УДК 517.5

Н. Л. Пачулиа

Равномерные оценки (λ, φ)-сильных интегральных средних уклонений операторов Фурье

Получены оценки (λ, φ)-сильных интегральных средних уклонений операторов Фурье на классах $\widehat{C}^{\psi}_{\beta} M$, введенных А. И. Степанцом.

Одержані оцінки (λ, φ)-сильних інтегральных середніх відхилень операторів Фур'є на класах $\widehat{C}^{\psi}_{\beta} M$, які ввів О. І. Степанець.

Пусть ψ — непрерывная на $[0, \infty)$ функция такая, что преобразование

$$\widehat{\psi}(t) = \widehat{\psi}_{\beta}(t) = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\psi(v)\cos(vt+\theta)\,dv,\ \ \theta = \frac{1}{2}\beta\pi,\quad \beta\in R \tag{1}$$

суммируемо на $R = (-\infty, \infty)$, $\widehat{C}^{\psi}_{\beta} M$ — множество непрерывных на R функций, представимых в виде

$$f(x) = A_0 + \int_{R}\chi(x+t)\,\widehat{\psi}(t)\,dt, \tag{2}$$

где A_0 — некоторая постоянная, $\chi\in M$, M — множество функций с конечной нормой $\|\chi\|_M = \operatorname{ess\,sup}|\chi(t)|$, а интеграл (2) понимается как предел интегралов по расширяющимся симметричным промежуткам. Всякую функцию, эквивалентную x, называют (ψ, β)-производной функции f и обозначают f^{ψ}_{β} [1]. Далее, $\forall f\in \widehat{C}^{\psi}_{\beta} M$ определим операторы

$$F_{\sigma}(f;\ x) = A_0 + \int_{R} f^{\psi}_{\beta}(x+t)\,\widehat{\tau}_{\sigma}(t)\,dt,$$

называемые операторами Фурье, где $\widehat{\tau}_{\sigma}(t)$ — преобразование вида (1) для функции

$$\tau_{\sigma}(t) = \begin{cases}\psi(t), & 0\leqslant t\leqslant \sigma-1;\\ \psi(t)-(t-\sigma+1), & \sigma-1\leqslant t\leqslant\sigma;\\ 0, & t\geqslant\sigma.\end{cases}$$

Подробнее о свойствах функции $f\in\widehat{C}^{\psi}_{\beta} M$ см. в [1].

Рассмотрим оператор

$$H_d^{\varphi}(f;\ x,\ \lambda) = \int_d^{\infty} \lambda(\sigma)\,\varphi(|\rho_\sigma(f;\ x)|)\,d\sigma,$$

где λ, φ — неотрицательные функции, определенные на $[0,\ \infty)$, $f \in \hat{C}_\beta^\psi M$, $\rho_\sigma(f;\ x) = f(x) - E_\sigma(f;\ x)$. Оператор $H_d^\varphi(f,\ x,\ \lambda)$ является интегральным аналогом оператора $H_n^\varphi(f,\ x,\ \lambda)$, рассмотренного в [2] (см. также [3]) при исследовании вопросов сильной суммируемости рядов Фурье функции из классов $C_\beta^\psi M$.

Функция $\lambda(\sigma)$ может зависеть от некоторого параметра $t \in E \subset R$. Если $\lambda(\sigma) = \lambda_t(\sigma)$ определяет некоторый метод суммирования интегралов, то величины $H_d^\varphi(f;\ x,\ \lambda)$ назовем $(\lambda,\ \varphi)$-сильными интегральными средними уклонений операторов Фурье.

В настоящей работе получены оценки величин $\| H_d^\varphi(f;\ x,\ \lambda)\|_C$ для функции $f \in \hat{C}_\beta^\psi M$.

Будем считать, что функция ψ непрерывна на $[0,\ \infty)$, выпукла при $t \geqslant 1$, $\psi(0) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = 0$ и $\bigvee\limits_0^\infty \psi'(t) < \infty$. Множество таких функций ψ обозначим через $\mathfrak{A}$ [1].

