УДК 519.41/47

В. Э. Горецкий, Н. Ф. Кузенный

О некоторых центральных расширениях посредством группы кватернионов

Группа G называется центральным расширением подгруппы Z с помощью группы H, если $Z \leqslant Z(G)$ и $G/Z \cong H$.

Нередко при описании строения группы приходится иметь дело с центральными расширениями, в частности с центральными расширениями с помощью дедекиндовых групп [1, 2]. Сама по себе задача изучения строения всех центральных расширений подгруппы Z с помощью группы H сложная и, как правило, может быть удовлетворительно решена при определенных ограничениях на Z и H.

В настоящей работе дано описание строения групп, являющихся центральным расширением с помощью группы кватернионов, а также установлены некоторые свойства центральных расширений полной группы с помощью гамильтоновой группы. Из них, в частности, следует, что центральное расширение полной группы с помощью гамильтоновой содержит инвариантно дополняемую подгруппу кватернионов, а в центральном расширении полной группы с помощью кватернионной группы эта подгруппа выделяется прямым множителем.

Предложение 1 (см., например, [3]). *Конечные неабелевы p-группы, в которых все собственные подгруппы абелевы (p-группы Миллера—Морено), исчерпываются группами следующих видов*:

1) $M_1 = \langle a \rangle \cdot \langle b \rangle,\ a^4 = b^4 = e,\ [a, b] = a^2 = b^2$;

2) $M_2 = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle,\ |a| = p^m,\ |b| = p^n,\ m \geqslant 2,\ n \geqslant 1,\ [a, b] = a^{p^{m-1}}$;

3) $M_3 = (\langle a \rangle \times \langle c \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle,\ c^p = a^{p^m} = b^{p^n} = e,\ [a, b] = c,\ [b, c] = e$.

Предложение 2. *Конечная p-группа P тогда и только тогда является группой Миллера—Морено, когда она порождается двумя неперестановочными элементами и $\Phi(P) \leqslant Z(P)$.*

Доказательство. Достаточность. Пусть P — конечная p-группа, порожденная неперестановочными элементами a и b и $\Phi(P) \leqslant Z(P)$. Очевидно, $P/\Phi(P)$ является элементарной абелевой группой порядка p^2. В силу того, что подгруппа $\Phi(P)$ содержится во всякой максимальной подгруппе P_1 из P и индекс подгруппы P_1 в P равен p, порядок фактор-группы $P_1/\Phi(P)$ также равен p. Но так как $\Phi(P) \leqslant Z(P)$, то подгруппа P_1 абелева и, значит, P — группа Миллера—Морено. Достаточность доказана. Необходимость очевидна. Предложение доказано.

Теорема 1. *Центральные расширения подгруппы Z с помощью группы кватернионов исчерпываются группами следующих видов*:

1) $G = Z \leftthreetimes H$, *где Z — абелева, H — группа кватернионов*;

2) $G = Z \cdot H$, *где* $Z \leqslant Z(G)$, $H = \langle a \rangle \rtimes \langle b \rangle$, $|a| = 4$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, b — *элемент либо бесконечного порядка, либо порядка* 2^n, $n \geqslant 2$ *и* $H \cap Z = \langle a^2b^2 \rangle$;

3) $G = Z \cdot H$, *где* $Z \leqslant Z(G)$, $H = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, $|c| = 2$, a — *элемент либо бесконечного порядка, либо порядка* 2^m, $m \geqslant 2$; b — *элемент либо бесконечного порядка, либо порядка* 2^n, $n \geqslant 2$; $[a, b] = c$ и $H \cap Z = \langle ca^2 \rangle \times \langle cb^2 \rangle$.

Доказательство. Необходимость. Пусть группа G является центральным расширением подгруппы Z и G/Z — группа кватернионов. Тогда группу G можно представить в виде произведения двух подгрупп Z и $H : G = Z \cdot H$. Не нарушая общности, можно принять, что группа H порождена двумя элементами a и b, причем если какой-либо из элементов a или b имеет конечный порядок, будем считать, что он наименьший из возможных.

