УДК 512.546

В. С. Чарин

Топологические группы с обобщенным условием минимальности для подгрупп

Изучаются локально компактные локально разрешимые группы с обобщенным условием минимальности для замкнутых абелевых подгрупп.

Вивчаються локально компактні локально розв'язувані групи з узагальненою умовою мінімальності для замкнених абелевих підгруп.

Топологическая группа называется группой с условием минимальности (УМ) для замкнутых подгрупп, если любая убывающая последовательность ее замкнутых подгрупп содержит конечное число подгрупп. Подгруппами топологических групп, как правило, называем их замкнутые подгруппы (если не потребуется особо отметить это свойство). Все рассматриваемые группы предполагаются локально компактными.

Некоторые классы топологических групп с УМ изучал В. М. Глушков. Он доказал [1], что локально компактная локально разрешимая группа удовлетворяет УМ для подгрупп тогда и только тогда, когда она является конечным расширением абелевой группы. Эта теорема — аналог известной теоремы С. Н. Черникова о дискретных локально разрешимых группах с условием минимальности для подгрупп.

Определение 1. *Бесконечная убывающая последовательность*

$$G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset G_{n+1} \supset \ldots \tag{1}$$

подгрупп топологической группы G называется обладающей сколь угодно малыми подгруппами, если для любой окрестности U ее единичного элемента e найдется такое натуральное число m, что $G_m \subset U$.

Определение 2. *Топологическая группа G называется группой с обобщенным условием минимальности (ОУМ) для подгрупп, если любая имеющаяся в ней бесконечная убывающая последовательность* (1) *замкнутых подгрупп содержит сколь угодно малые подгруппы.*

Понятно, что к такому типу групп естественно относятся и те группы, которые не имеют последовательностей подгрупп вида (1), т. е. группы с УМ для подгрупп.

Имеет смысл рассматривать также группы, удовлетворяющие ОУМ для тех или иных классов подгрупп (например, для абелевых, инвариантных и др.).

Выделим два класса топологических групп с ОУМ.

Класс $\mathcal{K}_1$. Локально компактные разрешимые группы, удовлетворяющие УМ для подгрупп. Каждая группа этого класса — конечное расширение абелевой группы.

Строение абелевых групп с УМ описывает известная теорема В. М. Глушкова: абелева группа H удовлетворяет УМ тогда и только тогда, когда она разлагается в прямое произведение

$$H = F \times C_1 \times C_2 \times \ldots \times C_m \times T^n \tag{2}$$

конечного числа подгрупп, где F — конечная группа: C_k — дискретная квазициклическая p_k-группа, т. е. группа типа p_k^{∞}, p_k — простое число, $k = 1, 2, \ldots, m$; T^n — торовидная группа конечной размерности n (T^1 — множество чисел вида $e^{2\pi i x}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$).

Класс $\mathcal{K}_2$. Аддитивные группы полей Q_p p-адических чисел и колец $\mathbb{Z}_p$ целых p-адических чисел (p — простое число). Все группы, изоморфные им.

Обозначим через R_p аддитивную группу поля $Q_p: R_p = Q_p^+$, через J_p аддитивную группу кольца $\mathbb{Z}_p: J_p = \mathbb{Z}_p^+$, $J_p^n = p^n \cdot J_p = \{y \in R_p : y = p^n \cdot x, x \in J_p\}$, $n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

Подгруппы J_p^n монотетичны и изоморфны J_p. Они исчерпывают все собственные подгруппы из R_p.

В работе [2] предпринята попытка изучения групп с ОУМ. Нам потребуется следующая доказанная там лемма.

Лемма 1. *Абелева локально компактная группа, удовлетворяющая ОУМ для подгрупп, принадлежит либо классу $\mathcal{K}_1$, либо классу $\mathcal{K}_2$.*

Приведем несколько сведений из арифметики p-адических чисел [3, с. 177—178].

Если p — простое число, отличное от 2, то любое число $a \neq 0$ из поля Q_p однозначно представляется в виде

$$a = p^n \cdot w^m \cdot (1 + p)^x, \quad \text{где} \begin{cases} n \text{ — целое рациональное число;} \\ m \bmod (p-1); \\ x \in \mathbb{Z}_p; \end{cases}$$

где w — первообразный корень степени $p-1$ из 1 (он принадлежит кольцу $\mathbb{Z}_p$).

