УДК 519.21

А. А. Дороговцев

О характеристическом функционале квадратичной формы от гауссовских элементов в гильбертовой алгебре

Пусть H — сепарабельная вещественная гильбертова алгебра с инволюцией [1]. Далее используются обозначения: θ — нулевой элемент в H; $(\cdot,\ \cdot)$, $\|\cdot\|$ и $*$ — соответственно скалярное произведение, норма и инволюция в H. Пусть $\{X_k;\ k \geqslant 1\}$ —последовательность гауссовских независимых случайных элементов, принимающих значения в H и имеющих среднее значение θ; $\{S_k;\ k \geqslant 1\}$ — соответствующая последовательность корреляционных операторов.

Пусть $\{a_{kj};\ k,\ j \geqslant 1\} \subset \mathbb{R}$. Предположим, что выполнены условия: 1) $\sum\limits_{k,j=1}^{\infty} |a_{kj}| < +\infty$, 2) $\sup\limits_{k \geqslant 1} \operatorname{tr} S_k = L < +\infty$. В [2] было доказано, что при выполнении условий 1 и 2 в H существует случайный элемент $\sum\limits_{k,j=1}^{\infty} a_{kj} X_k X_j :=$ $:= \lim\limits_{n \to \infty} \sum\limits_{k,j=1}^{n} a_{kj} X_k X_j \pmod P$.

Определим вид характеристического функционала меры, задаваемой в H этим элементом. Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения. Пусть E — вещественное сепарабельное гильбертово пространство, $A : E \to E$ — симметричный линейный оператор, $B : E \to E$ — симметричный положительный линейный оператор, имеющий собственный базис в E. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Если AB — ядерный оператор, то $B^{1/2}AB^{1/2}$ — также ядерный оператор.*

Доказательство. Пусть $\{e_k;\ k \geqslant 1\}$ — собственный базис B, $\{\lambda_k;\ k \geqslant 1\}$ — соответствующая последовательность собственных чисел B. Рассмотрим сначала случай, когда A — неотрицательный оператор. Тогда для доказательства леммы достаточно проверить, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (B^{1/2}AB^{1/2}e_k;\ e_k) < +\infty$. Имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} (B^{1/2}AB^{1/2}e_k;\ e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{\lambda_k} B^{1/2}Ae_k;\ e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (B^{1/2}Ae_k;\ B^{1/2}e_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} (Ae_k;\ Be_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (ABe_k;\ e_k) < +\infty,$$

так как по условию AB — ядерный оператор.

В общем случае оператор A можно представить в виде $A = A_1 - A_2$, где A_1, A_2 — неотрицательные операторы и

$$\forall \varphi \in E: \| A_i \varphi \| \leqslant \| A \varphi \|,\ i = 1, 2. \tag{1}$$

Представление получается из спектрального разложения оператора $A : A = \int\limits_{-\|A\|}^{\|A\|} \lambda dG(\lambda)$, где G — соответствующее разложение единицы. Положим теперь

$$A_1 = \int\limits_0^{\|A\|} \lambda dG(\lambda),\ A_2 = -\int\limits_{-\|A\|}^{0} \lambda dG(\lambda).$$

Требуемые неравенства (1) следуют из свойств спектрального интеграла. Докажем, что $A_i B$, $i = 1, 2$, ядерные. Рассмотрим для ядерного оператора AB полярное разложение $AB = UV$. Здесь U — унитарный оператор, V — неотрицательный ядерный оператор с собственным базисом $\{f_k;\ k \geqslant 1\}$ [3]. Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| A_i B f_k \| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \| AB f_k \| = \sum_{k=1}^{\infty} \| UV f_k \| =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \| V f_k \| = \sum_{k=1}^{\infty} (V f_k;\ f_k) < +\infty,\ i = 1, 2.$$

Следовательно, операторы $A_i B$, $i = 1, 2$, ядерные. Поэтому, как было доказано ранее, операторы $B^{1/2} A_i B^{1/2}$, $i = 1, 2$, также ядерные, а вместе с ними ядерным будет и оператор $B^{1/2} A B^{1/2}$

Введем обозначения. Пусть $\{L_n;\ n \geqslant 1\}$ — последовательность подпространств такая, что 1) $\forall n \geqslant 1\ L_n \subset L_{n+1}$, $B(L_n) \subset L_n$; 2) $\overline{\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n} = E$; 3) $\forall n \geqslant 1$ оператор $P_n B P_n$ ядерный (P_n — проектор на L_n). Для каждого $n \geqslant 1$ рассмотрим в L_n гауссовский случайный элемент Z_n со средним значением θ и корреляционным оператором $P_n B P_n$, а также вещественную случайную величину $\eta_n = (P_n A P_n Z_n;\ Z_n)$. Справедлива следующая лемма.