Так как $H/Z \cap H$ — группа кватернионов, то $a^4 \in Z$, $b^4 \in Z$ и в Z существуют такие элементы z_1 и z_2, что

$$a^2 = z_1b^2 = z_2[a, b]. \tag{1}$$

Подгруппа $\langle Z, a \rangle$ абелева и содержит элемент $b^2 = z_1^{-1}a^2$, подгруппа $\langle Z, b \rangle$ также абелева и содержит элемент $a^2 = z_1b^2$. Но тогда $\langle Z, a \rangle \cap \langle Z, b \rangle \geqslant \langle a^2, b^2 \rangle$ и $C_G(\langle a^2, b^2 \rangle) \geqslant H = \langle a, b \rangle$. Таким образом, $Z(H) \geqslant \langle a^2, b^2 \rangle$.

Положим $c = [a, b]$ $(c \neq e)$. Из $c = z_2^{-1}a^2$ (следует из (1)) и $a^2 \in Z(H)$ получаем $c \in Z(H)$. Отсюда вытекает равенство $|c| = 2 = |H'|$, так как $e = [a^2, b] = [a, b]^2 = c^2$.

Выбор подгруппы H обеспечивает для фактор-группы $\overline{H} = H/\langle c \rangle$ разложение $\overline{H} = \langle \overline{a} \rangle \times \langle \overline{b} \rangle$, где, не нарушая общности, можно считать, что $\overline{a} = \langle c \rangle a$ и $\overline{b} = \langle c \rangle b$.

Рассмотрим возможные случаи относительно порядков $|\overline{a}|$ и $|\overline{b}|$.

1. Элементы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ имеют бесконечные порядки. В этом случае элементы a и b также имеют бесконечные порядки и подгруппа $\langle c, a \rangle = \langle c \rangle \times \langle a \rangle$ (так как $|c| = 2$, $|a| = \infty$) инвариантна в H. Ввиду изоморфизма $H/(\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \cong \overline{H}/\langle \overline{a} \rangle$ далее следует, что подгруппа $\langle c \rangle \times \langle a \rangle$ имеет в H бесконечный индекс и потому $(\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \cap \langle b \rangle = \langle e \rangle$. Следовательно, $H = (\langle c \rangle \times \langle a \rangle) \rtimes \langle b \rangle$, и так как $c = [a, b]$, $T = (\langle c^{-1}a^2 \rangle \times \langle c^{-1}b^2 \rangle) \leqslant Z(G)$ и фактор-группа H/T изоморфна группе кватернионов, то $Z \cap H = T$. Таким образом, группа G является группой вида 3 теоремы.

2. Хотя бы один из элементов $\overline{a}$ или $\overline{b}$, например $\overline{a}$, имеет конечный порядок. В этом случае порядок элемента a должен делиться на 2. В самом деле, так как $a \notin Z(G)$, $a^2 \in Z(G)$, то $\langle a^2 \rangle \neq \langle a \rangle$ и значит, $2 \mid |a|$.

Пусть $\langle a \rangle = \langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle$, где $\langle a_1 \rangle$ — силовская 2-подгруппа из $\langle a \rangle$. Тогда из условия $a^2 \in Z(G)$ получаем $\langle a_2 \rangle = \langle a_2^2 \rangle \leqslant Z(G)$ и (так как $|G/Z| = 8$) $\langle a_2 \rangle \leqslant Z$.

Согласно выбору элемент a имеет минимальный возможный порядок. Поэтому ввиду соотношения $|\langle Za \rangle| = 4$, $\langle a \rangle = \langle a_1 \rangle$, $|a| = 2^m$, $m \geqslant 2$.

2а). Пусть элемент b имеет бесконечный порядок. Тогда, как и раньше, $H = \langle c, a \rangle \rtimes \langle b \rangle$. Для подгруппы $H_1 = \langle c, a \rangle$ имеются две возможности: $c \in \langle a \rangle$ или $c \notin \langle a \rangle$.