Любое число $a \neq 0$ из поля Q_2 однозначно представляется в виде

$$a = p^n \cdot (-1)^m \cdot (1+2^2)^x, \text{ где } \begin{cases} n \text{ — целое рациональное число;} \\ m \bmod 2; \\ x \in \mathbb{Z}_2; \end{cases}$$

Обозначим через $\exp J_p$ множество всех чисел поля Q_p, представимых в виде $(1+p)^x$ (соответственно в виде $(1+2^2)^x$ при $p=2$), где x пробегает кольцо $\mathbb{Z}_p$: $\exp J_p = \{y \in Q_p : y = E^x, x \in \mathbb{Z}_p\}$. Здесь $E = 1+p$, если $p \neq 2$, и $E = 1+2^2$, если $p=2$. Далее число E_x обозначаем через $\exp x$.

Множество $\exp J_p$ относительно операции умножения — группа, изоморфная аддитивной группе J_p. А именно отображение $J_p \to \exp J_p$, определяемое законом $x \to \exp x$, является изоморфизмом в p-адической топологии.

Таким образом, мультипликативная группа поля Q_p разлагается в произведение

$$Q_p^x = \{p\} \times \{w\} \times \exp J_p, \tag{3}$$

где $\{p\}$ — свободная циклическая группа; $\{w\}$ — циклическая группа порядка $p-1$ для $p \neq 2$ и порядка 2 для $p=2$; $\exp J_p$ — мультипликативная группа, изоморфная аддитивной группе J_p.

Лемма 2. *Выполняется соотношение*

$$x \cdot \exp a \equiv x \pmod{p^{n+1}}, \quad x \in J_p, \quad a \in J_p^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

т. е. $x \cdot [\exp a - 1] \in J_p^{n+1}$, *если* $x \in J_p$, $a \in J_p^n$, $n \geqslant 0$.

Лемма 3. *Пусть локально компактная группа G удовлетворяет ОУМ для ее абелевых подгрупп и содержит инвариантную абелеву подгруппу $H \neq e$, удовлетворяющую УМ. Тогда и все абелевы подгруппы из G удовлетворяют УМ.*

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно установить: группа G не содержит подгрупп типа J_p.

Допустим обратное: пусть в G найдется подгруппа A, изоморфная группе J_p. Она монотетична: в ней содержится такой элемент a, что замыкание $\overline{\{a\}}$ циклической подгруппы $\{a\}$ совпадает с A.

Подгруппа H с УМ разлагается в произведение вида (2). Поэтому для подходящего простого числа q множество H_q всех ее q-элементов является нетривиальной подгруппой (в дискретной топологии). Обозначим через B нижний слой этой подгруппы. Подгруппа B разлагается в прямое произведение конечного числа циклических подгрупп порядка q. Она — характеристическая в H и, следовательно, инвариантна в группе G.

Произведение $F = A \cdot B$ — замкнутая подгруппа с конечной инвариантной подгруппой B и $A \cap B = e$. При этом $F/B \cong A$. Централизатор $C_F(B)$ подгруппы B в F имеет в F конечный индекс и поэтому пересечение $A_1 = A \cap C_F(B)$ имеет в A конечный индекс. Подгруппа $A_1 \cong J_p$ и поэтому монотетична: $A_1 = \overline{\{a_1\}}$. Так как элемент a_1 перестановочен с элементами подгруппы B, то подгруппа $F_1 = A_1 \cdot B$ абелева и даже $F_1 = A_1 \times B$. Она не принадлежит ни классу $\mathcal{K}_1$, ни классу $\mathcal{K}_2$. Получили противоречие с условием леммы и с леммой 1.

Лемма 4. *Пусть каждая абелева подгруппа локально компактной нильпотентной группы G удовлетворяет ОУМ, а ее центр не удовлетворяет УМ. Тогда G — абелева группа.*

Доказательство. Центр Z группы G — замкнутая подгруппа. По условию леммы и в силу леммы 1 центр Z изоморфен либо аддитивной группе R_p, либо группе J_p для некоторого простого числа p.

Покажем, что G не имеет элементов конечного порядка. Допустим обратное: пусть в ней найдется элемент $a \neq e$ конечного порядка. Циклическая подгруппа $\{a\}$ имеет с Z тривиальное пересечение и подгруппа $F = \{a\} \cdot Z$ абелева и даже $F = \{a\} \times Z$. Она не удовлетворяет ОУМ.

Центр Z нильпотентной группы G без кручения является изолированной подгруппой [4, с. 412—413]. Остается доказать равенство $G = Z$.

Снова применим метод от противного: предположим $G \neq Z$. Тогда найдется элемент $a \in G$, не принадлежащий Z. Ввиду изолированности Z бесконечная циклическая подгруппа $\{a\}$ имеет с Z тривиальное пересечение.

Известно, что каждый элемент локально компактной группы порождает либо дискретную циклическую подгруппу, либо компактную подгруппу. Первый случай исключается, ибо если бесконечная циклическая подгруппа $\{a\}$ дискретна, то она и замкнута, а поэтому не удовлетворяет ОУМ. Значит, подгруппа $\overline{\{a\}}$ компактна.

