-1$. Обозначим

$$z_j^0=y_{\mu j},\quad 1\leqslant j\leqslant s;\qquad z^0=(z_1^0,\dots,z_s^0);$$

$$A_l=\sum_{j=1}^{s}(b_{\mu j}-1)\,y_{\mu j}^{q+l}+\sum_{j=s+1}^{p}b_{\mu j}y_{\mu j}^{q+l}-(\beta_{\mu l}/\beta_{ml})\sum_{j=1}^{p}b_{mj}y_{mj}^{q+l},\quad 0\leqslant l\leqslant s-1.$$

Равенства (8) принимают вид $\sum\limits_{j=1}^{s}(z_j^0)^{q+l}+A_l=0$, $0\leqslant l\leqslant s-1$. Рассмотрим систему s уравнений с s неизвестными z_j:

$$f_l(z;\varepsilon)\equiv\sum_{j=1}^{s}z_j^{q+l}+A_l(\varepsilon)=0,\quad 0\leqslant l\leqslant s-1, \tag{9}$$

где $A_l(\varepsilon)$ — такие числа, что $|f_l(z^0)|<\varepsilon$. Поскольку все z_j^0 разные, то матрица Якоби $W(z)=[\partial f_l/\partial z_j]_{j,l=1}^{s}=[(q+l)\,z_j^{q+l-1}]$ имеет обратную в точке z^0. Обозначим $M=\|W^{-1}(z^0)\|$ (норма $\|[a_{ij}]\|=\max\sum\limits_{j}|a_{ij}|$),

$$C = \max_{l,k} \sum_{j=1}^{s} \left| \frac{\partial^2 f_l(z^0)}{\partial z_j \partial z_k} \right|, \ B(\varepsilon) = \| W^{-1}(z^0) f(z^0; \varepsilon) \|, \text{ где } f = (f_0, \ldots, f_{s-1}).$$

Ясно, что величины M и C не зависят от ε, а $B(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Приблизим числа $b_{\mu j}$, входящие в определение величины A_l, рациональными числами $r_{\mu j}$ так, чтобы для величины $A_l(\varepsilon)$, получающейся из A_l подстановкой чисел $r_{\mu j}$ вместо $b_{\mu j}$, выполнялось условие $|A_l(\varepsilon) - A_l| < \varepsilon$, $0 \leqslant l \leqslant s - 1$, а величина ε была бы настолько мала, что $2sMCB(\varepsilon) < 1$, $B(\varepsilon) < 0{,}5$. Тогда для системы уравнений (9) будут выполнены условия теоремы Л. В. Канторовича [8, с. 460] и, значит, существует решение $z^* = (z_1^*, \ldots, z_s^*) \in \mathbb{R}^s$ этой системы такое, что $\| z_* - z^0 \| < 2B < 1$ и, следовательно, $z_j^* > 0, 1 \leqslant j \leqslant s$. Повторяя эти рассуждения для $\mu = 1 \div m - 1$ (с одними и теми же числами $r_{\mu j}$) и переобозначая каждый раз z_j^* на $z_{\mu j}$, получаем систему равенств ($z_{\mu j} > 0$; $y_{\mu j} > 0$; $r_{\mu j} > 1$; $0 \leqslant l \leqslant s - 1$; $1 \leqslant \mu \leqslant m - 1$)

$$\sum_{j=1}^{s} \{ z_{\mu j}^{q+l} + (r_{\mu j} - 1) y_{\mu j}^{q+l} \} + \sum_{j=s+1}^{p} r_{\mu j} y_{\mu j}^{q+l} = (\beta_{\mu l}/\beta_{ml}) \sum_{j=1}^{p} r_{mj} y_{mj}^{q+l}.$$

Пусть N — общий знаменатель чисел $r_{\mu j}$, $1 \leqslant j \leqslant p$, $1 \leqslant \mu \leqslant m$; $r_{\mu j} = N_{\mu j}/N > 1$. Тогда последнее равенство запишется так:

$$\sum_{j=1}^{s} \{ N z_{\mu j}^{q+l} + (N_{\mu j} - N) y_{\mu j}^{q+l} \} + \sum_{j=s+1}^{p} N_{\mu j} y_{\mu j}^{q+l} = (\beta_{\mu l}/\beta_{ml}) \sum_{j=1}^{p} N_{mj} y_{mj}^{q+l}.$$

Повторив каждое число $z_{\mu j}$ (или $y_{\mu j}$), встречающееся в этом равенстве, столько раз, какой натуральный коэффициент стоит перед ним, получим утверждение леммы 1 с величинами $n(\mu) = \sum_{j=1}^{p} N_{\mu j}$, $1 \leqslant \mu \leqslant m$.

