УДК 512.544

А. В. Тушев

Неприводимые представления локально-полициклических групп над абсолютным полем

Изучаются неприводимые представления локально почти полициклических групп над абсолютным полем. Получены необходимые и достаточные условия, при которых разрешимая локально-полициклическая группа конечного специального ранга обладает точным неприводимым представлением над абсолютным полем.

Вивчаються незвідні зображення локально майже поліциклічних груп над абсолютним полем. Одержані необхідні та достатні умови, при яких розв'язна локально-поліциклічна група скінченного спеціального рангу має точне незвідне зображення над абсолютним полем.

В работе [1] был следующим образом введен класс групп $\mathfrak{X}$. Группа G принадлежит классу $\mathfrak{X}$, если она обладает такой полициклической подгруппой H, что для всякой конечнопорожденной подгруппы K, содержащей H, индекс $|K:H|$ конечен. Как оказалось, группа G тогда и только тогда принадлежит классу $\mathfrak{X}$, когда она локально почти полициклическая и имеет конечный свободный ранг $r_0(G)$. Поле называется абсолютным, если всякий его ненулевой элемент является корнем из единицы [2]. Из теоремы 2.4 работы [1] следует, что если $\mathfrak{X}$-группа без кручения имеет нетривиальный центр, то она не обладает точным неприводимым представлением над абсолютным полем. Естественно возникает вопрос: может ли $\mathfrak{X}$-группа без кручения обладать точным неприводимым представлением над абсолютным полем? Теорема 1 данной работы дает отрицательный ответ на этот вопрос. Из основного результата работы [3] нетрудно получить, что существуют разрешимые группы без кручения конечного ранга, обладающие точным неприводимыми представлениями над конечным полем. Как показывает пример данной работы, эти группы могут не допускать конечного числа образующих. Тем самым получен положительный ответ на вопрос 9.12 из [4]. Теоремы 2 и 3 дают необходимые и достаточные условия, при которых разрешимые локально-полициклические группы конечного специального ранга обладают точным неприводимым представлением над абсолютным полем. Основные результаты работы анонсированы в [5].

Лемма 1. *Пусть F — поле, G — группа, M — простой FG-модуль, на котором группа G действует точно. Тогда $C_M(G_1) = 0$ для любой неединичной нормальной подгруппы $G_1 \trianglelefteq G$.*

Лемма почти очевидна.

Лемма 2. *Пусть $G \in \mathfrak{X}$, F — поле простого порядка p, A — конечнопорожденная абелева нормальная подгруппа без кручения группы G, $S = FA$, M — простой FG-модуль. Тогда M имеет S-кручение.*

Доказательство. Пусть H — такая полициклическая подгруппа группы G, что для любой конечнопорожденной подгруппы H_1, содержащей H, индекс $|H_1 : H|$ конечен. Пусть $0 \neq a \in M$ и D — FH-модуль, порожденный элементом a, N — максимальный подмодуль модуля D. Из [2] (теорема А) следует $|D/N| < \infty$, поэтому для некоторого максимального идеала $L \trianglelefteq S$ аннулятор $\mathrm{Ann}_{D/N}(L) \neq 0$.

Предположим, что модуль M без S-кручения и пусть ${}^0L = \bigcap_{x \in G} L^x$. В [2] (лемма 1) показано, что некоторая нетривиальная степень A^m лежит в $1 + {}^0L$, поэтому $|G : N_G(L)| < \infty$ и ${}^0L \neq 0$. Так как модуль M без S-кручения, то $0 \neq M{}^0L$, а поскольку $M{}^0L$ — подмодуль модуля M, то $M{}^0L = M$. Очевидно $M{}^0L \subseteq ML$, поэтому $ML = M$. Пусть $\{t_i\}$ — набор представителей, выбранных по одному из каждого левого смежного класса группы G по подгруппе $N_G(L)$. Так как $ML = M$, то для любого i найдутся $k_{ij} \in FG$ и $l_{ij} \in L$ такие, что

