УДК 517

Ю. М. Березанский, А. А. Калюжный

Гиперкомплексные системы, построенные по ортогональным полиномам

В статье изучаются гиперкомплексные системы (г. с.), построенные по ортогональным полиномам на ограниченном замкнутом множестве E вещественной оси (определение и общую теорию г. с. см. в [1—3]). По-видимому, впервые подобные г. с. изучались (хотя и в несколько иной аксиоматике) в работах [4—6]. Затем в работах [7—12] по различным конкретным системам ортогональных полиномов были построены банаховы алгебры. Как показано в настоящей работе, все эти алгебры являются примерами г. с., построенных по ортогональным полиномам, либо двойственных к таким г. с. объектов. В работе [13] предпринята попытка аксиоматически описать подобные банаховы алгебры. На самом деле это описание сводится к понятию так называемой A-системы функций [14]. Следует также отметить работы [15—18], в которых изучались дискретные гипергруппы, тесно связанные с некоторыми последовательностями ортогональных полиномов (теорию гипергрупп см. в [19, 20]). Ниже приводится общая схема построения дискретной г. с. по системе ортогональных полиномов, охватывающая результаты всех указанных работ, и дается краткий обзор соответствующих фактов. Рассматриваются исключительно бесконечные последовательности ортогональных многочленов; г. с., построенные по конечным системам таких многочленов, описаны в [21, 22].

1. Приведем основные понятия теории г. с. в смысле [2] в случае, когда базисом г. с. является счетное множество с дискретной топологией. Пусть Q — произвольное счетное множество, точки которого обозначим $p, q, r, \ldots$, с дискретной топологией. Сначала рассмотрим случай, когда структурная (с.) мера неотрицательна. С. мера $\gamma(A, B, r)$ превращается в набор с. констант $\gamma(p, q, r)$, $p, q, r \in Q$, обладающих следующими свойствами: α) $\gamma(p, q, r) \geqslant 0$; β) для любых фиксированных $p, q \in Q$ последовательность $(\gamma(p, q, r))_{r\in Q}$ финитна; γ) справедливо соотношение ассоциативности

$$\sum_{r} \gamma(p, q, r)\gamma(r, l, s) = \sum_{r} \gamma(q, l, r)\gamma(p, r, s), \quad p, q, r, l, s \in Q; \quad (1)$$

δ) для каждых $p, q, r \in Q$ справедливо соотношение коммутативности $\gamma(p, q, r) = \gamma(q, p, r)$.

Мультипликативная (м.) мера превращается в м. вес — последовательность положительных чисел $m = (m(p))_{p\in Q}$ таких, что выполняется равенство

$$\sum_{r} \gamma(p, q, r)\, m(r) = m(p)\, m(q), \quad p, q \in Q. \quad (2)$$

Г. с. с дискретным базисом Q называется пространство $l_1(m)$ последовательностей комплексных чисел, суммируемых относительно м. веса, в котором введена свертка следующим образом: $(x * y)(r) = \sum_{p,q} x(p)\, y(q)\, \gamma(p, q, r)$, $x, y \in l_1(m)$.

Характером будет служить ограниченная, не равная тождественно нулю последовательность $\chi(p) \in \mathbb{C}^1$, $p \in Q$, такая, что

$$\sum_r \gamma(p, q, r)\chi(r)m(r) = \chi(p)m(p)\chi(q)m(q), \quad p, q \in Q. \tag{3}$$

Полученная г. с. будет нормальной, если существует инволютивное отображение $Q \ni p \mapsto p^* \in Q$ такое, что $m(p) = m(p^*)$ и $\gamma(p, q, r)m(r) = \gamma(r, q^*, p)m(p)$, $p, q, r \in Q$. Инволюция в г. с. $l_1(m)$ устанавливается следующим образом: $l_1(m) \ni (x(p))_{p\in Q} \mapsto (x^*(p))_{p\in Q} = (\overline{x(p^*)})_{p\in Q} \in l_1(m)$. Характер $(\chi(p))_{p\in Q}$ называется эрмитовым, если $\overline{\chi(p^*)} = \chi(p)$. Точка $o \in Q$ называется базисной единицей (б. е.) г. с. $l_1(m)$, если $o = o^*$ и $\gamma(p, q, o) = \delta_{pq^*}m(p)$, $p, q \in Q$. Если г. с. $l_1(m)$ обладает б. е. o, то в этой г. с. есть единица относительно свертки — последовательность $o(p)$, равная $1/m(p)$ при $p = o$ и 0 при $p \neq o$. Пространства характеров X и эрмитовых характеров X_h нормальной г. с. $l_1(m)$ с б. е. являются компактными множествами; в этом случае $\gamma(p, q, r) = m(p)m(q)\int\limits_{\mathrm{X}_h} p(\chi)q(\chi)\overline{r(\chi)}\,d\chi$ (см. формулу (2.5) из [2]), где $d\chi$ — мера Планшереля, $p(\chi) = \chi(p)$, $p \in Q$. Нормальная г. с. $l_1(m)$ с б. е. изометрично изоморфна кольцу непрерывных на X_h функций с обычными алгебраическими операциями, разлагающихся в абсолютно сходящиеся ряды по ортогональной полной системе функций $p(\chi)$, $\chi \in \mathrm{X}_h$, $p \in Q$, т. е. кольцу функций $x(\chi) = \sum\limits_p x(p)p(\chi)m(p)$ таких, что $\sum\limits_p |x(p)|m(p) = \|x\| < \infty$.