Произведение $F = \overline{\{a\}} \cdot Z$ — замкнутая абелева подгруппа. Так как F удовлетворяет ОУМ, то в силу леммы 1 и по предположению о центре $\mathbb{Z}$ в условии настоящей леммы она принадлежит классу $\mathcal{K}_2$. Более того, она является p-группой, т. е. изоморфна либо группе J_p, либо группе R_p. Но тогда для ее подгрупп $\overline{\{a\}}$ и Z имеются лишь две возможности: а) $\overline{\{a\}} \subseteq Z$; б) $Z \subseteq \overline{\{a\}}$. В обоих случаях некоторая степень элемента a принадлежит Z: $a^m \in Z$, $m \geqslant 1$. Но это противоречит свойству $\{a\} \cap Z = e$. Равенство $G = Z$ доказано.

Теорема 1. *Локально компактная локально нильпотентная группа с ОУМ для абелевых подгрупп принадлежит либо классу $\mathcal{K}_1$, либо классу $\mathcal{K}_2$.*

Доказательство. Пусть G — группа, удовлетворяющая условиям теоремы. Если каждая абелева подгруппа ее удовлетворяет УМ, то G удовлетворяет УМ для подгрупп и, значит, принадлежит классу $\mathcal{K}_1$ [5].

Допустим, что среди абелевых подгрупп в G имеются подгруппы класса $\mathcal{K}_2$. Можно считать, что подгруппой этого класса является $A \cong J_p$. Она монотетична: $A = \overline{\{a\}}$.

В группе G выделим два каких-либо элемента b, c и рассмотрим замкнутую подгруппу $H = \overline{\{a, b, c\}}$, порожденную элементами a, b, c. Она нильпотентна и содержит подгруппу A типа J_p. Центр Z построенной подгруппы H не удовлетворяет УМ, так как иначе все абелевы подгруппы из H удовлетворяли бы УМ (лемма 3). Из леммы 4 следует коммутативность подгруппы H. Ее элементы b и c перестановочны. Но b и c выбраны из группы G произвольно. Поэтому группа G абелева и принадлежит классу $\mathcal{K}_2$.

В дальнейшем нам потребуются некоторые специальные группы.

Каждый автоморфизм α аддитивной группы R_p поля Q_p p-адических чисел представляется числом $a = \alpha(1) \neq 0$ из Q_p и его действие на элементы $x \in R_p$ сводится к умножению на это число: $\alpha(x) = a \cdot x$. Поэтому группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(R_p)$ совпадает с мультипликативной группой Q_p^x:

$$\mathrm{Aut}(R_p) = \{p\} \times \{w\} \times \exp J_p. \tag{4}$$

Каждый эндоморфизм α аддитивной группы J_p кольца Z_p определяется числом $a = \alpha(1) \in Z_p$ и его действие на элементы $x \in J_p$ сводится к умножению на это число: $\alpha(x) = a \cdot x$. Если α — автоморфизм этой группы, то он обратим и $\alpha^{-1}(1) = a^{-1} \in Z_p$. Поэтому группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}(J_p)$ совпадает с мультипликативной группой обратимых элементов кольца Z_p:

$$\mathrm{Aut}(J_p) = \{w\} \times \exp J_p. \tag{5}$$

В формулах (4) и (5) правые части заданы в естественной p-топологии.

Наряду с ранее введенными классами групп $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}_2$ определим новый.

Класс $\mathcal{K}_3$. Каждая группа F этого класса обладает инвариантной абелевой p-подгруппой H класса $\mathcal{K}_2$ со свойствами: А) централизатор ее в F совпадает с ней: $C_F(H) = H$; Б) фактор-группа $\mathcal{F} = F/H$ изоморфна подгруппе группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}(J_p)$.

Ясно, что $\mathcal{K}_2$ — часть класса $\mathcal{K}_3$.

Теорема 2. *Локально компактная локально разрешимая группа, удовлетворяющая ОУМ для абелевых подгрупп, принадлежит либо классу $\mathcal{K}_1$, либо двуступенно разрешима и принадлежит классу $\mathcal{K}_3$.*

Доказательство. Пусть топологическая группа G удовлетворяет условиям теоремы.

1. Если группа G удовлетворяет УМ для абелевых подгрупп, то она удовлетворяет УМ для подгрупп [6]. Поэтому она принадлежит классу $\mathcal{K}_1$.

2. Рассмотрим теперь вторую возможность: среди абелевых подгрупп рассматриваемой группы имеются подгруппы класса $\mathcal{K}_2$. Среди них можно выбрать абелеву подгруппу A, изоморфную J_p. Она монотетична: $A = \overline{\{a\}}$.

