УДК 517.948.3

В. Н. Домницкий

Асимптотика решения системы интегро-дифференциальных уравнений с запаздыванием по времени

Многие физические задачи приводят к отысканию решения интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с отклоняющимся аргументом. Как известно, нахождение точных решений уравнений такого типа чрезвычайно сложно, поэтому применяют приближенные методы.

В данной работе с помощью методов [1, 2] исследуется вопрос построения асимптотического в смысле [3] решения для следующей системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с запаздывающим аргументом:

$$\frac{\partial^2 u(\tau, x, \varepsilon)}{\partial t^2} = A_1(\tau, x, \varepsilon)\frac{\partial^2 u(\tau, x, \varepsilon)}{\partial x^2} + A_2(\tau, x, \varepsilon)\frac{\partial^2 u(\tau-\Delta, x, \varepsilon)}{\partial x^2} +$$

$$+ A_3(\tau, x, \varepsilon)\, u(\tau-\Delta, x, \varepsilon) + \varepsilon\int_0^1 K(\tau, x, \xi, \varepsilon)\, u(\tau, \xi, \varepsilon)\, d\xi +$$

$$+ p(\tau, x, \varepsilon)\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\,\theta(\tau)\right) \tag{1}$$

с начальными

$$u(\tau, x, \varepsilon) = \varphi(\tau, x, \varepsilon),\ u_t'(\tau, x, \varepsilon) = \psi(\tau, x, \varepsilon),\ -\Delta \leqslant \tau \leqslant 0, \tag{2}$$

и граничными

$$u(\tau, 0, \varepsilon) = 0,\ u(\tau, 1, \varepsilon) = 0, \tag{3}$$

условиями, где $0 \leqslant \tau = \varepsilon t \leqslant L$, $\varepsilon > 0$ — малый действительный параметр, $i = \sqrt{-1}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, $\Delta > 0$ — постоянное запаздывание, $A_j(\tau, x, \varepsilon)$, $j = 1, 2, 3$, $K(\tau, x, \xi, \varepsilon)$ — квадратные матрицы порядка n; $p(\tau, x, \varepsilon)$, $\varphi(\tau,$

$x, \varepsilon)$, $\psi(\tau, x, \varepsilon)$ — n-мерные векторы, допускающие разложения сходящимися рядами по степеням ε:

$$A_j(\tau, x, \varepsilon) = A_j^{(0)}(\tau) + \varepsilon \tilde{A}_j(\tau, x, \varepsilon) = A_j^{(0)}(\tau) + \varepsilon \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \tilde{A}_j^{(s)}(\tau, x), \ j = 1, 2, 3,$$

$$K(\tau, x, \xi, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s K_s(\tau, x, \xi), \quad p(\tau, x, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s p_s(\tau, x),$$

$$\varphi(\tau, x, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \varphi_s(\tau, x), \ \psi(\tau, x, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s \psi_s(\tau, x). \tag{4}$$

Предполагается выполнение следующих условий.

1. Для любого действительного n-мерного вектора b и для всех $\tau \in [0, L]$

$$(A_1^{(0)}(\tau) b, b) \geqslant \alpha(b, b), \ \alpha > 0. \tag{5}$$

2. Матрицы $A_j^{(0)}(\tau)$, $\tilde{A}_j^{(s)}(\tau, x)$, $j = 1, 2, 3$, векторы $p_s(\tau, x)$, $s = 0, 1, \ldots$, непрерывно дифференцируемы по $\tau \in [0, L]$ $l + 1$ раз включительно (l — любое натуральное число) $\forall x \in [0, 1]$, причем матрицы $\tilde{A}_j^{(s)}(\tau, x)$, $\partial \tilde{A}_j^{(s)}(\tau, x)/\partial\tau$, $j = 1, 2, 3$, и векторы $p_s(\tau, x)$, $s = 0, 1, \ldots$, ограничены по норме и принадлежат $L_2(0, 1)$ $\forall \tau \in [0, L]$, функция $\theta(\tau)$ непрерывно дифференцируема по τ $l + 1$ раз.

3. Векторы $\varphi_s(\tau, x)$, $\psi_s(\tau, x)$, $s = 0, 1, \ldots$, имеют непрерывные производные по $\tau \in [-\Delta, 0]$ до порядка $l + 1$ включительно и принадлежат $L_2(0, 1)$ $\forall \tau \in [-\Delta, 0]$.