Л е м м а 2. *Если оператор AB ядерный, то последовательность $\{\eta_n;\ n \geqslant 1\}$ сходится по распределению к случайной величине η, которая имеет характеристическую функцию следующего вида:*

$$\Psi(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - 2it\mu_k}},\ t \in \mathbb{R}.$$

Здесь $\{\mu_k;\ k \geqslant 1\}$ — все собственные числа оператора $B^{1/2} A B^{1/2}$, причем каждое собственное число повторено столько раз, какова его кратность.

Заметим, что лемма 2 обобщает результат И. А. Ибрагимова [4] о распределении квадратичного функционала от гауссовского случайного элемента в гильбертовом пространстве. Результат И. А. Ибрагимова следует из леммы 2 в случае, когда оператор B ядерный.

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы 2. При каждом $n \geqslant 1$ по теореме И. А. Ибрагимова [4] случайная величина η_n имеет характеристическую функцию вида

$$\Psi_n(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - 2it\mu_k^n}},\ t \in \mathbb{R},$$

где $\{\mu_k^n;\ k\geqslant 1\}$ — последовательность всех собственных чисел оператора $T_n := P_n B^{1/2} A B^{1/2} P_n := P_n T P_n$, учитываемых каждое столько раз, какова его кратность. Не ограничивая общности, можно считать, что при каждом $n\geqslant 1$ $\{\mu_k^n;\ k\geqslant 1\}$ расположены в порядке невозрастания модуля. Так как при каждом $k\geqslant 1$ последовательность $\{\mu_k^n; n\geqslant 1\}$ ограничена, то, пользуясь диагональным методом Кантора, можно выделить подпоследовательность натуральных чисел такую, что $\forall k\geqslant 1: \mu_k^{n(m)}\to\mu_k,\ m\to\infty$. Как и при доказательстве теоремы И. А. Ибрагимова, можно показать, что $\{\mu_k;\ k\geqslant 1\}$ — все собственные числа оператора T, расположенные в порядке невозрастания модуля и учитываемые каждое столько раз, какова его кратность. При этом ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\mu_k^{n(m)})^2$ сходятся равномерно по $m\geqslant 1$. Следовательно, $\forall k\geqslant 1 \exists \lim\limits_{n\to\infty}\mu_k^n=\mu_k$; иначе можно выделить подпоследовательность $\{n'(l),\ l\geqslant 1\}$, отличную от $\{n(m),\ m\geqslant 1\}$, и получить систему $\{\mu_k';\ k\geqslant 1\}$, отличную от $\{\mu_k;\ k\geqslant 1\}$. При этом также справедливо утверждение о равномерной сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\mu_k^n)^2,\ \ n\geqslant 1$. Из доказанного следует, что

$\forall t\in\mathbb{R}$

$$\Psi_n(t)=\prod_{k=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1-2it\mu_k^n}}\to\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{1-2it\mu_k}}=\Psi(t),\ n\to\infty,$$

причем Ψ является характеристической функцией. Отсюда следует утверждение леммы 2.