Выберем в G еще какую-либо конечную систему $b_1, b_2, \ldots, b_s$ элементов и обозначим через F замкнутую подгруппу, порожденную совокупностью $a, b_1, b_2, \ldots, b_s$: $F = \overline{\{a, b_1, b_2, \ldots, b_s\}}$. Она разрешима. В ней найдется конечный ряд

$$e = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_{k-1} \subset F_k \subset \ldots \subset F_m = F \tag{6}$$

инвариантных замкнутых подгрупп с абелевыми факторами F_k/F_{k-1}, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Абелева инвариантная подгруппа F_1 этого ряда не удовлетворяет УМ. Это следует из леммы 3, примененной к группе F. Это значит, что F_1 — абелева p-группа класса $\mathcal{K}_2$, т. е. она изоморфна либо группе J_p, либо группе R_p, p — некоторое простое число.

(Заметим, что в итоге получаем $p = q$. Однако на установлении этого равенства здесь можно не останавливаться. Важна лишь роль подгруппы $A \cong J_p$, как «затравки» на начальном этапе доказательства теоремы.)

Централизатор $H = C_F(F_1)$ подгруппы F_1 в F — замкнутая инвариантная подгруппа, $F_1 \subseteq H$ и фактор-группа H/F_1 разрешима.

Предположим $H \neq F_1$. Выберем в группе $\mathcal{H} = H/F_1$ любую нетривиальную абелеву подгруппу $\mathcal{P}$. Если P — ее полный прообраз относительно естественного гомоморфизма H на $\mathcal{H}$, то имеем $\mathcal{P} = P/F_1$. Группа P нильпотентна и удовлетворяет ОУМ для абелевых подгрупп. Из теоремы 1 следует, что она абелева и принадлежит классу $\mathcal{K}_2$. Но тогда $\mathcal{P}$ — либо циклическая p-группа, либо — локально циклическая p-группа (типа p^∞).

Итак, в дискретной топологии $\mathcal{H}$ — разрешимая периодическая группа. В общей теории групп доказывается, что такая группа локально конечна. Таким образом, $\mathcal{H}$ — локально конечная p-группа.

Теперь можно доказать коммутативность группы H. Пусть x, y — два произвольных элемента из H. Элементы $[x] = x \cdot F_1$ и $[y] = y \cdot F_1$ группы $\mathcal{H}$ порождают конечную p-подгруппу $\mathcal{M}$. Она нильпотентна. Полный прообраз M ее относительно естественного гомоморфизма H на $\mathcal{H}$ — также нильпотентная группа. В силу теоремы 1 группа M абелева. Так как $x, y \in M$, то $xy = y \cdot x$. Но x, y выбраны из H без всяких ограничений. Это значит, что H — группа абелева. Она принадлежит классу $\mathcal{K}_2$. Так же, как для F_1, имеем $H \cong J_p$ или $H \cong R_p$.

Из абелевости H вытекает важный факт: централизатор $C_F^{?}(H)$ совпадает с H.

Если $f \in F$, то элемент $[f] = f \cdot H$ фактор-группы $\mathcal{F} = F/H$ определяет автоморфизм $x \to x^{[f]} = f \cdot x \cdot f^{-1}$ группы H. Этот автоморфизм, индуцированный смежным классом $[f]$, обозначаем тем же символом $[f]$.

Так как $C_F(H) = H$, то $\mathcal{F}$ — некоторая группа автоморфизмов группы H. Но группы $\mathrm{Aut}(J_p)$ и $\mathrm{Aut}(R_p)$ абелевы. Отсюда следует, что группа автоморфизмов $\mathcal{F} = F/H$ группы H коммутативна.

Подгруппа F двуступенно разрешима. Но среди порождающих ее элементов имеются элементы $b_1, b_2, \ldots, b_s$, выбранные из группы G произвольно. Поэтому и сама группа G двуступенно разрешима.

Применив к группе G приведенные выше рассуждения о группе F, убедимся, что группа G обладает инвариантной абелевой подгруппой H класса $\mathcal{K}_2$, совпадающей со своим централизатором $C_G(H)$. Фактор-группа $\mathfrak{G} = G/H$ — локально компактная абелева группа автоморфизмов группы H. Изучим строение группы $\mathfrak{G} = G/H$ детальнее. Согласно основной структурной теореме об абелевых локально компактных группах (см. [7], § 39) группа $\mathfrak{G}$ обладает открытой компактно порожденной группой $\widehat{\mathfrak{G}}$, которая разлагается в прямое произведение

$$\widehat{\mathfrak{G}} = R^l \times C^m \times T^n \times K. \tag{7}$$

Здесь R^l — вещественная векторная группа размерности l, C^m — свободная абелева группа ранга m, T^n — торовидная группа размерности n, K — компактная группа.