Как показано в [2], по коммутативной гипергруппе всегда можно построить нормальную г. с. со слабой б. е. Л. И. Вайнерман обратил внимание авторов настоящей статьи на тот факт, что по нормальной г. с. с дискретным базисом и б. е. можно построить гипергруппу. Для этого следует рассмотреть числа $g(p, q, r) = \dfrac{\gamma(p, q, r)m(r)}{m(p)m(q)}$ и положить $\delta_p * \delta_q = \sum\limits_r g(p, q, r)\delta_r$ (δ_r — вероятностная мера, сосредоточенная в точке r). В силу (2) мера $\delta_p * \delta_q$ будет вероятностной.

Нетрудно проверить и остальные аксиомы гипергруппы для так введенной свертки. Таким образом, в случае дискретного базиса понятия нормальной г. с. с б. е. и коммутативной гипергруппы равносильны.

Операторы обобщенного сдвига (о. о. с.) в нормальной г. с. с б. е. имеют следующий вид: $(T_qx)(r) = \dfrac{1}{m(q)}\sum\limits_p x(p)\gamma(p, q^*, r)$, $q, r \in Q$. Ограниченную последовательность чисел $\varphi(p)$, $p \in Q$, будем называть положительно определенной (п. о.), если для любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}^1$, $r_1, \ldots, r_n \in Q$:

$$\sum_{k,l=1}^{n} (T_{r_k}\varphi)(r_l)\lambda_k\bar{\lambda}_l \geqslant 0. \tag{4}$$

Нетрудно проверить, что это определение в точности совпадает с п. о. в смысле [2, с. 26].

Если не требовать положительности с. констант $\gamma(p, q, r)$, то вместо равенства (2) в определении м. веса $m(p)$ следует потребовать выполнение неравенства

$$\sum_r |\gamma(p, q, r)|m(r) \leqslant m(p)m(q), \quad p, q \in Q.$$

Все приведенные выше утверждения сохраняют силу для г. с., с. мера которых не является неотрицательной.

2. Пусть E — замкнутое ограниченное подмножество вещественной оси; $d\sigma$ — неотрицательная мера на E, имеющая бесконечное число то-

чек роста и удовлетворяющая условиям $\sigma(E)=1$, $\int |t|^n d\sigma(t) < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, $\operatorname{supp}\sigma = E$ (здесь и далее интегрирование без указания области проводится по всему E). Обозначим $L_2(E, d\sigma) = L_2$, $(\cdot, \cdot)_{L_2} = (\cdot, \cdot)_2$. Пусть $P_0(t), P_1(t), \ldots$ — ортонормированная относительно меры $d\sigma$ последовательность полиномов, а $b = \sup E$. Тогда в силу известной теоремы о нулях ортогональных многочленов имеем $P_n(b) > 0$, $n = 0, 1, \ldots$. Положим

$$Q_p(t) = P_p(t)/P_p(b), \quad m(p) = [P_p(b)]^2, \ \gamma(p, q, r) =$$

$$= m(p)\, m(q) \int Q_p(t)\, Q_q(t)\, Q_r(t)\, d\sigma(t) = \frac{P_p(b)\, P_q(b)}{P_r(b)} \int P_p(t)\, P_q(t)\, P_r(t)\, d\sigma(t),$$

$$p, q, r = 0, 1, \ldots.$$

Теорема 1. *Если* $\int P_p(t) P_q(t) P_r(t)\, d\sigma(t) \geqslant 0$ *для всех* $p, q, r = 0, 1, \ldots$, *то* $\gamma(p, q, r)$ *будут с. константами, а* $m(p)$ — *м. весом некоторой эрмитовой г. с. с дискретным базисом* $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, \ldots\}$ *и б. е.* 0. *Эту г. с. будем обозначать* $l_1(d\sigma, m)$. *Пространство характеров* X *г. с.* $l_1(d\sigma, m)$ *состоит из множества точек* z *комплексной плоскости таких, что последовательность* $Q_n(z)$ *ограничена. Пространство эрмитовых характеров* $\mathrm{X}_h = \mathrm{X} \cap \mathbb{R}$.

Доказательство. Проверим, что числа $\gamma(p, q, r)$ являются набором с. констант некоторой г. с. с базисом $\mathbb{Z}_+$, т. е. выполняются условия α) — δ) п. 1. В самом деле, α) и δ) очевидны, а β) следует из того, что $\int P_p(t) P_q(t) P_r(t)\, d\sigma(t) = 0$ для всех $r > p + q$, $r < |p - q|$. Проверим соотношение ассоциативности. В силу равенства Парсеваля

$$\sum_r \gamma(p, q, r)\, \gamma(r, l, s) = \frac{P_p(b)\, P_q(b)\, P_l(b)}{P_s(b)} \sum_r \int P_p(t)\, P_q(t)\, P_r(t)\, d\sigma(t) \times$$

$$\times \int P_r(t)\, P_l(t)\, P_s(t)\, d\sigma(t) = \frac{P_p(b)\, P_q(b)\, P_l(b)}{P_s(b)} (P_p P_q, \ P_l P_s)_2 =$$

$$= \frac{P_p(b)\, P_q(b)\, P_l(b)}{P_s(b)} (P_q P_l, \ P_p P_s)_2 = \frac{P_p(b)\, P_q(b)\, P_l(b)}{P_s(b)} \sum \int P_q(t)\, P_l(t) \times$$

$$\times P_r(t)\, d\sigma(t) \int P_p(t) P_s(t)\, P_r(t)\, d\sigma(t) = \sum_r \gamma(q, l, r)\, \gamma(p, r, s),$$

$$p, q, l, s \in \mathbb{Z}_+.$$

(Все указанные ряды сходятся, так как суммирование проводится по конечному числу индексов.) Таким образом, $\gamma(p, q, r)$ — действительно набор с. констант. Покажем, что $m(p)$ — м. вес. Для этого разложим произведение $P_p(t)\, P_q(t)$ в ряд по полиномам $P_r(t)$:

$$P_p(z)\, P_q(z) = \sum_r P_r(z) \int P_p(t)\, P_q(t)\, P_r(t)\, d\sigma(t), \quad z \in \mathbb{C}^1. \tag{5}$$

Полагая в (5) $z = b$, получаем

$$P_p(b)\, P_q(b) = \sum_r P_r(b) \int P_p(t)\, P_q(t)\, P_r(t)\, d\sigma(t), \quad p, q \in \mathbb{Z}_+.$$

Нетрудно заметить, что это равенство равносильно равенству (2) и, следовательно, $m(p)$ — м. вес. Эрмитовость полученной г. с. очевидна. Точка 0 является б. е. г. с. $l_1(d\sigma, m)$ в силу того, что $P_0(t) \equiv 1$.