$$a \cdot \Big(\sum_j k_{ij} l_{ij} \Big) = at_i. \tag{1}$$

Очевидно существует конечнопорожденная подгруппа H_1, содержащая H и $\{t_i\}$, и такая, что все $k_{ij} \in FH_1$. Пусть D_1 — FH_1-подмодуль, порожденный элементом a. Элементы at_i порождают D_1 как $FN_{H_1}(L)$-модуль, поэтому из (1) следует $D_1 L = D_1$. Так как $|H_1 : H| < \infty$, то D_1 — нетеров FH-модуль. Пусть $T = D_1/N$, $K = D/N$ и N_1 — максимальный FH-подмодуль модуля T, для которого $K \cap N_1 = 0$. Тогда $\overline{T} = T/N_1$ — монолитический нетеров FH-модуль, $\overline{K}$ — его монолит и $\overline{T}L = \overline{T}$. Из основного результата работы [6] следует, что $\overline{T}$ — конечен. Будем рассматривать $\overline{T}$ как S-модуль. Из выбора L следует, что $\mathrm{Ann}_{\overline{K}}(L) \neq 0$, поэтому $L \in \mathrm{Ass}\, \overline{T}$ (см. [7], гл. IV, § 1). Переходя к фактор-модулю, можно считать, что $\mathrm{Ass}\, \overline{T} = \{L\}$. Тогда из [7] (гл. IV, § 1, предложение 9) следует, что для некоторого n $\overline{T}L^n = 0$, что противоречит $\overline{T}L = \overline{T}$. Лемма доказана.

Конечнопорожденная абелева нормальная подгруппа без кручения A группы G называется плинтусом, если любая подгруппа конечного индекса группы G действует на A сопряжениями рационально неприводимо [2].

Теорема 1. *Пусть $G \in \mathfrak{X}$. Если группа G обладает точным неприводимым представлением над абсолютным полем F, то G не содержит нормальных подгрупп без кручения.*

Доказательство. Докажем теорему индукцией по свободному рангу $r_0(G)$ группы G. Предположим, что группа G содержит нормальную подгруппу без кручения. Тогда, поскольку ввиду [1] группа G обладает характеристической локально-конечной подгруппой T такой, что G/T — почти разрешимая группа конечного свободного ранга, G содержит и абелеву нормальную подгруппу без кручения B конечного ранга такую, что $G/C_G(B)$ — почти разрешимая группа.

Если взять рационально неприводимую относительно G подгруппу B_1 из B, то ввиду [8] $G/C_G(B)$ — конечное расширение свободной абелевой группы и так как $r_0(G) < \infty$, то $G/C_G(B_1)$ — почти полициклическая группа. Пусть K — такая конечнопорожденная подгруппа из G, что $G = C_G(B_1) \cdot K$ и $K \cap B_1 = A \neq 1$. Тогда A — конечнопорожденная абелева нормальная подгруппа без кручения группы G, причем $G/C_G(A)$ — почти полициклическая группа.

Пусть M — простой FG-модуль, на котором группа G действует точно. Тогда M — простой F_pH-модуль, где $H = G \times F^*$, F^* — мультипликативная группа поля F, F_p — поле простого порядка $p = \mathrm{char}\, F$. Очевидно $H \in \mathfrak{X}$, $r_0(H) = r_0(G)$, $A \trianglelefteq H$ и $H/C_H(A)$ — почти полициклическая группа. Пользуясь полицикличностью подгруппы A, нетрудно показать, что существует подгруппа конечного индекса $H_1 \leqslant H$, содержащая A, которая обладает плинтусом $A_1 \leqslant A$, причем $H_1/C_{H_1}(A_1)$ — почти полициклическая группа. Из результатов работы [9] следует, что существует простой F_pH_1-модуль $M_1 \leqslant M$. По лемме 2 M_1 имеет S-кручение, где $S = F^d A_1$. Так как кольцо S — нетерово, то существует максимальный простой идеал $P \trianglelefteq S$, для которого $\overline{P} = \mathrm{Ann}_{M_1}(P) \neq 0$. Из [2] (лемма 3) следует, что $\overline{P}$ — простой FN-модуль, где $N = N_{H_1}(P)$. Очевидно $C_{H_1}(A_1) \leqslant N$, поэтому если $|H_1 : N| = \infty$, то $r_0(N) < r_0(H)$ и по предположению индукции $A_1^n \leqslant C_N(\overline{P})$ некоторого n. Если же $|H_1 : N| < \infty$, то по теореме Д из [2] $|S/P| < \infty$, откуда нетрудно получить, что $1 - A_1^n \subseteq P$ для некоторого n, и, следовательно, $A_1^n \leqslant C_N(\overline{P})$. Таким образом, в обоих случаях для некоторого n имеем $A_1^n \leqslant C_N(\overline{P})$, откуда $r_0(N/C_N(\overline{P})) < r_0(H)$. Тогда по предположению индукции, учитывая, что $A \trianglelefteq N$, имеем $A^n \leqslant C_N(\overline{P})$ для некоторого n. Следовательно, $0 \neq \overline{P} \leqslant C_M(A^n)$, что противоречит лемме 1. Теорема доказана.