Группа $\mathfrak{G}$ не имеет дискретных бесконечных циклических подгрупп (т. е. свободных циклических подгрупп).

Допустим, что в $\mathfrak{G}$ имеется такая подгруппа C с образующим элементом $[c]$, $c \in G$. В локально компактной группе G для бесконечной циклической подгруппы $\{c\}$ истинна лишь одна из возможностей: 1) $\{c\}$ — дискретна, 2) замыкание ее $\overline{\{c\}}$ — компактная подгруппа. Первая возможность исключается, так как замкнутая подгруппа $\{c\}$ не удовлетворяет ОУМ. Вторая возможность также исключается, поскольку образ компактной подгруппы $\overline{\{c\}}$ при естественном гомоморфизме G и $\mathfrak{G}$ совпадает с подгруппой C, которая не компактна.

Далее временно полагаем $H \cong J_p$. Обозначим через θ изоморфное отображение H на J_p. Пусть i — прообраз 1 из J_p: $\theta(i) = 1$. Тогда для любого элемента $f \in G$ полагаем

$$a[f] = \theta(i^{[f]}) \equiv \theta(fif^{-1}).$$

Принято считать, что $a[f]$ — тот элемент кольца Z_p, который определяет автоморфизм $x \to a[f]\cdot x$, $x \in J_p$, группы J_p. Отображение $\psi: \mathfrak{G} \to \mathrm{Aut}(J_p)$, построенное по правилу $\varphi: [f] \to a[f]$, является инъективным и непрерывным. Образ связной компоненты $\mathfrak{G}_0$ единицы группы $\mathfrak{G}$ при отображении ψ — связная подгруппа группы $\mathrm{Aut}(J_p)$. Но $\mathrm{Aut}(J_p)$ вполне несвязная группа. Поэтому $\mathfrak{G}_0$ состоит из одного элемента.

Отсюда заключаем, что в равенстве (7) для открытой подгруппы $\widehat{\mathfrak{G}}$ имеется лишь последний множитель K. Группа $\mathfrak{G}$ имеет открытую компактную вполне несвязную подгруппу K. Образ ее $X = \psi(K)$ — компактная подгруппа группы $\mathrm{Aut}(J_p) = \{\omega\} \times \exp J_p$. Так как ψ — взаимно однозначное отображение, то X и K изоморфны.

а). Пусть $X \cap \exp J_p = 1$. Тогда X — подгруппа циклического множителя $\{w\}$ и, значит, K — конечная циклическая группа. Отсюда следует дискретность группы $\mathfrak{G}$. Ввиду того что $\mathfrak{G}$ не имеет свободных абелевых подгрупп, она — группа периодическая. Поэтому ее образ при отображении ψ содержится в $\{w\}$.

Группа $\mathfrak{G}$ — циклическая некоторого порядка d, причем d — делитель порядка n группы $\{w\}$.

б). Пусть $X \cap \exp J_p \neq 1$. Тогда X имеет в $\mathrm{Aut}(J_p)$ конечный индекс. Поэтому и подгруппа K иммет в $\mathfrak{G}$ конечный индекс. Тогда $\mathfrak{G}$ компактна и ее образ при отображении ψ — компактная подгруппа конечного индекса в $\mathrm{Aut}(J_p)$. Группа $\mathfrak{G}$ изоморфна подгруппе конечного индекса группы $\mathrm{Aut}(J_p)$. Можно показать, что она изоморфна группе $\{v\} \times J_p^m$, где $\{v\}$ — циклическая группа порядка d (d — делитель порядка n группы $\{w\}$), $m \geqslant 0$.

Наконец, если $H \cong R_p$, то получаем тот же результат. При этом в доказательстве изменится очень немногое: отображение

$$\psi: \mathfrak{G} \to \mathrm{Aut}(R_p) = \{p\} \times \{w\} \times \exp J_p$$

фактически оказывается отображением в $\{w\} \times \exp J_p = \mathrm{Aut}(J_p)$, так как $\mathfrak{G}$ не имеет свободных абелевых подгрупп.

Теорема 3. *Существуют локально компактные двуступенно разрешимые группы, удовлетворяющие ОУМ для абелевых подгрупп, но не удовлетворяющие ОУМ для любых подгрупп.*

Приведем один из примеров таких групп. Обозначим через G множество всех пар (a, b), где a и b принадлежат аддитивной группе J_p. Определим для них операцию умножения по правилу

$$(a, b)\cdot(x, y) = (a + x, b + y\cdot\exp a). \tag{8}$$

Здесь $\exp a$ — элемент группы $\exp J_p$, соответствующий элементу $a \in J_p$. Относительно введенной операции множество G является группой с единичным элементом $e = (0, 0)$. Обратный элемент для $g = (a, b)$ вычисляется по формуле

$$g^{-1} = (-a, -b \cdot \exp(-a)). \tag{9}$$

Если $f = (x, y)$, то сопряженным для него будет

$$gfg^{-1} = (x, y \cdot \exp a + [1 - \exp x] \cdot b). \tag{10}$$

Введем топологию следующим образом: в качестве полной системы Σ^* окрестностей единицы примем семейство подмножеств вида

$$U = (J_p^m, J_p^n) = \{f \in G : f = (x, y), x \in J_p^m, y \in J_p^n\},$$

где m и n пробегают все натуральные числа.