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что в утверждении леммы 1 можно считать, что $0 < x_{\mu j} \leqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant n(\mu)$, $1 \leqslant \mu \leqslant m$.

Докажем т е о р е м у 3. Пусть задана система лучей $D = D(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ и числа $q, q' \in \mathbb{N}$, $s = q' - q + 1$, такие, что для всякого целого l, $0 \leqslant l \leqslant s - 1$, $0 \in G(D_{q+l})$. Значит, для любого l, $0 \leqslant l \leqslant s - 1$, существуют положительные числа $\beta_{1l}, \ldots, \beta_{ml}$, такие, что

$$\sum_{\mu=1}^{m} \exp(-i(q+l)\alpha_\mu) \beta_{\mu l} = 0. \tag{10}$$

Из леммы 1 следует существование m конечных последовательностей $(x_{\mu j})$, $1 \leqslant j \leqslant n(\mu)$, $1 \leqslant \mu \leqslant m$, положительных чисел таких, что $1 \leqslant 1/x_{\mu j} \leqslant \max\limits_{\mu, j} x_{\mu j}^{-1} \equiv B$ и выполняются равенства (3). Обозначим $a_{\mu j}(t) = t/x_{\mu j}$. Тогда $t \leqslant a_{\mu j}(t) \leqslant Bt$ и ($0 \leqslant l \leqslant s - 1$, $1 \leqslant \mu \leqslant m - 1$)

$$\sum_{j=1}^{n(\mu)} a_{\mu j}(t)^{-q-l} = (\beta_{\mu l}/\beta_{ml}) \sum_{j=1}^{n(m)} a_{mj}(t)^{-q-l}. \tag{11}$$

Обозначим $N = \sum_{\mu=1}^{m} n(\mu)$ и будем писать $x \approx y$, если $y - N < x \leqslant y$. Построим рекуррентно две положительные возрастающие последовательности (t_ν) и (N_ν), где N_ν — натуральные числа, кратные N, а также неубывающую последовательность (τ_ν) такую, что $\{\tau_\nu\} \subset \{t_\nu\}$. Зафиксируем произвольно числа $\lambda \in (q-1, q)$; $\rho \in (q', q'+1)$. Возьмем t_0 таким, что $e_2(Bt_0) > Bt_0 > N^{1/\lambda}$, где $e_2(x) = \exp\exp(x)$, и положим $\tau_0 = t_0$. Определим также N_0 так, что $N_0 \approx 2(Bt_0)^\lambda$. Пусть уже определены $t_{\nu-1}$, $N_{\nu-1}$, $\tau_{\nu-1}$.

1. Берем $t_\nu = N_{\nu-1}^{1/\lambda}$.
2. Если $t_\nu \leqslant e_2(Bt_{\nu-1})$, то выбираем $N_\nu \approx 2(Bt_\nu)^\lambda$, $\tau_\nu = \tau_{\nu-1}$.

Если $t_\nu > e_2(Bt_{\nu-1})$, то выбираем $N_\nu \approx 2(Bt_\nu)^\rho$, $\tau_\nu = t_\nu$. Легко проверить, что $Bt_\nu < t_{\nu+1}$ и, значит, интервалы $[t_\nu, Bt_\nu]$ не пересекаются при различных ν. Пусть $M = \{\nu : \tau_\nu = t_\nu\} = \{\nu_n\}$, $\nu_1 < \nu_2 < \dots$. Рассмотрим теперь множества (некоторые точки которых могут повторяться) $Z_\nu = \bigcup_{\mu=1}^{m} \bigcup_{j=1}^{n(\mu)} \{a_{\mu j}(t_\nu)\}$, $\nu = 0, 1, \dots$; а через dZ_ν обозначим некоторую конечную последовательность, в которой каждая точка из Z_ν встречается ровно d раз. Наконец построим последовательность $Z = (a_j)$. которая получается последовательным выписыванием членов из $(N_0/N)Z_0$, $((N_1 - N_0)/N)Z_1$, $((N_2 - N_1)/N)Z_2, \dots$.