Поставим в соответствие $\forall\ \psi \in \mathfrak{A}$ пару функций $\eta(t) = \eta(\psi,\ t) = \psi^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi(t)\right)$, $\mu(t) = \mu(\psi,\ t) = \dfrac{t}{\eta(t) - t}$ (ψ^{-1} — функция, обратная к ψ, $t \geqslant 1$) и с их помощью из $\mathfrak{A}$ выделим следующие подмножества [1]:

$$\mathfrak{A}_0 = \{\psi \in \mathfrak{A} : 0 < \mu(t) \leqslant K_1,\ t \geqslant 1\};\ \mathfrak{A}_\infty = \{\psi \in \mathfrak{A} : \mu(t) \uparrow \infty,\ t \to \infty\},$$

$$\mathfrak{A}_C\ \{\psi \in \mathfrak{A} : 0 < K_2 \leqslant \mu(t) \leqslant K_3,\ t \geqslant 1\},$$

где K_i, $i = \overline{1, 3}$ — постоянные не зависящие от t.

Пусть Φ — множество неубывающих и непрерывных на $(0,\ \infty)$ функций φ таких, что $\lim\limits_{t \to 0+} \varphi(t) = \varphi(0) = 0$, $\varphi(t) > 0$ при $t > 0$,

$$\ln \varphi(t) = O(t),\quad t \to +\infty. \tag{3}$$

Кроме того для любой функции φ существует фиксированное число $\alpha = \alpha_\varphi$ такое, что $\varphi(2t) \leqslant \alpha\varphi(t)$, $t \in [0,\ 1]$. Положим

$$E_\sigma(f_\beta^\psi) = \inf_{\chi \in P_\sigma^2} \| f_\beta^\psi(t) - \chi(t) \|_C,$$

где P_σ^2 — множество целых функций χ экспоненциального типа порядка σ, для которых $\chi(t)/(1 + |t|)$ суммируема с квадратом на R.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \mathfrak{A}_{C,\infty} = \mathfrak{A}_C \cup \mathfrak{A}_\infty$, $\eta(t) - t \geqslant \gamma_0 > 0$ $\forall t \geqslant 1$, *то* $\forall\ f \in \hat{C}_\beta^\psi M$, $\beta \in R$, $\forall d \geqslant 1$

$$R_d^\varphi(f;\ x) = (\eta(d) - d)^{-1} \int_d^{\eta(d)} \varphi(|\rho_\sigma(f;\ x)|\,d\sigma \leqslant K\varphi(\psi(d)\,E_{d-1}(f_\beta^\psi)). \tag{4}$$

Если *же* $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \mathfrak{A}_0$, *то* $\forall\ f \in \hat{C}_0^\psi M$, $\forall d \geqslant 1$

$$\bar{R}_d^\varphi(f;\ x) = \frac{1}{d}\int_d^{2d} \varphi(|\rho_\sigma(f;\ x)|)\,d\sigma \leqslant K\varphi(\psi(d)\,E_{d-1}(f_0^\psi)), \tag{5}$$

где K — положительная постоянная.

В случае, когда $\varphi(u) = u^p$, $p > 0$, теорема 1 доказана в [3]. Для доказательства теоремы в случае произвольной $\varphi \in \Phi$ установим следующий факт

Лемма. *Если* $\psi \in \mathfrak{A}_{C,\infty}$, $\eta(t) - t \geqslant 1$, $\forall t \geqslant 1$, $r = [\eta(d) - d]$, $d \geqslant 1$ ($[t]$ — *целая часть числа* t), σ_i — *произвольные числа из* $[d+i-1,\ d+i]$, $i \in B \subset \{1, \ldots, r\}$, *то* $\forall f \in \hat{C}^{\omega}_{\beta} M$, $\forall p > 0$

$$M^p_{B,d}(f;\ x) = \left\{\frac{1}{b}\sum_{i\in B} |\rho_{\sigma_i}(f;\ x)|^p\right\}^{1/p} \leqslant K\psi(d) E_{d-1}(f^{\psi}_{\beta}) \ln\frac{\eta(d)-d}{b}, \quad (6)$$

где b — *количество элементов множества* B, K — *абсолютная постоянная*.