Семейство Σ^* должно удовлетворять пяти условиям Л. С. Понтрягина (см. [7], § 18). Проверка первых четырех условий весьма проста, если заметить, что каждое множество $U \in \Sigma^*$ — подгруппа группы G. Остановимся на проверке последнего — пятого — условия: для любых $g \in G$ и $U \in \Sigma^*$ найдется такое $V \subset \Sigma^*$, что $V \subset g \cdot U \cdot g^{-1}$.

Пусть $g = (a, b)$ и $U = (J_p^m, J_p^n)$. Полагаем $V = (J_p^l, J_p^n)$, где $l = \max(m, n)$. Убедимся, что $V \subset g \cdot U \cdot g^{-1}$.

Выберем произвольный элемент $h = (x, v) \in V$ и покажем, что для него найдется такой элемент $f = (x, y) \in U$, для которого выполняется равенство $h = g \cdot f \cdot g^{-1}$. Тем самым и будет доказано включение $V \subset g \times U \cdot g^{-1}$.

Ввиду формулы (10) равенство $h = gfg^{-1}$ выглядит так:

$$(x, v) = (x, y \cdot \exp a + [1 - \exp x] \cdot b).$$

Для элемента y получаем уравнение $v = y \cdot \exp a + [1 - \exp x] \cdot b$, где $x \in J_p^l$, $v \in J_p^n$, $b \in J_p$ — заданные элементы.

Элемент $w = [\exp x - 1] \cdot b$ принадлежит J_p^n, так как $x \in J_p^l$ и $l \geqslant n$ (по лемме 2). Поэтому $v = y \cdot \exp a - w$ и $y = (v + w) \cdot \exp(-a)$, где $v + w \in J_p^n$, а множитель $\exp(-a)$ — целое p-адическое число. Значит, $y \in J_p^n$ и $f = (x, y) \in U$.

Семейство Σ множеств вида $W = g \cdot U$, где g пробегает группу G, а U — семейство Σ^*, является базисом топологии группы G.

Если $g = (a, b)$, $U = (J_p^m, J_p^n)$ и $f = (x, y) \in U$, то множество $W = g \cdot U$ состоит из элементов вида $h = g \cdot f = (a + x, b + y \cdot \exp a)$. Если y пробегает группу J_p^n, то и $y \cdot \exp a$ пробегает ту же группу. Поэтому базис топологии группы G состоит из множеств вида

$$W = (a + J_p^m, b + J_p^n), \quad (a, b) \in G.$$

Множество $H = (0, J_p)$ всех элементов вида $(0, b)$, $b \in J_p$,— инвариантная подгруппа группы G. Она изоморфна группе J_p. Множество $F = (J_p, 0)$ всех элементов вида $(a, 0)$, $a \in J_p$,— также подгруппа, изоморфная J_p. Группа G компактна и разлагается в полупрямое произведение $G = H \leftthreetimes F$.

Пусть A — какая-либо абелева подгруппа построенной группы, $A \neq e$.
а). Предположим $A \cap H = e$. В этом случае имеем $A \cdot H/H \cong A/A \cap H = A$. A изоморфна некоторой подгруппе из $F = G/H$. Поэтому $A \cong J_p$.
б). Предположим $A \cap H \neq e$. Покажем, что в этом случае $A \subseteq H$ и, следовательно, также $A \cong J_p$. Пусть $g = (a, x)$ — произвольный элемент из A, а $h = (0, y)$ — некоторый элемент из $A \cap H$, причем $y \neq 0$. Тогда $(a, x)(0, y) = (0, y) \cdot (a, x)$, т. е. $(a, x + y \cdot \exp a) = (a, y + x \exp 0)$. Так как $\exp 0 = 1$, то получаем равенство $y \cdot \exp a = y$, $y \cdot [1 - \exp a] = 0$ для элементов поля p-адических чисел. Отсюда получаем $\exp a = 1$. Это возможно только при $a = 0$. Итак, все элементы из A имеют вид $(0, x)$. Доказано включение $A \subseteq H$.