Возьмем считающую функцию $n(t) = n(t, Z)$ последовательности Z. Заметим, что $n(t)$ обладает следующими свойствами:

$$n(t_\nu - 0) = N_{\nu-1} = t_\nu^\lambda, \tag{12}$$

$$n(Bt_\nu) = N_\nu \approx \begin{cases} 2(Bt_\nu)^\lambda, & \nu \in \mathbb{N} \setminus M; \\ 2(Bt_\nu)^\rho, & \nu \in M, \end{cases} \tag{13}$$

$$\exp(Bt_{\nu_k}) < \ln t_{\nu_{k+1}}, \tag{14}$$

$$n(t) = n(Bt_\nu), \quad Bt_\nu \leqslant t \leqslant t_{\nu+1}, \tag{15}$$

$$(t/B)^\lambda \leqslant n(t) \leqslant 2(Bt)^\rho, \tag{16}$$

$$\rho[n(t)] = \rho, \quad \lambda[n(t)] = \lambda. \tag{17}$$

Из (17) следует, что род последовательности Z равен q. Построим каноническое произведение Вейерштрасса $f(z)$ рода q' с нулями в точках последовательности Z (с учетом кратности). Приведем известные (см. [3, с. 86]) формулы для коэффициентов Фурье функции f:

$$c_0(r, f) = N(r, 0, f) = \int_{t_0}^{r} \frac{n(t)}{t}\, dt, \tag{18}$$

$$c_k(r, f) = \frac{r^k}{2k} \sum_{|a_j| \leqslant r} a_j^{-k} - \frac{1}{2k} \sum_{|a_j| \leqslant r} \left(\frac{\bar{a}_j}{r}\right)^k, \quad 1 \leqslant k \leqslant q', \tag{19}$$

$$c_k(r, f) = -\frac{r^k}{2k} \sum_{|a_j| > r} a_j^{-k} - \frac{1}{2k} \sum_{|a_j| \leqslant r} \left(\frac{\bar{a}_j}{r}\right)^k, \quad k \geqslant q' + 1. \tag{20}$$

Ясно, что

$$\left| \sum_{|a_j| \leqslant r} \left(\frac{\bar{a}_j}{r}\right)^k \right| \leqslant n(r, 0, f) = n(r; Z) = n(r). \tag{21}$$

Всюду далее будем считать, что

$$r \notin \bigcup_{\nu=0}^{\infty} [t_\nu, Bt_\nu], \quad r \in \bigcup_{n=1}^{\infty} [B^{-1}\exp(Bt_{\nu_n}), B \ln t_{\nu_{n+1}}]. \tag{22}$$

Легко видеть, что в силу (14) множество таких r неограничено. Из определения Z следует равенство $(Bt_p < r < t_{p+1})$

$$\sum_{|a_j| \leqslant r} a_j^{-k} = \sum_{\nu=0}^{p} \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{j=1}^{n(\mu)} a_{\mu j}(t_\nu)^{-k} e^{-ik\alpha_\mu},$$

из которого с помощью (10) и (11) получаем, что при $q \leqslant k \leqslant q'$ $\sum_{|a_j| \leqslant r} a_j^{-k} = 0$. Учитывая (19) и (21), имеем

$$|c_k(r, f)| \leqslant n(r)/2k, \quad q \leqslant k \leqslant q'. \tag{23}$$

Обозначим $\mu_{1n} = \nu_n + 1$, $\mu_{2n} = \nu_{n+1}$. Из (12), (13) и (22) следуют оценки

$$t_{\mu_{1n}} \leqslant 2^{1/\lambda} (Bt_{\nu_n})^{\rho/\lambda} \leqslant 2^{1/\lambda} (\ln (Br))^{\rho/\lambda}, \quad t_{\mu_{2n}} \geqslant \exp (r/B). \tag{24}$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $1 \leqslant k \leqslant q$. Тогда, с учетом (12) — (16) и (22), (24) находим