4. Ядра $K_s(\tau, x, \xi)$, $s = 0, 1, \ldots$, имеют непрерывные частные производные по τ до порядка $l + 1$ включительно в области $\{0 \leqslant \tau \leqslant L;\ 0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant \xi \leqslant 1\}$.

5. На сегменте $[0, L]$ при $s = 0, 1, \ldots$; $\nu = 0, 1, \ldots, l + 1$ равномерно сходятся ряды

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{d^\nu A_{mk}^{(s)}(\tau)}{d\tau^\nu} \right\|^2, \quad \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{d^\nu B_{mk}^{(s)}(\tau)}{d\tau^\nu} \right\|^2, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \frac{d^\nu p_m^{(s)}(\tau)}{d\tau^\nu} \right\|^2,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\| \frac{d^\nu \varphi_m^{(s)}(\tau)}{d\tau^\nu} \right\|^2, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \left\| \frac{d^\nu \psi_m^{(s)}(\tau)}{d\tau^\nu} \right\|^2, \tag{6}$$

где

$$A_{mk}^{(s)}(\tau) = -\int_0^1 \left((k\pi)^2 \tilde{A}_1^{(s)}(\tau, x) \sin \ \pi x - \int_0^1 K_s(\tau, x, \xi) \sin k\pi\xi \right) \sin m\pi x dx,$$

$$B_{mk}^{(s)}(\tau) = \int_0^1 (\tilde{A}_3^{(s)}(\tau, x) \sin k\pi x - (k\pi)^2 \tilde{A}_2^{(s)}(\tau, x) \sin k\pi x) \sin m\pi x dx,$$

$$p_m^{(s)}(\tau) = \int_0^1 p^{(s)}(\tau, x) \sin m\pi x dx, \quad \varphi_m^{(s)}(\tau) = \int_0^1 \varphi^{(s)}(\tau, x) \sin m\pi x dx, \tag{7}$$

$$\psi_m^{(s)}(\tau) = \int_0^1 \psi^{(s)}(\tau, x) \sin m\pi x dx, \ m, k = 1, 2, \ldots .$$

Решение смешанной задачи (1)—(3) ищем в виде

$$u(\tau, x, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k(\tau, \varepsilon) \sin k\pi x. \tag{8}$$

Здесь $z_k(\tau, \xi)$ — n-мерные векторы, подлежащие определению. Выражение (8) можно рассматривать как замену переменных, приводящую систему (1) к квазинормальным координатам.

Подставляя (8) в систему (1), умножая обе части полученного тождества на $\sqrt{2}\sin m\pi x dx$ и интегрируя результат по x в пределах от 0 до 1, для определения векторов $z_m(\tau, \varepsilon)$, $m = 1, 2, \ldots$, получаем бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом, которую приведем к системе первого порядка:

$$\frac{dq_m(\tau,\varepsilon)}{dt} = H_m(\tau)\, q_m(\tau,\varepsilon) + G_m(\tau)\, q_m(\tau-\Delta,\varepsilon) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} H_{mk}(\tau,\varepsilon)\, q_k(\tau,\varepsilon) +$$

$$+ \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} G_{mk}(\tau,\varepsilon)\, q_k(\tau-\Delta,\varepsilon) + f_m(\tau,\varepsilon)\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\theta(\tau)\right), \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

с начальным условием

$$q_m(\tau,\varepsilon) = \rho_m(\tau,\varepsilon), \ -\Delta \leqslant \tau \leqslant 0, \tag{10}$$

где q_m, ρ_m, f_m — $2n$-мерные векторы; H_m, G_m, H_{mk}, G_{mk} — матрицы размеров $2n \times 2n$,

$$q_m = \begin{Vmatrix} z_m \\ \dfrac{dz_m}{dt} \end{Vmatrix}, \quad \rho_m = \begin{Vmatrix} \varphi_m \\ \psi_m \end{Vmatrix}, \quad f_m = \begin{Vmatrix} 0 \\ \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s p_m^{(s)}(\tau) \end{Vmatrix},$$

$$H_m(\tau) = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ -(m\pi)^2 A_1^{(0)}(\tau) & 0 \end{Vmatrix}, \quad G_m(\tau) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ A_3^{(0)}(\tau) - (m\pi)^2 A_2^{(0)}(\tau) & 0 \end{Vmatrix}, \tag{11}$$

$$H_{mk}(\tau,\varepsilon) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_{mk}^{(s)}(\tau) & 0 \end{Vmatrix}, \quad G_{mk}(\tau,\varepsilon) = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s B_{mk}^{(s)}(\tau) & 0 \end{Vmatrix}.$$