Лемма 3. *Пусть G — группа, N — такая ее нормальная подгруппа, что для любой неединичной нормальной подгруппы $G_1 \trianglelefteq G$ имеем $G_1 \cap N \neq 1$,* *причем N обладает такой нормальной подгруппой $H \trianglelefteq N$, что N/H — абелева периодическая локально-циклическая группа и H не содержит неединичных G-допустимых подгрупп. Пусть F — абсолютное поле и* $\operatorname{char} F \notin \Pi(N/H)$. *Тогда группа G обладает точным неприводимым представлением над F.*

Доказательство Пусть $\overline{F}$ — алгебраическое замыкание поля F. По теореме 127.3 из [10] мультипликативная группа $\overline{F}^*$ поля $\overline{F}$ является полной локально-циклической p'-группой, где $p = \operatorname{char} F$. Тогда существует гомоморфизм $\varphi : N \to \overline{F}^*$ такой, что $\operatorname{Ker} \varphi = H$. Гомоморфизм φ можно продолжить до гомоморфизма $\varphi_1 : FN \to \overline{F}$, полагая $\varphi\left(\sum_i g_i h_i\right) = \sum_i \varphi(g_i) h_i$, где $g_i \in N$, $h_i \in F$.

Пусть $\operatorname{Ker} \varphi_1 = \mathfrak{I}$, тогда $M = FN/\mathfrak{I}$ — простой FN-модуль и $C_N(M) = H$. Пусть $\mathfrak{I}_1$ — некоторый максимальный правый идеал кольца FG, содержащий идеал $\mathfrak{I}$. Тогда $M_1 = FG/\mathfrak{I}_1$ — простой FG-модуль. Так как $FN \cap \mathfrak{I}_1 = \mathfrak{I}$, то $(FN + \mathfrak{I}_1)/\mathfrak{I}_1 \simeq FN/(FN \cap \mathfrak{I}_1) = FN/\mathfrak{I} = M$ и можно считать, что $M \leqslant M_1$. Предположим, что $G_1 = C_G(M_1) \neq 1$, тогда $N_1 = G_1 \cap N \neq 1$. Так как $N_1 \leqslant C_N(M)$, то $N_1 \leqslant H$, а поскольку N_1 — нормальная подгруппа группы G, то это противоречит выбору подгруппы H. Лемма доказана.

Пример. Положим $G = N \leftthreetimes \langle g \rangle$, $g^{-1} x g = x^p$, $x \in N$, где $N \simeq Q^{(p,q)}$ и p, q — различные простые числа. Нетрудно заметить, что группа G не допускает конечного числа образующих. Всякая неединичная нормальная подгруппа группы G имеет неединичное пересечение с подгруппой N, а N содержит такую циклическую подгруппу H, что N/H — локально-циклическая группа. Подгруппа H не содержит неединичных G-допустимых подгрупп, поэтому по лемме 3 группа G обладает точным неприводимым представлением над абсолютным полем F, если $\operatorname{char} F$ отлична от p и q.