Покажем, что пространство характеров X состоит из множества точек z комплексной плоскости таких, что последовательность $Q_n(z)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, ограничена. Пусть число $z \in \mathbb{C}^1$ таково, что последовательность $Q_n(z)$

ограничена. Покажем, что последовательность $\chi(p) = Q_p(z)$ является характером г. с. $l_1(d\sigma, m)$. В самом деле, для любых $p,\ q \in \mathbb{Z}_+$ в силу (5)

$$Q_p(z)\,Q_q(z)\,m(p)\,m(q) = P_p(z)\,P_q(z)\,P_p(b)\,P_q(b) =$$

$$= \sum_r P_r(z) \int P_p(t)\,P_q(t)\,P_r(t)\,d\sigma(t)\,P_p(b)\,P_q(b) = \sum_r \gamma(p,\ q,\ r)\,Q_r(z)\,m(r).$$

С другой стороны, пусть $\chi(p),\ p \in \mathbb{Z}_+,$ — характер г. с. $l_1(d\sigma,\ m)$. Тогда из (3) вытекает

$$\chi(p)\,\chi(q)\,P_p(b)\,P_q(b) = \sum_{r=|p-q|}^{p+q} \chi(r)\,P_r(b) \int P_p(t)\,P_q(t)\,P_r(t)\,d\sigma(t),$$

$$p,\ q,\ r \in \mathbb{Z}_+.$$

Отсюда видно, что все значения характера $\chi(p)$ однозначно определяются значениями $\chi(0) = 1$ и $\chi(1)$. Положим $z = \chi(1)(b - \sigma_1) + \sigma_1$, где $\sigma_1 = \int t\,d\sigma(t)$ — первый момент меры $d\sigma$. Нетрудно проверить, что $\chi(0) = P_0(z)$ и $\chi(1)\ P_1(b) = P_1(z)$. Отсюда и из (5) вытекает, что $\chi(r)\ P_r(b) = P_r(z)$ или $\chi(r) = Q_r(z),\ r \in \mathbb{Z}_+$. Из ограниченности характера $\chi(p)$ следует ограниченность последовательности $Q_p(z)$. Равенство $\mathrm{X}_h = \mathrm{X} \cap \mathbb{R}$ следует из вещественности эрмитовых характеров.

Замечания. 1. Может оказаться, что $(-1)^{p+q+r} \int P_p(t)P_q(t)P_r(t)d\sigma(t) \geqslant 0$ для всех $p,\ q,\ r \in \mathbb{Z}_+$. В этом случае следует положить

$$S_p(t) = P_p(t)/P_p(a), \quad m(p) = [P_p(a)]^2, \quad \gamma(p,\ q,\ r) =$$

$$= m(p)\,m(q) \int S_p(t)\,S_q(t)\,S_r(t)\,d\sigma(t),$$

где $a \in E$ — точная нижняя грань множества E. Для так определенных чисел $\gamma(p,\ q,\ r)$ и $m(p)$ справедливы все утверждения теоремы 1.

2. Отметим, что $\mathrm{X} \subseteq \{z \in \mathbb{C}^1 \mid |z - \sigma_1| \leqslant b - \sigma_1\}$, в частности $\mathrm{X}_h \subseteq [2\sigma_1 - b,\ b]$.

3. По теореме Планшереля (см. [2]) найдется регулярная борелевская мера $d\pi$ на X_h такая, что полиномы $P_r(t)$ ортонормированы относительно меры $d\pi$. Но для ортонормированной на ограниченном множестве вещественной оси системы полиномов такая мера единственна [23]. Следовательно, $d\sigma = d\pi$. Так как $E = \operatorname{supp}\sigma = \operatorname{supp}\pi \subseteq \mathrm{X}_h$, то $|Q_r(t)| \leqslant 1\ \forall\ t \in E$ или $|P_r(t)| \leqslant P_r(b)\ \forall\ t \in E$. Из теоремы 1 работы [5] заключаем, что если $P_r(b)$ ограничены, то г. с. $l_1(d\sigma,\ m)$ симметрична, т. е. $\mathrm{X} = \mathrm{X}_h$.