Рассмотрим характеристическое уравнение

$$\det(H_m(\tau) - \lambda_m(\tau) E) = 0, \ m = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

(E — единичная матрица размерами $2n \times 2n$). Случай, когда характеристическое уравнение (12) имеет простые корни, исследован в работе [4].

В данной статье строится алгоритм асимптотического решения для системы (9) в самом общем случае, когда кратному ненулевому корню соответствует несколько кратных элементарных делителей.

Итак, предположим, что уравнение (12) имеет один ненулевой корень $\lambda_m^{(0)}(\tau)$, $m = 1, 2, \ldots$, постоянной кратности $2n$, которому соответствует $r_m > 1$ элементарных делителей вида

$$(\lambda_m - \lambda_m^{(0)}(\tau))^{s_{m1}}, \ldots, (\lambda_m - \lambda_m^{(0)}(\tau))^{s_{mr_m}}, \ m = 1, 2, \ldots, \tag{13}$$

где $s_{m1} + \ldots + s_{mr_m} = 2n$, причем $s_{m1} > s_{m2} > \ldots > s_{mr_m}$, а также что

а) $\operatorname{Re}(\lambda_m^{(0)}(\tau)) \leqslant 0$, $m = 1, 2, \ldots$, $\forall \tau \in [0, L]$;

б) $\forall \tau_1 < \tau_2$, $\tau_1, \tau_2 \in [0, L]$, $\lambda_m^{(0)}(\tau_1) \neq \lambda_m^{(0)}(\tau_2)$, $m = 1, 2, \ldots$.

Тогда для матрицы $H_m(\tau)$ существует такая неособенная матрица $T_m(\tau)$, $m = 1, 2, \ldots$, что

$$W_m(\tau) = T_m^{-1}(\tau)\, H_m(\tau)\, T_m(\tau), \ m = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

где

$$W_m(\tau) = \operatorname{diag}(W_{m1}(\tau), \ldots, W_{mr_m}(\tau)), \ m = 1, 2, \ldots, \tag{15}$$

$$W_{mi}(\tau) = \left\| \begin{matrix} \lambda_m^{(0)}(\tau) & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_m^{(0)}(\tau) & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & & \lambda_m^{(0)}(\tau) \end{matrix} \right\|. \tag{16}$$

Не умаляя общности, считаем, что $H_m(\tau)$ уже имеет вид (15).

Решение задачи (9), (10) ищем в пространстве $\mathfrak{F} = C^{(l+1)}([0, L], l_2)$, состоящем из последовательностей функций непрерывно дифференцируемых по $\tau \in [0, L]$ $l+1$ раз включительно (l — любое натуральное число), которые для всех $\tau \in [0, L]$ принадлежат пространству l_2. Норму в пространстве $\mathfrak{F}$ определим так:

$$\| q(\tau, \varepsilon) \| = \sup_\tau \left(\sum_{k=1}^{\infty} | q_k(\tau, \varepsilon) |^2 \right)^{1/2}. \tag{17}$$

Следовательно, бесконечная система дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом (9) в пространстве $\mathfrak{F}$ представится в виде

$$dq(\tau, \varepsilon)/dt = H(\tau, \varepsilon) q(\tau, \varepsilon) + G(\tau, \varepsilon) q(\tau - \Delta, \varepsilon) + f(\tau, \varepsilon) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \theta(\tau)\right), \tag{18}$$

$$q(\tau, \varepsilon) = \rho(\tau, \varepsilon), \ -\Delta \leqslant \tau \leqslant 0. \tag{19}$$

Здесь $H(\tau, \varepsilon)$ и $G(\tau, \varepsilon)$ — операторы в пространстве $\mathfrak{F}$, порожденные соответственно матрицами $H_m(\tau)$, $H_{mk}(\tau, \varepsilon)$ и $G_m(\tau)$, $G_{mk}(\tau, \varepsilon)$, $m, k = 1, 2, \ldots$, а $f(\tau, \varepsilon)$, $\rho(\tau, \varepsilon)$, $q(\tau, \varepsilon)$ — бесконечномерные векторы из $\mathfrak{F}$.