Лемма 4. *Пусть $G \in \mathfrak{X}$, F — абсолютное поле* $\operatorname{char} F = p$. *Если группа G обладает точным неприводимым представлением над полем F, то ее центр Z является локально-циклической p'-группой.*

Доказательство. Пусть M — простой FG-модуль, на котором G действует точно. Из теоремы 1 следует, что Z — периодическая группа. Положим $\mathfrak{I} = \operatorname{Ann}_{FZ}(M)$ и покажем, что $FZ/\mathfrak{I} = K$ — область целостности. Пусть $b_1, b_2 \in FZ$ и $b_1 \cdot b_2 \in \mathfrak{I}$. Если $b_1 \notin \mathfrak{I}$, то для некоторого $a \in M$ имеем $ab_1 \neq 0$. Отображение $\varphi : x \mapsto xb_2$ является эндоморфизмом модуля M, а так как $ab_1 \in \operatorname{Ker} \varphi$, то $\operatorname{Ker} \varphi \neq 0$. Тогда из простоты модуля M следует $\operatorname{Ker} \varphi = M$ и поэтому $b_2 \in \mathfrak{I}$.

Таким образом, K — область целостности. Так как Z — периодическая группа, а F — локально-конечное поле, то K — локально-конечная область целостности и, значит, K — локально-конечное поле. Так как группа G действует на M точно, то $1 - g \notin \mathfrak{I}$ для любого неединичного элемента $g \in Z$. Поэтому можно считать, что Z — подгруппа мультипликативной группы поля K. Тогда из [10] (теорема 127.3) следует, что Z — локально-циклическая p'-группа. Лемма доказана.

Цоколем $\operatorname{Soc} G$ группы G называется подгруппа, порожденная всеми ее минимальными нормальными подгруппами. Если группа G разрешима, то $\operatorname{Soc} G$ — абелева подгруппа. Цоколь $\operatorname{Soc} G$ разрешимой группы G является полупростым ZG-модулем, если считать, что G действует на $\operatorname{Soc} G$ сопряжениями.

Теорема 2. *Пусть G — локально-полициклическая разрешимая группа конечного специального ранга. Группа G тогда и только тогда обладает точным неприводимым представлением над абсолютным полем F, когда группа G не содержит нормальных подгрупп без кручения и ее цоколь* $\operatorname{Soc} G$ *содержит такую подгруппу H, что* $\operatorname{Soc} G / H$ *— локально-циклическая p'-группа, где $p =$* $\operatorname{char} F$, *и H не содержит неединичных G-допустимых подгрупп.*

Доказательство. Пусть G обладает точным неприводимым представлением над F и M — простой FG-модуль, на котором группа G действует точно. Тогда по теореме 1 группа G не содержит нормальных подгрупп без кручения. Всякая силовская p_i-подгруппа S_i цоколя конечна, поэтому ее централизатор C_i имеет в G конечный индекс.

Из результатов работы [9] следует, что M содержит простой FC_i-модуль M_i. Тогда из леммы 4 следует, что фактор-группа S_i/H_i — циклическая, где $H_i = C_{S_i}(M_i)$, причем если $p_1 = p$, то $H_1 = S_1$. Отсюда следует $M_1 \leqslant C_M(S_1)$, а это противоречит лемме 1, поэтому $\mathrm{Soc}\, G$ — p'-группа. Если H_i содержит неединичную G-допустимую подгруппу T, то $M_i \leqslant C_M(T)$, что противоречит лемме 1, поэтому H_i не содержит G-допустимых неединичных подгрупп. Тогда подгруппа $H = \underset{p_i \in \Pi(\mathrm{Soc}\, G)}{\times} H_i$ удовлетворяет условиям теоремы.

Пусть группа G удовлетворяет условиям теоремы. Если показать, что любая неединичная нормальная подгруппа из G имеет неединичное пересечение с цоколем $\mathrm{Soc}\, G$, то из леммы 3 будет следовать, что G обладает точным неприводимым представлением над полем F. Пусть N — неединичная нормальная подгруппа из G. Тогда N содержит абелеву нормальную в группе G подгруппу, периодическая часть T которой нетривиальна, так как группа G не содержит нормальных подгрупп без кручения. Нижний слой S произвольной силовской подгруппы из T конечен ввиду конечности специального ранга группы G, поэтому $\mathrm{Soc}\, G \cap S \neq 1$. Следовательно, $\mathrm{Soc}\, G \cap N \neq 1$. Теорема доказана.