Если же $\psi \in \mathfrak{A}_0$, $r = [d]$, $\sigma_i \in [d+i-1,\ d+i]$, $B \subset \{1, \ldots, r\}$, *то* $\forall f \in \hat{C}^{\psi}_0 M$

$$M^p_{B,d}(f;\ x) \leqslant K\psi(d)\, E_{d-1}(f^{\psi}_0)\left(\ln\frac{d}{b} + 1\right). \quad (7)$$

Доказательство. Докажем неравенство (6) (неравенство (7) доказывается аналогично). Величина $M^p_{B,d}(f;\ x)$ не убывает относительно параметра p. Следовательно, можно взять $p \geqslant 2$.

Воспользуемся равенством (57′) представления $\rho_\sigma(f;\ x)$ из [1] с учетом оценок (59′) из той же работы, согласно которому $\forall f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta} M$ получаем

$$\rho_\sigma(f;\ x) = B^{\psi}_{\sigma}(f,\ d^*,\ x) + b^{\psi}_{\sigma}(f,\ d^*,\ x), \quad (8)$$

где

$$|b^{\psi}_{\sigma}(f;\ d^*,\ x)| \leqslant K\psi(\sigma) E_{\sigma-1}(f^{\psi}_{\beta}),\ K > 0,$$

$$B^{\psi}_{\sigma}(f,\ d^*,\ x) = \frac{\nu(d^*)\psi(\sigma)}{\pi}\int\limits_{m_{d^*} \leqslant |t| \leqslant M_{d^*}} \frac{h(x+t)}{t}\sin(\sigma t + \theta)\, dt,$$

$$d^* = (\eta(\sigma) - \sigma)^{-1},\ m_{d^*} = \min\{d^*(\sigma),\ 1\},\ M_{d^*} = \max\{d^*(\sigma),\ 1\}, \quad (9)$$

$$h(t) = f^{\psi}_{\beta}(t) - \chi(t),\ \chi \in P^2_{\sigma} : E_{\sigma}(f^{\psi}_{\beta}) = \| f^{\psi}_{\beta}(t) - \chi(t)\|_C,$$

$$\nu(d^*) = \operatorname{sign}\{d^*(\sigma) - 1\}.$$

Подставляя вместо σ величину σ_i в выражение (8) и используя неравенство Минковского, с учетом неравенства (9) будем иметь

$$M^p_{B,d}(f;\ x) \leqslant \left\{\frac{1}{b}\sum_{i\in B} |B^{\psi}_{\sigma}(f,\ d^*,\ x)|^p\right\}^{1/p} + K\left\{\frac{1}{b}\sum_{i\in B}(\psi(\sigma_i) E_{\sigma_i - 1}(f^{\psi}_{\beta}))^p\right\}^{1/p} =$$

$$= U_1(d) + KU_2(d).$$

Здесь и ниже через K, K_1, ... обозначены постоянные, не зависящие от $f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta} M$, $\beta \in R$ и d.

Из монотонности функции $\psi(\sigma) E_{\sigma-1}(f^{\psi}_{\beta})$ для $\sigma \in [d,\ \eta(d)]$ следует

$$U_2(d) \leqslant \psi(d)\, E_{d-1}(f^{\psi}_{\beta}). \quad (10)$$

Обозначим через B_1 множество $i \in B$, для которых $d^*(\sigma_i) \leqslant 1$. Используя неравенство $|a+b|^q \leqslant |a|^q + |b|^q$ при $q \in (0,\ 1)$, поскольку $p \geqslant 2$, получаем

$$U_1(d) = \left\{\frac{1}{b}\sum_{i\in B_1} |B^{\psi}_{\sigma_i}(f;\ d^*,\ x)|^p + \frac{1}{b}\sum_{i\in B\setminus B_1} |B^{\psi}_{\sigma_i}(f,\ d^*,\ x)|^p\right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\frac{1}{b}\sum_{i\in B_1} |B^{\psi}_{\sigma_i}(f;\ d^*,\ x)|^p\right\}^{1/p} + \left\{\frac{1}{b}\sum_{i\in B\setminus B_1} |B^{\psi}_{\sigma_i}(f;d^*,x)|^p\right\}^{1/p} = U^{(1)}_1(d) + U^{(2)}_1(d).$$