Если $c \in \langle a \rangle$, то $\langle c \rangle = \langle a^{2^{m-1}} \rangle$ и условия $c \notin Z$, $a^4 \in Z$ влекут теперь $a^4 = e$. Из неабелевости группы H, наконец, получаем соотношение $b^{-1}ab = a^{-1}$. Непосредственной проверкой нетрудно убедиться, что фактор-группа $H/\langle cb^2 \rangle$ изоморфна группе кватернионов и, значит, $Z \cap H = \langle cb^2 \rangle$. Следовательно, группа G имеет вид 2 теоремы.

Если же $c \notin \langle a \rangle$, то $H_1 = \langle c \rangle \times \langle a \rangle$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что и здесь фактор-группа $H/(\langle ca^2 \rangle \times \langle cb^2 \rangle)$ изоморфна группе кватернионов. Следовательно, $Z \cap H = \langle ca^2 \rangle \times \langle cb^2 \rangle$. Таким образом, группа G является группой вида 3 теоремы.

2б). Пусть, наконец, элемент b имеет конечный порядок. Так как $H' \leqslant Z(H)$, $\langle a^2, b^2 \rangle \leqslant Z(H)$ и $|H'| = 2$, то подгруппа H является 2-группой с двумя образующими a и b и $\Phi(H) = H^2 \leqslant Z(H)$. Тогда по предложению 2 подгруппа H является группой одного из видов, указанных в предложении 1.

Если группа H имеет вид 1 предложения 1, то, очевидно, $\langle e \rangle = Z \cap H$ и, следовательно, группа G имеет вид 1 теоремы.

Если H имеет вид 2 предложения 1, то, очевидно, группа G имеет вид 2 теоремы.

Если же группа H имеет вид 3 предложения 1, то, очевидно, $H \cap Z = \langle ca^2 \rangle \times \langle cb^2 \rangle$ и группа G относится к виду 3 теоремы. Необходимость доказана. Достаточность очевидна. Теорема доказана.

Следствие 1. *Коммутант G' группы G, удовлетворяющей условию теоремы, имеет порядок равный двум и $G' \cap Z = \langle e \rangle$.*

Так как обобщенная группа кватернионов содержит кватернионную группу, то из теоремы легко получаются такие следствия.

Следствие 2 (см. [4, с. 94] упражнение 58). *Фактор-группа по центру не может быть обобщенной группой кватернионов.*

Предложение 3 ([5, с. 101] предложение 2.4). *Полная инвариантная абелева подгруппа A группы G тогда и только тогда выделяется в G прямым множителем, когда $G' \cap A = \langle e \rangle$.*

Следствие 3. *Центральное расширение G полной группы Z с помощью группы кватернионов расщепляемо, т. е. $G = Z \times Q$, где Q — группа кватернионов.*

Доказательство. Группа G удовлетворяет, очевидно, условию теоремы и потому по следствию 1 $G' \cap Z = \langle e \rangle$. Но тогда по предложению 3 $G = Z \times Q$, где Q — группа кватернионов. Следствие доказано.

Из полученных выше результатов вытекает такая теорема.

Теорема 2. *Если группа G является центральным расширением полной подгруппы с помощью гамильтоновой, то группа G представима в виде $G = Z_0 \times (D \rightthreetimes Q) \times G_1$, где Z_0 — полная абелева группа без кручения либо тривиальная группа, подгруппа $(D \rightthreetimes Q) \times G_1$ периодическая и Q — группа кватернионов.*

Следствие 4. *Центральное расширение полной группы с помощью гамильтоновой содержит группу кватернионов, которая инвариантно дополняема.*

1. *Черников С. Н.* О строении групп с конечными классами сопряженных элементов.— Докл. АН СССР, 1957, **115**, № 1, с. 60—63.
2. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы бесконечных подгрупп.— Там же, 1966, **171**, № 4, с. 806—809.
3. *Redei L.* Das «Schiefe Produkt» in Gruppentheorie mit Anwendungen... — Comment. math. helv., 1947, **20**, S. 225—264.
4. *Huppert B.* Endliche Gruppen, I.— Berlin etc.: Springer, 1967. — 793 S.
5. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.

Хмельниц. технол. ин-т бытового обслуживания,
НПО «Горсистемотехника», Киев

Получено 23.10.81,
после доработки — 16.04.85