УДК 517.928

А. В. Плотников

Асимптотическое исследование уравнений управляемого движения с многозначными траекториями

Рассматривается возможность применения метода усреднения для задач оптимального управления с терминальным критерием качества, в которых поведение объекта описывается дифференциальным включением, содержащим управление.

Розглядається можливість застосування методу усереднення до задач оптимального керування з термінальним критерієм якості, в яких поведінка об'єкта описується диференціальним включенням, що містить в собі керування.

1. Основные обозначения и определения. Обозначим через cc (R^n) пространство, состоящее из всех непустых компактных подмножеств пространства Conv (R^n) с метрикой, определенной по формуле

$$\alpha(A, B) = \max\{\max_{a\in A}\min_{b\in B} h(a, b),\ \max_{b\in B}\min_{a\in A} h(a, b)\}.$$

Определение 1. *Пусть $F: [t_0, T] \to$ cc (R^n). Тогда под интегралом Ауманна будем понимать*

$$\int_{t_0}^{T} F(t)\,dt = \left\{\int_{t_0}^{T} f(t)\,dt \mid f(t) \in F(t)\right\},$$

где $f(\cdot)$ — измеримые многозначные отображения, интегрируемые в смысле Ауманна [1].

Замечание 1. Если $F: [t_0, T] \to$ Comp (R^n), то интеграл в смысле определения 1 становится обычным интегралом Ауманна.

Пусть поведение объекта описывается дифференциальным уравнением с многозначной правой частью

$$\dot{x} \in F(t, x, u), \tag{1}$$

где $x \in R^n$ — фазовый вектор; $u \in R^k$ — вектор управления; $F: R^1 \times R^n \times R^k \to$ Comp (R^n) — многозначное отображение.

Считаем известным начальное состояние объекта

$$x(t_0) = x_0,\ x_0 \in R^n. \tag{2}$$

Пусть задано многозначное отображение

$$U: R^1 \to \mathrm{Conv}\,(R^k). \tag{3}$$

Определение 2. *Класс LU допустимых управлений объекта* (1), (2) *состоит из всех измеримых селекторов многозначного отображения* (3).

Определение 3. *Множество решений дифференциального включения* (1), (2), *соответствующее управлению $u(\cdot) \in LU$, будем называть пучком траекторий и обозначать $X(u)$.*

Определение 4. *Будем называть многозначной траекторией системы* (1), (2), *соответствующей допустимому управлению $u(\cdot) \in LU$, многозначное отображение $X(\cdot, u)$, определяемое соотношением*

$$X(t, u) = \{x(t) \mid x(\cdot) \in X(u)\},\ t \in R^1.$$

Пусть $mC = \min\{c \mid c \in C\}$, а $MC = \max\{c \mid c \in C\}$, $C \in \mathrm{Comp}\,(R^1)$.

2. Основная теорема. Пусть движение объекта управления описывается системой стандартного вида:

$$\dot{x} \in \varepsilon\,[F(t, x) + A(x)\,R(t, u)], \tag{4}$$

$$x(0) = x_0, \tag{5}$$

где $x \in R^n$ — фазовый вектор; $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $F: R^1 \times R^n \to \mathrm{Comp}(R^n)$, $R: R^1 \times R^k \to \mathrm{Conv}(R^m)$ — многозначные отображения; $A(x)$ — $(n \times m)$-матрица; $I = [0, L\varepsilon^{-1}] \subset R^1_+$; $u(t) \in U \subset R^k$, $t \in I$ — вектор управления.

Предположим, что правая часть системы (4), (5) в области

$$Q\{t \in I,\ x \in G(x_0),\ u(t) \in U \in \mathrm{Conv}(R^k)\}$$

удовлетворяет следующим условиям:

*A*1. $F: R^1 \times R^n \to \mathrm{Comp}(R^n)$ — многозначное отображение, 2π-периодическое и измеримое по t при фиксированном x и непрерывное, равномерно ограниченное и удовлетворяет условию Липшица с константой μ по x при фиксированном t;

*A*2. $A(x)$ — $(n \times m)$-матрица, непрерывная, равномерно ограниченная и удовлетворяющая условию Липшица с константой μ по x;

*A*3. $R: R^1 \times R^k \to \mathrm{Conv}(R^m)$ — многозначное отображение, 2π-периодическое и измеримое по t при фиксированном u и непрерывно, равномерно ограниченное, удовлетворяющее условию Липшица с константой μ по u при фиксированном t.