Наметим другой подход к построению г. с. по ортонормированным полиномам $P_r(t)$. Известно (см., например, [24]), что полиномы $P_r(t)$ образуют систему полиномов первого рода для разностного выражения $(Lu)_p = \alpha_{p-1}u_{p-1} + \beta_p u_p + \alpha_p u_{p+1}$, т. е. являются решениями краевой задачи

$$(LP_{\cdot}(t))_p = tP_p(t), \quad p \in \mathbb{Z}_+; \qquad P_{-1}(t) \equiv 0, \quad P_0(t) \equiv 1. \tag{6}$$

Коэффициенты разностного выражения вычисляются по формулам

$$\alpha_p = \int tP_{p+1}(t)\,P_p(t)\,d\sigma(t), \quad \beta_p = \int tP_p^2(t)\,d\sigma(t).$$

Рассмотрим уравнение в частных разностях

$$\alpha_p u_{p+1,q} + \beta_p u_{pq} + \alpha_{p-1} u_{p-1,q} = \alpha_q u_{p,q+1} + \beta_q u_{pq} + \alpha_{q-1} u_{p,q-1}, \tag{7}$$

где $(u_{pq})_{p,q=0}^{\infty}$ — искомая бесконечная матрица. Из (7) следует, что элементы $(q+1)$-го столбца матрицы $(u_{pq})_{p,q=0}^{\infty}$ однозначным образом определяются через элементы q-го и $(q-1)$-го столбцов. Отсюда заключаем, что матрица u_{pq} полностью определяется своими «начальными» значениями — столбцом с нулевым индексом. Определим на линейной совокупности последовательностей $x = (x(p))_{p=0}^{\infty}$ семейство операторов $(T_q'x)(p) = u_{pq}$, где матрица $(u_{pq})_{p,q=0}^{\infty}$ построена по «начальному» значению $u_{p0} = x(p)$, $p \in \mathbb{Z}_+$. Покажем, что $T_q'x$ можно вычислить непосредственно с помощью формулы

$$(T_q'x)(p) = u_{pq} = \sum_r x(r) \int P_p(t) P_q(t) P_r(t) \, d\sigma(t), \quad p, \ q \in \mathbb{Z}_+. \tag{8}$$

(Очевидно, что суммирование здесь производится по конечному числу индексов $|p-q| \leqslant r \leqslant p+q$.) В самом деле, в силу того что элемент u_{pq} полностью определяется конечным числом «начальных» значений u_{r0} $(|p-q| \leqslant r \leqslant p+q)$, равенство (8) достаточно доказать для финитных последовательностей x. Положим $\hat{x}(t) = \sum\limits_r x(r) P_r(t)$, тогда в силу равенства Парсеваля

$$\sum_r x(r) \int P_p(t) P_q(t) P_r(t) \, d\sigma(t) = \int P_p(t) P_q(t) \hat{x}(t) \, d\sigma(t) = v_{pq}.$$

Матрица $(v_{pq})_{p,q=0}^{\infty}$ является решением уравнения (7). Действительно, на основании (6) имеем

$$\alpha_p v_{p+1,q} + \beta_p v_{pq} + \alpha_{p-1} v_{p-1,q} = \int [\alpha_p P_{p+1}(t) + \beta_p P_p(t) + \alpha_{p-1} P_{p-1}(t)] \times$$
$$\times P_q(t) \hat{x}(t) \, d\sigma(t) = \int t P_p(t) P_q(t) \hat{x}(t) \, d\sigma(t) = \int P_p(t) \, [\alpha_q P_{q+1}(t) +$$
$$+ \beta_q P_q(t) + \alpha_{q-1} P_{q-1}(t)] \, \hat{x}(t) \, d\sigma(t) = \alpha_q v_{p,q+1} + \beta_q v_{pq} + \alpha_{q-1} v_{p,q-1}.$$

Так как $v_{p0} = \int P_p(t) \hat{x}(t) \, d\sigma(t) = x(p) = u_{p0}$, то отсюда вытекает, что $v_{pq} = u_{pq}$ и формула (8) доказана. Заметим, что $(T_q'P_{\cdot}(z))(p) = P_p(z) P_q(z)$ для любых $p, \ q \in \mathbb{Z}_+$, $z \in \mathbb{C}^1$.

Положим

$$(T_q x)(p) = [T_q' x(\cdot) P_{\cdot}(b)](p) / [T_q' P_{\cdot}(b)](p). \tag{9}$$

Оператор T_q, определяемый с помощью (9), является о. о. с. в г. с $l_1(d\sigma, m)$. Обратно, так как u_{pq} вычисляются с помощью рекуррентного соотношения (7) через коэффициенты α_p, β_p разностного выражения L, то (8) дает возможность вычислять интегралы $\int P_p(t) P_q(t) P_r(t) \, d\sigma(t)$ для за данного разностного выражения.

Пусть выполнены условия теоремы 1. Напишем разложение произведения $Q_p(t) Q_q(t)$ в ряд по полиномам $Q_r(t)$:

$$Q_p(t) Q_q(t) = \sum_r g(p, \ q, \ r) Q_r(t). \tag{10}$$

Легко видеть, что

$$g(p, \ q, \ r) = \frac{\gamma(p, \ q, \ r) \, m(r)}{m(p) \, m(q)}. \tag{11}$$

Отсюда следует, что по г. с. $l_1(d\sigma, m)$ можно построить гипергруппу, если положить $\delta_p * \delta_q = \sum\limits_r g(p, \ q, \ r) \, \delta_r$ (δ_r — вероятностная мера, сосредоточенная в точке r).

В работах [15 — 18] изучались системы ортогональных полиномов $Q_n(z)$, построенные по трем последовательностям a_n, b_n, c_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, $a_n > 0$, $b_n \geqslant 0$, $c_n > 0$, $c_0 = 0$ и $a_n + b_n + c_n = 1$, рекуррентным образом:

$$Q_0(z) = 1, \quad Q_1(z) = (1/a_0) z - b_0/a_0, \quad Q_{n+1}(z) = (1/a_n) Q_n(z) Q_1(z) -$$
$$- (b_n/a_n) Q_n(z) - (c_n/a_n) Q_{n-1}(z).$$

В работе [15] показано, что если коэффициенты $g(p, \ q, \ r)$ в разложении (10) неотрицательны, то множество $\mathbb{Z}_+$ со сверткой $\delta_p * \delta_q = \sum\limits_r g(p, \ q, \ r) \, \delta_r$