Пусть M_1 и M_2 — модули над кольцом K. Будем говорить, что подгруппы $H_1 \leqslant M_1$ и $H_2 \leqslant M_2$ сопряжены над K, если существует изоморфизм $\varphi : M_1 \to M_2$, такой, что $\varphi(H_1) = H_2$. Нетрудно показать, что сопряженность над K является отношением эквивалентности. Поэтому множество подгрупп K-модулей распадается на непересекающиеся классы сопряженных над K подгрупп.

Пусть M — конечный простой модуль над кольцом K, $E = \mathrm{End}_K(M)$. Тогда из [11] (гл. XVII, § 2, предложение 1) следует, что E — конечное тело, и, следовательно, E — поле. Поэтому $|E| = p^t$ для некоторого t, где $p = \mathrm{char}\, E$. Так как M — векторное пространство над E, то $|M| = p^{tm}$ для некоторого m.

Лемма 5. *Пусть M — простой конечный K-модуль, $E = \mathrm{End}_k(M)$, $|E| = p^t$, $|M| = p^{tm}$ Тогда количество классов сопряженных над K подгрупп индекса p изоморфных с M модулей равно $(p^{tm} - 1)/(p^t - 1)$.*

Доказательство. Пусть модули M_1 и M_2 изоморфны модулю M, $\pi_1 : M_1 \to M$ и $\pi_2 : M_2 \to M$ — некоторые изоморфизмы, H_1 — подгруппа модуля M_1, H_2 — подгруппа модуля M_2. Предположим, что существует изоморфизм $\varphi : M_1 \to M_2$ такой, что $\varphi(H_1) = H_2$. Тогда $\alpha = \pi_2\varphi\pi_1^{-1}$ — автоморфизм модуля M такой, что $\alpha(\pi_1(H_1)) = \pi_2(H_2)$. Обратно, если α — автоморфизм модуля M такой, что $\alpha(\pi_1(H_1)) = \pi_2(H_2)$, то $\varphi = \pi_2^{-1}\alpha\pi_1$ — изоморфизм из M_1 в M_2 такой, что $\varphi(H_1) = H_2$. Таким образом, подгруппы H_1 и H_2 тогда и только тогда сопряжены над K, когда подгруппы $\pi_1(H_1)$ и $\pi_2(H_2)$ модуля M сопряжены над K. Отсюда следует, что количество классов сопряженных над K подгрупп индекса p изоморфных с M модулей равно количеству классов сопряженных над K подгрупп индекса p модуля M.

Пусть H — некоторая подгруппа индекса p модуля M, тогда $|H| = p^{tm-1}$. Пусть $L = \{\alpha \in E \mid \alpha H = H\}$. Нетрудно заметить, что L — подполе поля E. Положим $|L| = p^l$. Так как H и M — векторные пространства над L, то $l \mid (tm - 1)$ и $l \mid tm$, и, значит, $l = 1$. Поэтому классы сопряженных над K подгрупп индекса p модуля M содержат по $(p^t - 1)/(p - 1)$ подгруппы. Так как всего подгрупп индекса p в модуле M имеется $(p^{tm} - 1)/(p - 1)$, то классов сопряженных над K подгрупп индекса p будет $(p^{tm} - 1)/(p^t - 1)$. Лемма доказана.

Полупростой модуль называется изотипным, если он является прямой суммой изоморфных простых подмодулей (см. [12], гл. VIII, § 1). Все простые подмодули изотипного модуля изоморфны.

Лемма 6. *Пусть M — простой конечный K-модуль, $E = \mathrm{End}_K(M)$, $|E| = p^t$, $|M| = p^{tm}$. Модуль $B = \bigoplus_{i=1}^{n} (M)_i$ тогда и только тогда содержит подгруппу индекса p, не содержащую ненулевых подмодулей, когда модуль B циклический.*

Доказательство. Не ограничивая общности можно считать, что модуль M точный. По теореме Веддерберна [11] $K = \mathrm{End}_E(M) = \mathrm{M}_m(E) \simeq \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} (M)_i$. Модуль B циклический тогда и только тогда, когда он изоморфен некоторому фактор-модулю модуля K, поэтому цикличность модуля B равносильна условию $n \leqslant m$.