$$\Big|\sum_{|a_j| \leqslant r} a_j^{-k}\Big| = k\Big(\int_{t_0}^{t_{\mu_{1n}}} + \int_{t_{\mu_{1n}}}^{r}\Big) \frac{n(t)}{t^{k+1}}\, dt + \frac{n(r)}{r^k} \leqslant k\Big(\int_{1}^{t_{\mu_{1n}}} \frac{2(Bt)^\rho}{t^{k+1}}\, dt +$$

$$+ \int_{t_{\mu_{1n}}}^{r} \frac{2(Bt)^\lambda}{t^{k+1}}\, dt\Big) + \frac{2(Br)^\lambda}{r^k} \leqslant 4(k/(k-\rho))\, B^\rho (r^{\lambda-k} + 2^{1/\lambda} (\ln (Br))^{\rho(\rho-k)/\lambda}). \tag{25}$$

2. Пусть $k \geqslant q' + 1$. Тогда

$$\Big|\sum_{|a_j| > r} a_j^{-k}\Big| \leqslant k\Big(\int_{r}^{t_{\mu_{2n}}} + \int_{t_{\mu_{2n}}}^{\infty}\Big) \frac{n(t)}{t^{k+1}}\, dt + \frac{n(r)}{r^k} \leqslant k\Big(\int_{r}^{t_{\mu_{2n}}} \frac{2(Bt)^\lambda}{t^{k+1}}\, dt +$$

$$+ \int_{t_{\mu_{2n}}}^{\infty} \frac{2(Bt)^\rho}{t^{k+1}}\, dt\Big) + \frac{2(Br)^\lambda}{r^k} \leqslant 4(k/(k-\rho))\, B^\rho (r^{\lambda-k} + \exp(-(k-\rho)\, r/B). \tag{26}$$

Из (16), (18) — (23), (25) и (26) выводим, что для достаточно больших r, удовлетворяющих (22), справедлива оценка $|c_k(r, f)| \leqslant Ar^\lambda/k$, где величина A не зависит от r и k. Кроме того $|c_0(r, f)| = N(r, 0, f) =$

$$= \Big(\int_{t_0}^{t_{\mu_{1n}}} + \int_{t_{\mu_{1n}}}^{r}\Big) \frac{n(t)}{t}\, dt \leqslant \int_{t_0}^{t_{\mu_{1n}}} \frac{2(Bt)^\rho}{t}\, dt + \int_{t_{\mu_{1n}}}^{r} \frac{2(Bt)^\lambda}{t}\, dt = O(r^\lambda),\ r \to \infty.$$

Таким образом, при указанных значениях r выполняется

$$T(r, f) \leqslant \Big((2\pi)^{-1} \int_0^{2\pi} \ln^2 |f(re^{i\theta})|\, d\theta\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{k=0}^{\infty} |c_k(r, f)|^2\Big)^{1/2} = O(r^\lambda), \quad r \to \infty,$$

откуда с учетом (17) следует $\lambda[f] = \lambda$. В сочетании с тем фактом, что $\rho[f] = \rho[n(r, 0, f)] = \rho$, это доказывает теорему 3.

З а м е ч а н и е. Несколько усложняя некоторые оценки, можно добиться того, что функция f будет принадлежать классу сходимости порядка $q' + 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Возьмем натуральное число q такое, что $2q - 1 \geqslant s$, и обозначим $q' = 3q - 1 \geqslant q + s$. Рассмотрим систему лучей $D = D(0, \ \pi/2q + \varepsilon/q, -\pi/2q - \varepsilon/q)$, где $0 < \varepsilon < 0{,}5 \times \pi/(3q-1)$. Легко проверить, что $\{q, q+1, \ldots q'\} \cap V(D) = \varnothing$ и по теореме 3 существует целая функция f с нулями на D, для которой $\rho[f] - \lambda[f] > q' - q$. С учетом замечания к доказательству теоремы 3, можно утверждать, что $E(\rho[f]) = 3(E(\lambda[f]) + 1)$. В таком виде построенная функция f свидетельствует о точности теоремы 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2. Не уменьшая общности, примем $f(0) \neq 0$; $\alpha_1 = 0$. Обозначим $q = E(\lambda[f]) + 1$, $x = q\alpha_2$, $y = q\alpha_3$. Рассмотрим систему лучей $D' = D(0, x, y)$. Определим множество $M = \{(x, y) \in [0, 2\pi]^2 : \{1, 2, 3\} \cap v(D') = \varnothing\}$. Ясно, что если $(x, y) \notin M$, то $\{q, 2q, 3q\} \cap v(D') \neq \varnothing$, и по теореме A справедливо утверждение теоремы 2. Обозначим через E_j, $j = 1, 2, 3$, множество, состоящее из двух замкнутых треугольных областей с вершинами $(\pi/j, 0)$, $(2\pi/j, \pi/j)$, $(\pi/j, \pi/j)$ и $(0, \pi/j)$, $(\pi/j, 2\pi/j)$,