является гипергруппой. Числа $g(p, q, r)$ вычисляются рекуррентным образом по последовательностям a_n, b_n, c_n. Нетрудно видеть, что полиномы $P_p(z) = \sqrt{m(p)}\, Q_p(z)$, где $m(p) = \prod_{k=1}^{p-1} a_k / \prod_{k=1}^{p} c_k = P_p^2(1)$, $m(1) = 1/c_1$, $m(0) = 1$, являются полиномами первого рода для разностного выражения L, в котором $\alpha_n = a_0\sqrt{c_{n+1}a_n}$, $\beta_n = a_0 b_n + b_0$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и $\alpha_0 = a_0\sqrt{c_1}$, $\beta_0 = b_0$. Если по этим полиномам с помощью теоремы 1 построить г. с., то м. весом этой г. с. будет последовательность чисел $m(p)$, а с. константы $\gamma(p, q, r)$ связаны с $g(p, q, r)$ с помощью формулы (11).

Применяя теорему Бохнера из [2] к построенной г. с., получаем следующее утверждение: *для того чтобы ограниченная последовательность $s(p)$ действительных чисел была представима в виде* $s(p) = \int_{X_h} Q_p(t)\, d\mu(t)$, *где μ — неотрицательная конечная регулярная мера на X_h, необходимо и достаточно, чтобы она была п. о. в смысле* (4). В силу (8) это утверждение является обобщением теоремы 2 из [18].

3. Рассмотрим г. с., построенные по ортогональным полиномам, с. константы которых, вообще говоря, неположительны. Пусть $P(t)$ — ортонормированная относительно меры $d\sigma$ на ограниченном замкнутом множестве E вещественной прямой последовательность полиномов. Предположим, что существует последовательность положительных чисел $m(p)$ такая, что

$$\sum_r \sqrt{m(r)} \left| \int P_p(t) P_q(t) P_r(t)\, d\sigma(t) \right| \leqslant \sqrt{m(p)\, m(q)}, \quad p,\ q \in \mathbb{Z}_+. \qquad (12)$$

Положим

$$Q_p(t) = P_p(t)/\sqrt{m(p)}, \quad \gamma(p, q, r) = m(p)\, m(q) \int Q_p(t)\, Q_q(t)\, Q_r(t)\, d\sigma(t),$$
$$p,\ q,\ r \in \mathbb{Z}_+.$$

Повторяя рассуждения теоремы 1, можно показать, что $\gamma(p, q, r)$ будут с. константами некоторой г. с. $l_1(d\sigma, m)$ с базисом $\mathbb{Z}_+$. Из неравенства (12) видно, что в качестве м. веса этой г. с. можно взять последовательность $m(p)$. Пространство характеров X г. с. $l_1(d\sigma, m)$ состоит из множества точек $z \in \mathbb{C}^1$ таких, что последовательность $Q_p(z)$ ограничена; $X_h = X \cap \mathbb{R}$. Чтобы это показать, достаточно повторить соответствующие рассуждения теоремы 1, заменив $P_p(b)$ на $\sqrt{m(p)}$. Для построенной эрмитовой г. с. $l_1(d\sigma, m)$ справедливо замечание 3 к теореме 1 и, следовательно, $|P_p(t)| \leqslant \sqrt{m(p)}$ для всех $t \in E$. В силу того что $\operatorname{supp} \sigma = E$, г. с. $l_1(d\sigma, m)$ изометрично изоморфна кольцу непрерывных на E функций вида $\hat{x}(t) = \sum_r x(r) P_r(t)$ с обычными алгебраическими операциями, для которых $\|\hat{x}\| = \sum_r |x(r)| \sqrt{m(r)} < \infty$. Применяя теорему 1 из [5], заключаем, что если числа $m(p)$ ограничены, то кольцо $l_1(d\sigma, m)$ симметрично.

Приведем один способ выбора чисел $m(p)$. Предположим, что $\left| \int P_p(t)\, P_q(t)\, P_r(t)\, d\sigma(t) \right| \leqslant C$ для всех $p, q, r \in \mathbb{Z}_+$. Заметим, что если числа $\nu_p > 0$ удовлетворяют неравенству $\sum_{r=|p-q|}^{p+q} \nu_r \leqslant \nu_p \nu_q$, то в (12) можно положить $\sqrt{m(p)} = C\nu_p$. В самом деле,

$$\sum_r \left| \int P_p(t)\, P_q(t)\, P_r(t)\, d\sigma(t) \right| \sqrt{m(r)} = \sum_{r=|p-q|}^{p+q} \left| \int P_p(t)\, P_q(t)\, P_r(t)\, d\sigma(t) \right| C\nu_r \leqslant$$
$$\leqslant C^2 \sum_{r=|p-q|}^{p+q} \nu_r \leqslant C^2 \nu_p \nu_q = \sqrt{m(p)\, m(q)}.$$

В качестве чисел ν_r можно взять числа $\nu_r=(2r+1)^A$ или $\nu_r=$ $=\frac{\operatorname{sh}(2r+1)\lambda}{\operatorname{sh}\lambda}$, $A\geqslant 1$, $\lambda>0$. Действительно, с помощью известной формулы для суммы синусов легко проверить, что

$$\sum_{r=|p-q|}^{p+q}\frac{\sin(2r+1)z}{\sin z}=\frac{\sin(2p+1)z}{\sin z}\frac{\sin(2q+1)z}{\sin z}.$$

Полагая здесь $z=0$ и $z=i\lambda$, $\lambda>0$, получаем

$$\sum_{r=|p-q|}^{p+q}(2r+1)=(2p+1)(2q+1),$$

$$\sum_{r=|p-q|}^{p+q}\frac{\operatorname{sh}(2r+1)\lambda}{\operatorname{sh}\lambda}=\frac{\operatorname{sh}(2p+1)\lambda}{\operatorname{sh}\lambda}\frac{\operatorname{sh}(2q+1)\lambda}{\operatorname{sh}\lambda}.$$