Решение системы (18) на первом шаге ($0 \leqslant \tau \leqslant \Delta$) ищем в виде

$$q(\tau, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{r_1} U_{j,1}(\tau, \mu_j) y_j(\tau, \varepsilon) + \Pi_1(\tau, \varepsilon) + h_1(\tau, \varepsilon) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \theta(\tau)\right), \tag{20}$$

где $U_{j,1}(\tau, \mu_j)$ — прямоугольные матрицы размерами $(\infty \times s_{1j})$, $y_j(\tau, \varepsilon)$ — векторы размерности s_{1j}, $\Pi_1(\tau, \varepsilon)$ и $h_1(\tau, \varepsilon)$ — бесконечномерные векторы, $\mu_j = \sqrt[s_{1j}]{\varepsilon}$, причем

$$U_{j,1}(\tau, \mu_j) = \sum_{s=0}^{s_{1j}(l+1)-1} \mu_j^s U_{j,1}^{(s)}(\tau), \ \Pi_1(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{l} \varepsilon^s \Pi_1^{(s)}(\tau),$$

$$h_1(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{l} \varepsilon^s h_1^{(s)}(\tau). \tag{21}$$

Подставим выражение (20) в (18). Для того чтобы для векторов $y_i(\tau, \varepsilon)$ получить системы дифференциальных уравнений, интегрирующиеся с определенной точностью в замкнутой форме, будем искать матрицы $U_{j,1}(\tau, \mu_j)$ и векторы $\Pi_1(\tau, \varepsilon)$, $h_1(\tau, \varepsilon)$ из следующих соотношений:

$$H(\tau, \varepsilon) U_{j,1}(\tau, \mu_j) - \varepsilon \frac{dU_{j,1}(\tau, \mu_j)}{d\tau} = U_{j,1}(\tau, \mu_j)(\Lambda_{j,1}(\tau, \mu_j) + \mu_i^{s_{1j}(l+1)} V_{j,1}(\tau, \mu_j)), \tag{22}$$

где $\Lambda_{j,1}(\tau, \mu_j)$ — диагональная матрица размерами $s_{1j} \times s_{1j}$,

$$\Lambda_{j,1}(\tau, \mu_j) = \sum_{s=0}^{s_{1j}l} \mu_j^s \Lambda_{j,1}^{(s)}(\tau), \tag{23}$$

$$H(\tau, \varepsilon)\Pi_1(\tau, \varepsilon) - \varepsilon \frac{d\Pi_1(\tau, \varepsilon)}{d\tau} + G(\tau, \varepsilon)\rho(\tau - \Delta, \varepsilon) = \varepsilon^{l+1} C_1(\tau, \varepsilon), \quad (24)$$

$$H(\tau, \varepsilon) h_1(\tau, \varepsilon) - i\nu(\tau) h_1(\tau, \varepsilon) - \varepsilon \frac{dh_1(\tau, \varepsilon)}{d\tau} + f(\tau, \varepsilon) = \varepsilon^{l+1} D_1(\tau, \varepsilon), \quad (25)$$

$V_{j,1}(\tau, \mu_j)$ — квадратные матрицы порядка s_{1j}, равномерно ограниченные в окрестности точки $\varepsilon = 0$, бесконечномерные векторы $C_1(\tau, \varepsilon)$, $D_1(\tau, \varepsilon)$ — являются равномерно ограниченными в окрестности $\varepsilon = 0$; $\nu(\tau) = d\theta(\tau)/d\tau$.

Используя метод, изложенный в [1, 5], можно получить рекуррентные соотношения, которые позволяют последовательно определить члены сумм (21), (23).