$(\pi/j, \pi/j)$, а через M_j множество $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \xi + 2\pi n/j,\ y = \eta + 2\pi m/j;\ (\xi, \eta) \in E_j;\ n, m \in \mathbb{Z}\}$. С помощью простых геометрических соображений нетрудно проверить, что $M = M_1 \cap M_2 \cap M_3 \cap [0, 2\pi]^2 = \{(\pi, \pi/2), (\pi/2, \pi), (\pi, 3\pi/2), (3\pi/2, \pi), (\pi/2, 3\pi/2), (3\pi/2, \pi/2)$. Достаточно рассмотреть случай $(x, y) = (\pi/2, \pi)$. Предположим, что

$$\lambda [f] < q < 3q < \rho [f]. \tag{27}$$

Обозначим через $n_j(r)$ количество нулей функции f, лежащих на отрезке $[0, r\exp(i\alpha_j)]$, $j = 1, 2, 3$. Тогда верна оценка

$$|c_q(r, f)| = \Big| \int_0^r \operatorname{ch}(q \ln(r/t))\,(n_1(t) + e^{-i\pi/2} n_2(t) + e^{-i\pi} n_3(t))\, t^{-1} dt +$$
$$+ O(r^q) \Big| \geqslant 0{,}5 r^q \int_1^r n_2(t)\, t^{-q-1} dt + O(r^q), \quad r \to \infty. \tag{28}$$

Из 27 следует существование последовательности $(r_n) \uparrow \infty$ такой, что $T(r_n, f) = o(r_n^q)$. Запишем (28) при $r = r_n$, разделим обе части неравенства на r_n^q и воспользуемся оценкой $|c_q(r, f)| \leqslant 2T(r, f) + O(1)$. В результате получим $\int_1^\infty n_2(t)\, t^{-q-1} dt < \infty$, откуда в свою очередь следует

$$n_2(r) = o(r^q), \quad r \to \infty. \tag{29}$$

Аналогичным образом, но с учетом (29), оценивая величину $|c_{2q}(r, f)|$, получаем $\int_1^\infty (n_1(t) + n_3(t))\, t^{-2q-1} dt < \infty$, откуда $n_1(r) + n_3(r) = o(r^{2q})$, $r \to \infty$, и в сочетании с (29) $n(r, 0, f) = o(r^{2q})$, $r \to \infty$. Таким образом, $f = \varphi \exp P$, где φ — каноническое произведение рода не выше $2q$, а P — полином. Поскольку $\lambda [f] < q$, то $\deg P \leqslant 2q$, откуда следует, что $\rho [f] \leqslant 2q$. Пришли к противоречию, что и доказывает теорему 2.

1. *Чандрасекхаран К.* Введение в аналитическую теорию чисел.— М.: Мир, 1974.— 188 с.
2. *Hellerstein S.* On a class of meromorphic functions with deficient zeros and poles // Pacif. J. Math.— 1963.— 13, N 1.— P. 115—124.
3. *Гольдберг А. А.* О мероморфных функциях с разделенными нулями и полюсами // Изв. вузов. Математика.— 1960.— № 4.— С. 67—72.
4. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970.— 592 с.
5. *Steinmetz N.* On the order and lower order of entire functions with radially distributed zeros // Proc. Amer. Math. Soc.— 1983.— 87, N 3.— P. 449—452.
6. *Kobayashi T.* On the lower order of an entire functions // Kodai Math. Semin. Repts.— 1976.— 27.— P. 320—328.
7. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О некоторых вопросах теории моментов.— Харьков: ГОНТИ, 1938.— 253 с.
8. *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики.— М.: Наука, 1966.— 664 с.

Укр. НИИ полигр. пром-сти, Львов

Получено 24.07.84