Применяя известное неравенство Иенсена, из первого из соотношений имеем

$$\sum_{r=|p-q|}^{p+q}(2r+1)^A\leqslant\Big[\sum_{r=|p-q|}^{p+q}(2r+1)\Big]^A=(2p+1)^A(2q+1)^A,\ A\geqslant 1.$$

В частности, если полиномы $P_r(t)$ равномерно по $r\in\mathbb{Z}_+$ и $t\in E$ ограничены, то можно положить $m(r)=K(2r+1)^A$ или $m(r)=K\frac{\operatorname{sh}(2r+1)B}{\operatorname{sh}B}$, $A\geqslant 1$, $B>0$, $K=[\sup\limits_{r\in\mathbb{Z}_+,t\in E}|P_r(t)|]^3$. Как показано в [5], примером полиномов, равномерно ограниченных на E, являются полиномы $P_r^{(\alpha,\beta,h)}(t)$, ортонормированные относительно веса $(1-t)^\alpha(1+t)^\beta h(t)$, $-1<\alpha$, $\beta\leqslant -1/2$, $-1\leqslant t\leqslant 1$, где $h(t)>0$ удовлетворяет условию Липшица. В частности, при $h(t)\equiv 1$ получаем полиномы Якоби $P_r^{(\alpha,\beta)}(t)$, $-1<\alpha,\beta\leqslant -1/2$. Как показано в [5], пространствами максимальных идеалов г. с. $l_1((1-t)^\alpha(1+$ $+t)^\beta h(t)\,dt,\ K(2r+1)^A)$ и $l_1\left((1-t)^\alpha(1+t)^\beta h(t)\,dt,\ K\frac{\operatorname{sh}(2r+1)B}{\operatorname{sh}B}\right)$ служат соответственно отрезок $[-1,1]$ и область комплексной плоскости, выделяемая неравенством $|z+(z^2-1)^{1/2}|\leqslant e^{2B}$ (ср. с соответствующим результатом для полиномов Якоби $P_r^{(\alpha,\beta)}(t)$, $-1<\alpha,\beta<-1/2$, полученным в [9]). Для полиномов $P_r^{(\alpha,\beta,h)}(t)$ в [5] получен также аналог теоремы Винера — Леви.

Рассмотрим два пространства $l_1(d\sigma,m)$ и $l_1(d\tilde\sigma,\tilde m)$ с одним и тем же множеством E. Будем называть оператором преобразования U, действующим из $l_1(d\sigma,m)$ в $l_1(d\tilde\sigma,\tilde m)$, оператор, определяемый матрицей $(u_{pq})_{p,q=0}^\infty=$ $=\left(\int\tilde P_p(t)P_q(t)\,d\tilde\sigma(t)\right)_{p,q=0}^\infty$ с помощью формулы $(Ux)(p)=\frac{1}{\sqrt{\tilde m(p)}}\sum\limits_q u_{pq}\times$ $\times x(q)\sqrt{m(q)}$, $p\in\mathbb{Z}_+$, $x(q)\in l_1(d\sigma,m)$. Нетрудно показать, что для непрерывности оператора U необходимо и достаточно выполнение неравенств $\sum\limits_p|u_{pq}|\sqrt{\tilde m(p)}\leqslant A\sqrt{m(q)}$, $q\in\mathbb{Z}_+$. Обозначим через V оператор преобразования, действующий из $l_1(d\tilde\sigma,\tilde m)$ в $l_1(d\sigma,m)$. Очевидно, непрерывность обоих операторов U и V равносильна тому, что $l_1(d\sigma,m)$ и $l_1(d\tilde\sigma,\tilde m)$ топологически эквивалентны. В силу того что аксиоматика настоящей работы несколько отличается от аксиоматики работы [5], определение операторов преобразования иное. Тем не менее справедливы следующие теоремы, доказанные в работе [5].

Теорема 2. *Пусть* $l_1(g(t)\,dt, m)$ — *эрмитова г. с. с б. е.,* $h(t) > 0$, $t \in E$, *имеет ограниченную первую производную,* $1/h(t) \in l_1(g(t)\,dt, m)$ *и*

$$\left| \int \frac{h(t) - h(s)}{t - s} P_p(t)\, g(t)\, dt \right| \sqrt{m(p)} \leqslant k_p, \ p \in \mathbb{Z}_+, \tag{13}$$

равномерно по $s \in E$, *причем* $\sum\limits_p k_p < \infty$. *Тогда операторы преобразования* U *и* V *для пространств* $l_1(g(t)\,dt, m)$ *и* $l_1(h(t)\,g(t)\,dt, m)$ *непрерывны (в* [5] *показано, что* $l_1(h(t)\,g(t)\,dt, m)$ *имеет смысл). Если полиномы* $P_p(t)$ *равномерно ограничены, то условие* (13) *можно заменить более слабым:*

$$\sum_p \left| \int \frac{h(t) - h(s)}{t - s} P_p(t)\, g(t)\, dt \right| \sqrt{m(p)} \leqslant K < \infty, \ s \in E.$$