Системе (4), (5) поставим в соответствие следующую усредненную систему:

$$d\bar{x}/d\tau \in \bar{F}(\bar{x}) + A(\bar{x})V, \tag{6}$$

$$\bar{x}(0) = x_0, \tag{7}$$

где

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(t, x)\,dt,\ V \in W = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R(t, U)\,dt, \tag{8}$$

$V \in \mathrm{Conv}(R^m)$ — многозначное управление; интеграл в (8) от многозначного отображения понимают в смысле определения 1.

Таким образом, неавтономной системе уравнений движения объекта управления приведенная выше схема усреднения ставит в соответствие автономную систему уравнений движения с некоторым новым многозначным управлением.

Рассмотрим задачу с многозначным критерием

$$J(u) = \Phi(X(T, u)), \tag{9}$$

где $\Phi: \mathrm{Comp}(R^n) \to \mathrm{Conv}(R^1)$, $T = L\varepsilon^{-1}$, L — постоянная.

Задаче (4), (5), (9) поставим в соответствие усредненную систему

$$\bar{J}(V) = \Phi(\bar{X}(T, V)) \tag{10}$$

на траекториях системы (6), (7).

Определение 5. *Управление $u_*(\cdot) \in LU$ назовем P1-оптимальным в задаче* (4), (5), (9) ((6), (7), (10)), *если для любого управления $u(\cdot) \in LU$ справедливо неравенство $mJ(u) \leqslant mJ(u_*)$.*

Теорема. *Пусть правая часть системы* (4), (5) *определена в области Q и удовлетворяет условиям A1—A3. Кроме того, пусть функция $\Phi(X)$ непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с постоянной λ по X.*

Тогда для любого $L > 0$ можно указать такие $C(L) > 0$ и $\varepsilon_0(L) > 0$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ будут выполняться неравенства

$$mJ(u_*) - mJ(u^1) \leqslant C\varepsilon,\ |mJ(u_*) - m\bar{J}(V_*)| \leqslant C\varepsilon,$$

где $u_*(\cdot)$ — P1-оптимальное управление для задачи (4), (5), (9); *$V_*(\cdot)$ — P1-оптимальное управление для задачи* (6), (7), (10);

$$u^1(t) = \left\{u_i(t) \left| \int_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} R(t, u_i(t))\,dt = \int_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} V_*(t)\,dt,\ t \in [2\pi i, 2\pi(i+1))\right.\right\}.$$

Доказательство. Обозначим через $V^1(\cdot)$ следующее многозначное управление:

$$V^1(t) = \left\{ V_i \,\middle|\, V_i = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{2\pi i}^{2\pi(i+1)} R(t, u_*(t))\, dt, \right.$$

$$\left. t \in [2\pi i, 2\pi(i+1)),\ i = 0, 1, \ldots \right\}.$$

Пусть $X(\cdot, u_*)$, $\bar{X}(\cdot, V_*)$, $X(\cdot, u^1)$, $\bar{X}(\cdot, V^1)$ соответствуют включениям

$$\dot{x} \in \varepsilon [F(t, x) + A(x) R(t, u_*(t))],\ x(0) = x_0, \tag{11}$$

$$\dot{x} \in \varepsilon [\bar{F}(x) + A(x) V_*],\ x(0) = x_0, \tag{12}$$

$$\dot{x} \in \varepsilon [F(t, x) + A(x) R(t, u^1(t))],\ x(0) = x_0, \tag{13}$$

$$\dot{x} \in \varepsilon [\bar{F}(x) + A(x) V^1],\ x(0) = x_0. \tag{14}$$

Тогда по теореме о частичном усреднении дифференциальных включений [2] при $t \in [0, T]$ справедливы оценки

$$\begin{gathered} h(X(t, u_*),\ \bar{X}(t, V^1)) \leqslant C_1 \varepsilon, \\ h(X(t, u^1),\ \bar{X}(t, V_*)) \leqslant C_1 \varepsilon, \end{gathered} \tag{15}$$