Известно, что $\mathrm{End}_E(B) \simeq \mathrm{M}_n(E)$ (см. [11], гл. XVII, § 1). Все простые подмодули изотипного модуля B сопряжены над K с (M_1). Действие любой матрицы из M_n (E) на $(M)_1$ определяется действием ее первой строки. Всего таких ненулевых строк имеется $p^{tn} - 1$. Стабилизируют $(M)_1$ те строки, у которых все элементы, кроме первого, нулевые, таких строк $p^t - 1$. Тогда количество простых подмодулей модуля B равно $(p^{tn} - 1)/ /(p^t - 1)$.

Пусть H — подгруппа индекса p модуля B, не содержащая ненулевых подмодулей. Покажем, что для любых двух простых подмодулей M_1 и M_2 модуля M подгруппы $H_1 = M_1 \cap H$ и $H_2 = M_2 \cap H$ не сопряжены над K. Предположим, что подгруппы H_1 и H_2 сопряжены. Тогда существует изоморфизм $\varphi : M_1 \to M_2$ такой, что $H_2 = \varphi(H_1)$. Если $M_1 = \langle a_1 \rangle \oplus H_1$ и $a_2 = \varphi(a_1)$, то $M_2 = \langle a_2 \rangle \oplus H_2$. Так как $|B : H| = p$, то для некоторого l $a_1 - \varphi(la_1) \in H$. Пусть $T = \{a = \varphi(la) \mid a \in M_1\}$. Тогда нетрудно проверить, что T — подмодуль модуля B и $T \leqslant H$, что противоечит выбору H. Таким образом, подгруппы H_1 и H_2 не сопряжены над K. По лемме 5 классов сопряженных над K подгрупп индекса p модулей изоморфных с M имеется $(p^{tm} - 1)/(p^t - 1)$, а различных простых подмодулей модуль B содержит $(p^{tn} - 1)/(p^t - 1)$, поэтому $n \leqslant m$, и, следовательно, модуль B циклический.

Пусть теперь $n \leqslant m$. Предположим, что модуль $\bigoplus_{i=2}^{n} (M)_i = B_1$ содержит подгруппу H_1 индекса p, не содержащую ненулевых подмодулей. Как показано выше, модуль B_1 содержит $(p^{t(n-1)} - 1)/(p^t - 1)$ простых подмодулей. Так как $n - 1 < m$, то из леммы 5 следует, что существует подгруппа $H_2 \leqslant (M)_1$ индекса p, не сопряженная над K ни с одним из пересечений простых подмодулей из B_1 с подгруппой H_1. Пусть $B_1 = = \langle a_1 \rangle \oplus H_1$, $(M)_1 = \langle a_2 \rangle \oplus H_2$ и $H = \langle H_1, H_2, a_1 - a_2 \rangle$. Предположим, что H содержит простой подмодуль T. Тогда отображение $\varphi : a \to b$, где $a \in \in (M)_1$, $b \in B_1$, $a + b \in T$, будет изоморфизмом. Если $\varphi(H_2) \leqslant H_1$, то подгруппы H_2 и $\varphi(H_2) = H_1 \cap \varphi((M)_1)$ сопряжены над K, что противоречит выбору H_2. Поэтому существует $a \in H_2$ такой, что $\varphi(a) \notin H_1$ и $a + \varphi(a) \in \in T$. Тогда $\varphi(a) \in H$, $\varphi(a) \in B_1$ и $\varphi(a) \in H_1$, что невозможно, так как $H \cap \cap B_1 = H_1$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть A — полупростой K-модуль, все простые подмодули которого конечны. Модуль A тогда и только тогда содержит подгруппу H, не содержащую ненулевых подмодулей, такую, что фактор-группа A/H — локально-циклическая, когда A — локально-циклический K-модуль.*

Доказательство. Предположим, что подгруппа H существует, и покажем, что всякий конечный подмодуль B модуля A циклический. Пусть $B = \bigoplus_{i=1}^{n} B_i$ — разложение модуля B в прямую сумму его изотипных компонент (см. [12], гл. VIII, § 3). Подгруппа $H_i = H \cap B_i$ имеет в B_i индекс p_i и не содержит ненулевых подмодулей. Тогда по лемме 6 модули B_i циклические. Пусть $b_1, \dots, b_n$ — их порождающие и $b = b_1 + \dots + b_n$. Из [12] (гл. VIII, предложение 9) следует $\langle b \rangle = \bigoplus_{i=1}^{n} (\langle b \rangle \cap B_i)$, а так как проекции $\langle b \rangle$ на B_i совпадают с B_i, то $B = \langle b \rangle$.