Пусть $\tilde{H}=\left\{\tilde{x}=(x_1,\ldots,x_n,\ldots)\,|\,x_n\in H,\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^2<+\infty\right\}$. Введем в $\tilde{H}$ покоординатное сложение элементов и умножение на число из $\mathbb{R}$. Скалярным произведением в $\tilde{H}$ будем называть выражение вида $(\tilde{x};\ \tilde{y}) := \sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n;\ y_n),\ \tilde{x}=(x_1,\ldots,x_n,\ldots),\ \tilde{y}=(y_1,\ldots,y_n,\ldots)$. С введенными операциями $\tilde{H}$ будет гильбертовым сепарабельным пространством [5]. Пусть теперь $y\in H$ фиксировано. Рассмотрим в $\tilde{H}$ два оператора: $\tilde{S}\tilde{x} := (S_1x_1, S_2x_2, \ldots, S_nx_n, \ldots)$, $\tilde{A}_y\tilde{x} := \left(\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2}(a_{kj}yx_j^*+a_{jk}x_j^*y);\ k\geqslant 1\right)$, $\tilde{x}\in\tilde{H}$. Легко видеть, что $\tilde{S}$ — неотрицательный самосопряженный оператор в $\tilde{H}$, $\tilde{A}_y$ — самосопряженный оператор на $\tilde{H}$, причем $\exists c\in\mathbb{R}:\forall y\in H\ \|\tilde{A}_y\|\leqslant c\|y\|$.

Докажем, что $\tilde{A}_y\tilde{S}$ — ядерный оператор в $\tilde{H}$. Рассмотрим для этого в $\tilde{H}$ специальный ортонормированный базис $\tilde{e}_{km}=(e_{km}\delta_{ik};\ i\geqslant 1),\ k,\ m\geqslant 1$. Здесь $\{e_{km};\ m\geqslant 1\}$ — собственный базис для $S_k,\ k\geqslant 1$. Достаточно доказать [3], что

$$\sum_{k,m=1}^{\infty}\|\tilde{A}_y\tilde{S}\tilde{e}_{km}\|<+\infty.$$

Действительно,

$$\sum_{k,m=1}^{\infty}\|\tilde{A}_y\tilde{S}\tilde{e}_{km}\|\leqslant\frac{1}{2}\|y\|\sum_{k,m=1}^{\infty}\left(\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}a_{jk}^2}\,\|S_ke_{km}\|+\right.$$

$$+\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty} a_{kj}^2 \| S_k e_{km} \|}\Bigg) \leqslant \| y \| \sum_{k,j=1}^{\infty} | a_{kj} | \operatorname{tr} S_k \leqslant \| y \| L \sum_{k,j=1}^{\infty} | a_{kj} |.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Для каждого* $y \in H$ *имеем*

$$M \exp i \left(y;\ \sum_{k,j=1}^{\infty} a_{kj} X_k X_j \right) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{1 - 2i\mu_k(y)}},$$

где $\{\mu_k(y);\ k \geqslant 1\}$ — *последовательность всех собственных чисел оператора* $\tilde{S}^{1/2} \tilde{A}_y \tilde{S}^{1/2}$, *записанных каждое столько раз, какова его кратность.*

Доказательство. Рассмотрим последовательность подпространств $\tilde{H}$: $\forall n \geqslant 1 : L_n := \{\tilde{x} = (x_1, \ldots, x_n, \theta, \ldots, \theta, \ldots)\}$. Теперь по $\{L_n\}$, $\tilde{A}_y$, $\tilde{S}$ построим случайные величины $\{\eta_n;\ n \geqslant 1\}$, как в лемме 2. Для завершения доказательства заметим, что $\eta_n = \left(\sum_{k,j=1}^{n} a_{kj} X_k X_j;\ y \right)$ и применим лемму 2. Отметим, что $\mu_k(y) = \| y \| \mu_k (y / \| y \|)$, $k \geqslant 1$, $y \in H \setminus \{\theta\}$.

В случае $H = \mathbb{R}$ полученный результат согласуется с результатом Б. А. Севастьянова о предельных распределениях квадратичных форм от гауссовских случайных величин [6].

1. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца.— М. : Наука, 1968.— 664 с.
2. *Дороговцев А. А.* Сходимость квадратичных форм случайных элементов в банаховой алгебре.— Теория вероятностей и мат. статистика, 1984, вып. 31, с. 31—39.
3. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.— Л. : Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.— 264 с.
4. *Ибрагимов И. А.* Об оценке спектральной функции стационарного гауссовского процесса.— Теория вероятностей и ее применения, 1963, 8, № 4, с. 391—430.
5. *Рихтмайер Р.* Принципы современной математической физики.— М. : Мир, 1982.— 488 с.
6. *Севастьянов Б. А.* Класс предельных законов распределения квадратичных форм от нормальных случайных величин.— Теория вероятностей и ее применения, 1961, 6, № 3, с. 368—372.

Киев. ун-т — Получено 20.09.84