из которых следует

$$\begin{gathered} h(J(u_*),\ \bar{J}(V^1)) \leqslant \lambda C_1 \varepsilon, \\ h(Ju^1),\ \bar{J}(V_*)) \leqslant \lambda C_1 \varepsilon. \end{gathered} \tag{16}$$

Очевидно, что

$$mJ(u_*) \geqslant mJ(u^1),\ m\bar{J}(V_*) \geqslant m\bar{J}(V^1). \tag{17}$$

Для $J(u_*)$ и $\bar{J}(V_*)$ справедливо одно из следующих неравенств:

$$mJ(u_*) > m\bar{J}(V_*), \tag{18}$$

$$mJ(u_*) \leqslant m\bar{J}(V_*). \tag{19}$$

В первом случае из (16) — (18) следует

$$m\bar{J}(V^1) + \lambda C_1 \varepsilon \geqslant mJ(u_*) > m\bar{J}(V_*) \geqslant m\bar{J}(V^1),$$

т. е.

$$|mJ(u_*) - m\bar{J}(V_*)| \leqslant \lambda C_1 \varepsilon. \tag{20}$$

Во втором случае из (16), (17) и (19) имеем

$$mJ(u^1) + \lambda C_1 \varepsilon \geqslant m\bar{J}(V_*) \geqslant mJ(u_*) \geqslant mJ(u^1),$$

т. е. справедливо неравенство (20).

Проверим теперь справедливость первого неравенства в утверждении теоремы:

$$\begin{aligned} mJ(u_*) - mJ(u^1) &= |mJ(u_*) - m\bar{J}(V_*) + m\bar{J}(V_*) - mJ(u^1)| \leqslant \\ &\leqslant |mJ(u_*) - m\bar{J}(V_*)| + |m\bar{J}(V_*) - mJ(u^1)| \leqslant 2\lambda C_1 \varepsilon. \end{aligned} \tag{21}$$

Полагая $C = 2\lambda C_1$, из (20) и (21) получаем утверждения теоремы.

Определение 6. *Управление $u_*(\cdot) \in LU$ назовем РЗ-оптимальным в задаче* (4), (5), (9) ((6), (7), (10)), *если для любого управления $u(\cdot) \in LU$ справедливо неравенство $MJ(u) \leqslant MJ(u_*)$.*

Замечание 2. Теорему, аналогичную предыдущей, можно доказать и для РЗ-оптимальных управлений.

З а м е ч а н и е 3. Если $P1$-оптимальное управление является также и $P3$-оптимальным, то утверждения теоремы можно переписать в следующем виде:

$$h(J(u^1),\ J(u_*)) \leqslant C\varepsilon,$$

$$h(J(u_*),\ \bar{J}(V_*)) \leqslant C\varepsilon.$$

З а м е ч а н и е 4. В случае, когда $\Phi : \mathrm{Comp}(R^n) \to R^1$ и $R : R^1 \times R^k \to R^m$, получаем результаты, изложенные в [3], если же и $F : R^1 \times R^n \to R^n$, — то изложенные в [4].

1. *Aumann R. J.* Integrals of set-valued functions // J. Math. Anal. and Appl.— 1965.— **12**, N 1.— P. 1—12.
2. *Плотников В. А.* Частичное усреднение дифференциального включения // Мат. заметки.— 1980.— 27, № 6.— С. 947—952.
3. *Плотников А. В.* Усреднение уравнений управляемого движения с многозначными траекториями // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 5.— С. 657—659.
4. *Плотников В. А.* Асимптотическое исследование уравнений управляемого движения // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика.— 1984.— № 4.— С. 30—37.

Одес. пед. ин-т

Получено 28.06.89