Пусть теперь A — локально-циклический модуль. Покажем сначала, что каждая силовская p_i-подгруппа A_i из A обладает подгруппой H_i индекса p_i. Пусть $A_i = \bigoplus_{j \in I} B_{i,j}$ — разложение модуля A_i в прямую сумму его изотипных компонент. Тогда из леммы 7 следует, что существуют подгруппы $H_{i,j} \leqslant B_{i,j}$, не содержащие ненулевых подмодулей и такие, что $p_i = |B_{i,j} : H_{i,j}|$. Пусть $B_{i,j} = \langle a_{i,j} \rangle \oplus H_{i,j}$ и $H_i = \langle H_{i,j}, a_{i,j} - a_{i,j+1} \mid j \in I \rangle$. Тогда $|A_i : H_i| = p_i$. Если подгруппа H_i содержит простой подмодуль T, то T содержится в некоторой изотипной компоненте B_j, и, значит, $T \leqslant H_j = H_i \cap B_j$, что невозможно. Таким образом, H_i не содержит ненулевых подмодулей. Теперь подгруппу H можно определить следующим образом: $H = \langle H_i \mid p_i \in \Pi(A) \rangle$. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть G — локально-полициклическая разрешимая группа конечного специального ранга. Группа G тогда и только тогда обладает точным неприводимым представлением над абсолютным полем F, когда G не содержит нормальных подгрупп без кручения и* Soc G *является локально-циклическим ZG-модулем, причем* char $F \notin \Pi$ (Soc G).

Доказательство. Ввиду конечности специального ранга группы G все простые подмодули модуля Soc G конечны. Тогда теорема следует из теоремы 2 и леммы 7. Теорема доказана.

Следствие. *Пусть G — локально-полициклическая разрешимая периодическая группа конечного специального ранга. Группа G тогда и только тогда обладает точным неприводимым представлением над абсолютным полем F, когда* Soc G *является локально-циклическим ZG-модулем, причем* chaz $F \notin \Pi$ (*Soc* G).

1. *Зайцев Д. И.* Произведения абелевых групп // Алгебра и логика.— 1980.— **19**, № 2.— С. 150—172.
2. *Roseblade J. E.* Group rings of policyclic groups // J. Pure and Appl. Algebra.— 1973.— 3, N 3.— P. 307—328.
3. *Werfritz B. A. F.* Groups whoseirreducible representations have finite degree // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1981.— 5, N 3.— P. 411—422.
4. *Коуровская* тетрадь / Под ред. В. Д. Мазурова, Ю. И. Мерзлякова, В. А. Чуркина.— 9-е изд., доп.— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1984.— 144 с.
5. *Тушев А. В.* О неприводимых представлениях локально-полициклических групп конечного ранга // Междунар. конф. по алгебре, посвященная памяти А. И. Мальцева : Тез. докл. по теории групп.— Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1989.— С. 125.
6. *Roseblade J. E.* Application of the Artin — Ress lemma to group rings // Simp. Math.— London : Acad. press.— 1976.— **17**.— P. 471—478.
7. *Бурбаки Н.* Коммутативная алгебра.— М. : Наука, 1971.— 709 с.
8. *Чарин В. С.* О группах автоморфизмов нильпотентных групп // Укр. мат. журн.— 1954.— **8**, № 3.— С. 295—304.
9. *Wilson J. S.* Some properties of groups inherited by normal subgroups of finite index// Math. Z.— 1970.— **144**, N 1.— S. 19—21.
10. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы: В 2-х т.— М. : Мир, 1977.— Т. 2.— 416 с.
11. *Ленг С.* Алгебра.— М. : Мир, 1968.— 564 с.
12. *Бурбаки Н.* Модули, кольца, формы.— М. : Наука, 1966.— 709 с.

Днепропетр. ун-т

Получено 10.04.89