Теорема 1. *Если выполняются условия* 1—5, а), б), *а также*

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{s=0}^{s_{1j}-1} \mu_j^s \Lambda_{j,1}^{(s)}(\tau)\right) \leqslant 0 \quad \forall \tau \in [0, L], \quad (26)$$

то система дифференциальных уравнений (18) *на первом шаге* $(0 \leqslant \tau \leqslant \Delta)$ *имеет решение вида*

$$q(\tau, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{r_1} U_{j,1}(\tau, \mu_j) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \Lambda_{j,1}(\tau, \mu_j)\, ds\right)\widetilde{C}_{j,1} + \Pi_1(\tau, \varepsilon) +$$

$$+ h_1(\tau, \varepsilon) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\theta(\tau)\right) + \mu^{\frac{l+1-s_{11}}{s_{11}}} \gamma_1(\tau, \varepsilon), \quad (27)$$

где $\widetilde{C}_{j,1}$ — *постоянные векторы размерности* s_{1j}, $\gamma_1(\tau, \varepsilon)$ — *бесконечномерный вектор, равномерно ограниченный в окрестности точки* $\varepsilon = 0$.

Построив решение системы (18) на первом шаге, аналогично, методом шагов [6], можно построить решение этой системы на втором шаге, затем на третьем и т. д.

Для произвольного шага справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Если выполняются условия* 1—5, а), б), (26), *то система дифференциальных уравнений* (18) *на р-м шаге* $((p-1)\Delta \leqslant \tau \leqslant p\Delta)$ *имеет решение вида*

$$q(\tau, \varepsilon) = \sum_{j=1}^{r_1}\left(U_{j,p}(\tau, \mu_j) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{(p-1)\Delta}^{\tau} \Lambda_{j,p}(s, \mu_j)\, ds\right)\widetilde{C}_{j,p} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\nu=1}^{p-1} R_{j,\nu}(\tau, \mu_j) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{(p-1-\nu)\Delta}^{\tau-\nu\Delta} \Lambda_{j,\nu}(s, \mu_j)\, ds\right)\widetilde{C}_{j,\nu}\right) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p-1} \eta_j(\tau, \varepsilon) \exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\theta(\tau - \Delta j)\right) + \Pi_p(\tau, \varepsilon) + h_p(\tau, \varepsilon)\exp\left(\frac{i}{\varepsilon}\theta(\tau)\right) +$$

$$+ \mu_1^{\frac{1}{s_{11}^{p-1}}\left(l+1-\sum_{i=1}^{p} s_{11}^{i}\right)} \gamma_p(\tau, \varepsilon),$$

где $\widetilde{C}_{j,p}$, $\widetilde{C}_{j,\nu}$ — *постоянные векторы;* $\gamma_p(\tau, \varepsilon)$ — *бесконечномерный вектор, равномерно ограниченный в окрестности точки* $\varepsilon = 0$; $U_{j,p}(\tau, \mu_j)$ *и* $R_{j,\nu}(\tau, \mu_j)$ — *матрицы размерами* $(\infty \times s_{1j})$; $\Lambda_{j,p}(s, \mu_j)$ *и* $\Lambda_{j,\nu}(s, \mu_j)$ — *матрицы размерами* $(s_{1j} \times s_{1j})$; $\Pi_p(\tau, \varepsilon)$, $h_p(\tau, \varepsilon)$ *и* $\eta_j(\tau, \varepsilon)$ — *бесконечномерные векторы, имеющие разложения в виде конечных сумм по степеням параметров* μ_j *и* ε *соответственно.*

Таким образом, указав алгоритм построения векторов $q_m(\tau, \varepsilon)$, $m = 1, 2, \ldots$, можно легко найти из (11) векторы $z_m(\tau, \varepsilon)$ и тем самым решение задачи (1)—(3).

1. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1966.— 252 с.
2. *Асимптотические* методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиль, Ю. П. Пидченко, Н. А. Сотниченко.— Киев : Наук. думка, 1981.— 294 с.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 504 с.
4. *Домницкий В. Н.* Об асимптотическом представлении решений для системы интегро-дифференциальных уравнений с запаздыванием по времени.— В кн.: Приближенные методы математического анализа. Киев : Киев. пед. ин-т, 1976, с. 168—188.
5. *Шкиль Н. И.* Асимптотическое решение системы линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.— В кн.: Вопросы теории и истории дифференциальных уравнений. Киев : Наук. думка, 1968, с. 165—182.
6. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— М. : Наука, 1971.— 296 с.

Житомир. пед. ин-т

Получено 04.09.84