Группа G удовлетворяет ОУМ для абелевых подгрупп. Вместе с тем эта же группа не удовлетворяет ОУМ для любых подгрупп. Последнее утверждение вытекает из следующего легко доказываемого предложения: *если топологическая группа G удовлетворяет ОУМ для подгрупп, то* *любая ее фактор-группа G/H по инвариантной подгруппе $H \neq e$ удовлетворяет УМ.*

Замечание. Кратко опишем другой, более простой пример группы, удовлетворяющей всем требованиям теоремы 3.

Пусть G — множество всех пар (a, b), где $a = \pm 1$, а b пробегает все элементы аддитивно группы J_p (p—любое простое число). На этом множестве введем операцию умножения по правилу

$$(a, b) \cdot (x, y) = (a \cdot x,\ b + a \cdot y).$$

В подходящей топологии множество становится компактной группой, разложимой в полупрямое произведение $G = \{w\} \times H$, где $\{w\}$ — циклическая группа порядка 2, $H \cong J_p$.

Каждая абелева подгруппа группы либо циклическая группа порядка 2, либо изоморфна группе J_p. Она удовлетворяет ОУМ для абелевых подгрупп, но не удовлетворяет ОУМ для любых подгрупп.

Однако приведенный выше первый пример предпочтительнее в интересах последующих теорем.

Теорема 4. *Локально компактная локально разрешимая группа, удовлетворяющая ОУМ, принадлежит либо классу $\mathcal{K}_1$, либо классу $\mathcal{K}_2$.*

Доказательство. Если группа G удовлетворяет условиям теоремы, то по теореме 2 она принадлежит либо классу $\mathcal{K}_1$, либо классу $\mathcal{K}_3$. Рассмотрим второй случай: G входит в класс $\mathcal{K}_3$. Она содержит инвариантную абелеву p-подгруппу H класса $\mathcal{K}_2$, совпадающую со своим централизатором. Фактор-группа $\mathfrak{G} = G/H$ изоморфна некоторой подгруппе группы $\mathrm{Aut}\,(J_p) = \{w\} \times \exp J_p$.

С другой стороны, $\mathfrak{G} = G/H$ удовлетворяет УМ для подгрупп. Ввиду теоремы о структуре локально компактных абелевых групп с УМ группа $\mathfrak{G}$ не содержит подгрупп типа J_p. Поэтому она является циклической группой конечного порядка d (d — делитель порядка n группы $\{w\}$).

Пусть $[g] = g \cdot H$ — образующий элемент этой группы с представителем $g \in G$. Он индуцирует на H автоморфизм порядка d. Как и ранее, обозначаем его через $[g]$; $h = g^d \in H$.

В подгруппе H выделяем бесконечную убывающую последовательность

$$H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_m \supset H_{m+1} \supset \ldots \tag{11}$$

подгрупп, где $H_m \cong J_p^m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$. Все члены этого ряда допустимы относительно автоморфизмов группы H. В частности, они допустимы относительно автоморфизма $[g]$. Действие его адекватно умножению элементов $x \in J_p^m$ на корень v степени d из 1.

а). Предположим, что циклическая группа $\{g\}$, порожденная представителем класса $[g]$, бесконечна (в дискретной топологии). Для элемента $h = g^d \in H$ найдутся натуральные числа l, m такие, что $h^l \in H_m$, $h^l \notin H_{m+1}$. Тогда элемент $z = h^l = g^{l \cdot d}$ порождает подгруппу H_m $(H_m = \overline{\{z\}})$. Абелева подгуппа $\overline{\{g\}}$ содержит H_m. Поэтому для всех элементов $x \in H_m$ выполняется равенство $x^{[g]} = gxg^{-1} = x$. Это значит, что автоморфизм $[g]$ — тождественное преобразование на подгруппе H_m. Но тогда он является единичным автоморфизмом подгруппы H. Это значит, что $d = 1$ и фактор-группа G/H состоит из одного единичного элемента.

Итак, $G = H$ и G — абелева группа класса $\mathcal{K}_2$.

б). Пусть циклическая группа $\{g\}$ конечна. Так как H не имеет элементов конечного порядка, то $H \cap \{g\} = e$. Подгруппы H_m ряда (11) инвариантны в G, а произведения $\{g\} \cdot H$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, составляют бесконечную убывающую последовательность замкнутых подгрупп. Она содержит сколь угодно малые подгруппы тогда и только тогда, когда $g = e$ — единичному элементу. Имеем $d = 1$ и $G = H$. Снова G — абелева группа класса $\mathcal{K}_2$.

Теорема 5. *Пусть G — локально компактная разрешимая группа. Каждая ее абелева подгруппа принадлежит классу $\mathcal{K}_2$ тогда и только тогда, когда она обладает инвариантной абелевой p-подгруппой H класса $\mathcal{K}_2$*

со следующими свойствами: 1) *фактор-группа* G/H — *группа автоморфизмов группы* H; 2) G/H *изоморфна подгруппе аддитивной группы* J_p.