Применяя эту теорему к ультрасферическим полиномам, ортонормированным относительно веса $(1 - t^2)^{m/2-1}$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$; $m = 1, 2, \ldots$, являющимся зональными функциями групп движений m-мерных сфер в $(m+1)$-мерном пространстве, можно получить следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $h(t) > 0$, *а* U *и* V — *операторы преобразования, построенные для пространств* $l_1((1 - t^2)^{m/2-1}dt, n^{m-1})$ *и* $l_1(h(t)(1 - t^2)^{m/2-1}dt, n^{m-1})$, *где* $m = 1, 2, \ldots$. *При* $m = 2, 3, \ldots$ *операторы* U *и* V *непрерывны, если* $h(t)$ *имеет ограниченную производную порядка* $[(m+5)/2]$; *при* $m = 1$ *эти операторы непрерывны, если* $h(t)$ *имеет ограниченную производную второго порядка.*

Пусть $\hat{U}_p^{(m,h)}(t)$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$,— полиномы, ортонормированные относительно веса $h(t)(1 - t^2)^{m/2-1}$. Из предыдущего вытекает такое утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $m = 1, 2, \ldots$, *а* $h(t) > 0$, $-1 \leqslant t \leqslant 1$, *имеет ограниченную производную второго порядка (при* $m = 1$) *или порядка* $[(m+5)/2]$ *(при* $m = 2, 3, \ldots$). *Если* $\hat{x}(t) = \sum\limits_r x(r)\, \hat{U}_r^{(m)}(t) = \sum\limits_r x^{(h)}(r) \times \hat{U}_r^{(m,h)}(t)$, *то ряды* $\sum\limits_r |x(r)|\, r^{(m-1)/2}$ *и* $\sum\limits_r |x^{(h)}(r)|\, r^{(m-1)/2}$ *одновременно сходятся или расходятся.*

Отсюда, в частности, вытекает теорема Винера — Леви для разложений по ортонормированным полиномам $\hat{U}_r^{(m,h)}(t)$.

4. Приведем примеры г. с., построенных по ортогональным полиномам. Как показано в п. 2, все примеры, построенные в статье [15], являются г. с. с неотрицательными с. константами. В этой статье приведены примеры г. с., построенных по полиномам Якоби $P_r^{(\alpha,\beta)}(t)$, $\alpha \geqslant \beta > -1$, $\alpha + \beta + 1 \geqslant 0$, ассоциированным полиномам Лежандра (см. [25]) $P_r(t, \nu)$, $\nu \geqslant 0$; q-ультрасферическим полиномам (см. [26]) $C_r(z; \beta\,|\,q)$, $-1 < \beta < 1$, $0 < q < 1$; полиномам, связанным с однородными деревьями (см. [27, 28]) $P_r(t, a)$, $a \geqslant 2$; полиномам Поллачека (см. [29]) $P_r(t; a, c, \alpha)$, $a \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $\alpha \geqslant -1/2$, $2\alpha + 1 + c \geqslant 0$, $1 \leqslant 4a\alpha + 4\alpha^2 + 4ac + 6a$; обобщенным полиномам Чебышева (см. [12]) $T_r^{(\alpha,\beta)}(t)$, $\alpha \geqslant \beta + 1$, $\beta > -1$, и некоторым другим системам ортогональных полиномов (см. также [30]). Рассмотрим подробнее полиномы Якоби $P_r^{(\alpha,\beta)}(t)$, $\alpha, \beta > -1$. В работе [9] по существу показано, что по ним всегда можно построить г. с. с дискретным базисом. Представляется уместным прокомментировать этот результат. Рассмотрим сперва случай $\alpha \geqslant \beta$. Введем обозначения $a = \alpha + \beta + 1$, $b = \alpha - \beta$. Как следует из результатов статьи [8], для того чтобы с. константы $\gamma(p, q, r)$ были неотрицательны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство $a(a+5)(a+3)^2 \geqslant (a^2 - 7a - 24)\, b^2$. В силу теоремы 1 из [9] получаем, что при $\alpha \geqslant \beta > -1$ и $\alpha \geqslant -1/2$ $\sum\limits_r \left| \int P^{(\alpha,\beta)}(t)\, P_a^{(\alpha,\beta)}(t) \times P_r^{(\alpha,\beta)}(t)(1-t)^\alpha (1+t)^\beta dt \right| \cdot P_r^{(\alpha,\beta)}(1) \leqslant P_p^{(\alpha,\beta)}(1)\, P_r^{(\alpha,\beta)}(1)$. Следовательно, в

этом случае выполнено неравенство (12) и в качестве м. веса можно взять последовательность $m(r) = [P_r^{(\alpha,\beta)}(1)]^2$. Случай $\alpha, \beta < -1/2$ разобран в предыдущем пункте. Следует отметить, что из результатов [9] вытекает, что в этом случае можно рассматривать также г. с. со с. константами $\gamma(p, q, r) = = \frac{P_p^{(\alpha,\beta)}(c)\, P_q^{(\alpha,\beta)}(c)}{P_r^{(\alpha,\beta)}(c)} \int P_p^{(\alpha,\beta)}(t)\, P_q^{(\alpha,\beta)}(t)\, P_r^{(\alpha,\beta)}(t)\, d\sigma(t)$ и м. весом $m(r) = [P_r^{(\alpha,\beta)}(c)]^2$, где $c > 1$. Пусть теперь $\beta \geqslant \alpha$. В силу известного тождества для полиномов Якоби $P_r^{(\alpha,\beta)}(-t) = (-1)^r P_r^{(\beta,\alpha)}(t)$ легко видеть, что имеет место ситуация, описанная в замечании 1 к теореме 1. Следовательно, и в этом случае всегда можно построить г. с., заменяя во всех рассуждениях $P_r^{(\alpha,\beta)}(1)$ на $P_r^{(\alpha,\beta)}(-1)$.