Доказательство. Необходимость. Пусть каждая абелева подгруппа разрешимой группы G принадлежит классу $\mathcal{K}_2$. По теореме 2 она принадлежит классу $\mathcal{K}_3$: она обладает инвариантной абелевой p-подгруппой H такой, что $G_G(H) = H$ и G/H изоморфна некоторой подгруппе из $\mathrm{Aut}(J_p) = \{w\} \times \exp J_p$.

Совпадение централизатора $C_G(H)$ с H означает, что фактор-группа G/H — группа автоморфизмов группы H.

Повторив рассуждения пп. а) и б) доказательства предыдущей теоремы, можно убедиться, что в $\mathfrak{G} = G/H$ не имеется элементов конечного порядка. Поэтому $\mathfrak{G}$ изоморфна подгруппе из множителя $\exp J_p$. Она изоморфна подгруппе группы J_p.

Достаточность. Пусть группа G содержит инвариантную абелеву p-подгруппу H класса $\mathcal{K}_2$, $C_G(H) = H$ и G/H изоморфна подгруппе группы J_p.

Ясно, что G — вполне несвязная группа. Кроме того, она не содержит дискретных циклических подгрупп бесконечного порядка. Это следует из топологического аналога [8] теоремы О. Ю. Шмидта о расширениях локально конечных групп. В рассматриваемом случае G — расширение группы H (типа J_p или R_p) с помощью подгруппы из J_p. Поэтому любой элемент из G порождает компактную подгруппу.

Группа G не содержит и элементов конечного порядка.

Выделим в ней произвольную абелеву подгруппу $A \neq e$. Ввиду указанных свойств она не может быть дискретной подгруппой.

1). Предположим $A \cap H \neq e$. В этом случае имеем $A \subseteq H$. Действительно, пусть $y \in A \cap H$, $y \neq e$, и $g \in G$, но $g \notin H$. Тогда элемент $[g] = g \cdot H$ фактор-группы G/H индуцирует нетривиальный автоморфизм группы H и, более того, $y^{[g]} = g \cdot y \cdot g^{-1} \neq y$. Поэтому всякий элемент $g \in A$ принадлежит H. Подгруппа A принадлежит классу $\mathcal{K}_2$.

2). Предположим $A \cap H = e$. Подгруппа A имеет открытую подгруппу $\hat{A}$, разложимую в произведение вида (7): $\hat{A} = R^l \times C^m \times T^n \times K$ (структурная теорема о абелевых локально компактных группах). Согласно приведенным выше свойствам группы G в этом разложении содержится лишь последний множитель K — компактная подгруппа. Итак $\hat{A} = K$ — компактная вполне несвязная группа. Она бесконечна, ибо иначе подгруппа A была бы дискретной.

При естественном гомоморфизме группы G из $\mathfrak{G} = G/H$ подгруппа K из A отображается взаимно однозначно и, следовательно, изоморфно на некоторую компактную подгруппу K_1. Но по предположению $\mathfrak{G}$ изоморфна группе J_p. Поэтому K_1 имеем в $\mathfrak{G}$ конечный индекс. При том же естественном гомоморфизме подгруппа A взаимно однозначно отображается на какую-то подгруппу A_1 из $\mathfrak{G}$. Поэтому K имеет в A конечный индекс. Тогда A — компактная p-группа, изоморфная группе J_p. И в этом случае A принадлежит классу $\mathcal{K}_2$.

1. *Глушков В. М.* Локально бикомпактные группы с условием минимальности для замкнутых подгрупп // Укр. мат. журн.— 1956.— **8**, № 2.— С. 132—139.
2. *Хотеев В. А., Чарин В. С.* Группы с условием минимальности для подгрупп // Мат. заметки.— 1967.— **2**, вып. 1.— С. 3—10.
3. *Hasse H.* Zahlentheorie.— Berlin: Acad.-Verl., 1949.— 468 S.
4. *Курош А. Г.* Теория групп.— М. : Наука, 1967.— 647 с.
5. *Глушков В. М.* К теории специальных локально компактных групп // Укр. мат. журн.— 1959.— **11**, № 4.— С. 343—351.
6. *Чарин В. С.* О локально бикомпактных группах, удовлетворяющих условию минимальности для подгрупп // Сиб. мат. журн.— 1960.— **1**, № 1.— С. 139—151.
7. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы.— М. : Наука, 1973.— 520 с.
8. *Чарин В. С.* О группах конечного ранга. II // Укр. мат. журн.— 1966.— **18**, № 3.— С. 85—96.

Киев. ун-т

Получено 20.12.89