Как следует из теоремы 2.3 и следствия из теоремы 2.4 из [2], для того чтобы двойственный объект к г. с., построенной по ортогональным полиномам, был также г. с., необходимо и достаточно, чтобы для любых t, $s \in X_h$ было справедливо интегральное представление

$$Q_p(t)\, Q_p(s) = \int_{X_h} Q_p(r)\, d\mu_{t,s}(r), \quad p \in \mathbb{Z}_+, \tag{14}$$

где $\mu_{t,s}$ — неотрицательная мера Радона на пространстве X_h эрмитовых характеров г. с. $l_1(d\sigma, m)$. В работе [11] найдены необходимые и достаточные условия для представления (14) в случае полиномов Якоби, а в [12] приведено достаточное условие для обобщенных полиномов Чебышева. Более подробно с этими вопросами можно ознакомиться в статье [15].

1. *Березанский Ю. М., Крейн С. Г.* Гиперкомплексные системы с континуальным базисом // Успехи мат. наук.— 1957.— 12, № 1.— С. 147—152.
2. *Березанский Ю. М., Калюжный А. А.* Гиперкомплексные системы с локально-компактным базисом.— Киев, 1982.— 58 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 82.40). (Англ. пер.: Selecta Math. Sovietica.— 1985.— 4, № 2.— P. 151—200).
3. *Березанский Ю. М., Калюжный А. А.* Ядерное пространство функций на базисе гиперкомплексной системы // Укр. мат. журн.— 1983.— 35, № 1.— С. 9—17.
4. *Березанский Ю. М.* Гиперкомплексные системы с дискретным базисом // Докл. АН СССР.— 1951.— 81, № 3.— С. 329—332.
5. *Березанский Ю. М.* О некоторых нормированных кольцах, построенных по ортогональным полиномам // Укр. мат. журн.— 1951.— 3, № 4.— С. 412—432.
6. *Березанский Ю. М.* Об обобщенных почти периодических функциях и последовательностях, связанных с дифференциальными и разностными уравнениями // Мат. сб.— 1953.— 32, № 1.— С. 157—194.
7. *Hirschman I. I. Jr.* Harmonic analysis and ultraspherical polynomials // Symp. on Harmonic Anal. and Related Integral transforms.— Cornell Univ., 1956.
8. *Gasper G.* Linearization of the product of Jakobi polynomials. II // Can. J. Math.— 1970.— 22, N 3.— P. 532—543.
9. *Askey R., Gasper G.* Linearization of the product of Jacobi polynomials. III // Ibid.— 1971.— 23, N 2.— P. 332—338.
10. *Igari S., Uno Y.* Banach algebra related to the Jacobi polynomials // Tohoku Math. J.— 1969.— N 4.— P. 668—673.
11. *Gasper G.* Banach algebras for Jacobi series and positivity of a kernel // Ann. Math.— 1972.— 95, N 2.— P. 261—280.
12. *Laine T. P.* The product formula and convolution structure for the generalized Chebyshev polynomials // SIAM. J. Math. Anal.— 1980.— 11, N 1. P. 133—146.
13. *Schwartz A.* Generalized convolutions and positive definite functions associated with general orthonormal series // Pacif. J. Math.— 1974.— 55, N 2.— P. 565—582.
14. *Березанский Ю. М.* Гиперкомплексные системы с компактным и дискретным базисом: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Киев, 1950.— 19 с.
15. *Lasser R.* Orthogonal polynomials and hypergroups //— Rend. math. Ser. 7.— 1983.— 3.— P. 185—209.
16. *Lasser R.* Bochner theorems for hypergroups and their applications to orthogonal polynomials expansions // J. Approxim. Theory.— 1983.— 37, N 4.— P. 311—325.
17. *Lasser R.* Fourier — Stiltjes transforms on hypergroups // Analysis.— 1982.— 2, N 14.— P. 281—303.
18. *Lasser R.* On the problem of modified moments // Proc. Amer. Math. Soc.,—1984 — 90, N 3.— P. 360—362.
19. *Jewett R. I.* Spaces with an abstract convolution of measures // Adv. Math.— 1975.— 18, N 1.— P. 1—101.
20. *Ross K. A.* Hypergroups and centers of measure algebras // Ist. naz Alta Mat., Symposia Math.— 1977.— 22.— P. 189—203.

21. *Dunkl C. F., Ramires D. E.* Krawtchouk polynomials and the symmetrization of hypergroups // SIAM J. Math. Anal.— 1974.— 5.— P. 351—366.
22. *Вайнерман Л. И.* Принцип двойственности для конечных гиперкомплексных систем// Изв. вузов. Математика.— 1985.— № 2.— С. 12—21.
23. *Chihara T. S.* An Introduction to orthogonal polynomials.— New York: Gordon and Breach, 1978.— 249 p.
24. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев: Наук. думка, 1965.— 800 с.
25. *Lasser R.* Linearization of the product of associated Legendre polynomials // SIAM J. Math. Anal.— 1983.— **14**, N 2.— P. 403—408.
26. *Bressond D. M.* Linearization and related formulas for q-ultraspherical polynomials // Ibid.— 1981.— **12**, N 2.— P. 161—168.
27. *Cartier P.* Harmonic analysis on trees // Proc. Symp. Pure Math.— **26**.— P. 419—424.— Providence R. I., AMS 1974.
28. *Arnaud J. P.* Fonctions spheriques et fonctions definies positives sur l'arbre homogene // C. r. Acad. Sci. A. — 1980.— **290**, N 2,— P. 99—101.
29. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены.— М.: Физматгиз, 1962.— 500 с.
30. *Wolfenstetter S.* Jacobi-Polynome and Bessel-Functionen unter dem Gesichtspunkt der harmonischen Analyse: Diss. Dokt. Naturwiss. Fak. Math. und Inf. Techn. Univ. — Munchen, 1984.— 86 S.

Ин-т математики АН УССР, Киев
Киев. политехн. ин-т

Получено 24.07.85