Если $B_1 = B$ ($B_1 = \varnothing$), то считаем $U^{(2)}_1(d) = 0$ ($U^{(1)}_1(d) = 0$). Оценим величину $U^{(1)}_1(d)$ (величина $U^{(2)}_1(d)$ оценивается аналогично).

Разбивая на две части интегралы под знаком суммы в $U_1^{(1)}(d)$, в силу неравенства Минковского получаем

$$U_1^{(1)}(d) = \left\{\frac{1}{b}\sum_{i\in B_1}\left|\psi(\sigma_i)\int\limits_{d^*(\sigma_i)\leqslant|t|\leqslant 1}\frac{h(x+t)}{t}\sin(\sigma_i t+\theta)\,dt\right|^{1/p}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\psi(d)\left\{\left[\frac{1}{b}\sum_{i\in B_1}\left|\int\limits_{d^*(\sigma_i)\leqslant|t|\leqslant d^*(d)}\frac{h(x+t)}{t}\sin(\sigma_i t+\theta)\,dt\right|^{p}\right]^{1/p}+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{1}{b}\sum_{i\in B_1}\left|\int\limits_{d^*(d)\leqslant|t|\leqslant 1}\frac{h(x+t)}{t}\sin(\sigma_i t+\theta)dt\right|^{p}\right]^{1/p}\right\}=\psi(d)(W_1+W_2). \tag{11}$$

Очевидно, что

$$W_1\leqslant E_{d-1}(f_\beta^\psi)\max_{i\in B_1}\left|\ln\frac{d^*(\sigma_i)}{d^*(d)}\right| = E_{d-1}(f_\beta^\psi)\max_{i\in B_1}\left|\ln\frac{\eta(d)-d}{\eta(\sigma_i)-\sigma_i}\right|,$$

так как

$$\|h(t)\|_C = E_{\sigma-1}(f_\beta^\psi). \tag{12}$$

В [4, с. 186] показано, что $\forall\sigma\in[d,\ \eta(d)]$, $d\geqslant 1$ при $\psi\in\mathfrak{A}_{C,\infty}$ $0<K_1\leqslant(\eta(d)-d)/(\eta(\sigma)-\sigma)\leqslant K_2$. Отсюда следует

$$W_1\leqslant KE_{d-1}(f_\beta^\psi). \tag{12'}$$

Пусть σ_i^* — ближайшее к σ_i целое число из $[d,\ \eta(d)]$, причем $\sigma_r^* = [\eta(d)]$. Тогда, используя неравенство Минковского, имеем

$$W_2\leqslant\left\{\frac{1}{b}\sum_{i\in B_1}\left|\int\limits_{d^*(d)\leqslant|t|\leqslant 1}\frac{h(x+t)}{t}\sin(\sigma_i^* t+\theta)\,dt\right|^{p}\right\}^{1/p}+$$

$$+\left\{\frac{1}{b}\sum_{i\in B_1}\left|\int\limits_{d^*(d)\leqslant|t|\leqslant 1}\frac{h(x+t)}{t}[\sin(\sigma_i^* t+\theta)-\sin(\sigma_i t+\theta)]\,dt\right|^{p}\right\}^{1/p}=$$

$$=W_{2,1}+W_{2,2}.$$

В силу того, что $|\sigma_i^*-\sigma_i|\leqslant 1$, имеем $|\sin(\sigma_i^* t+\theta)-\sin(\sigma_i t+\theta)|/|t|\leqslant\leqslant 1$. Тогда очевидно, что

$$W_{2,2}\leqslant E_{d-1}(f_\beta^\psi). \tag{13}$$

Разбивая каждый из интегралов в выражении $W_{2,1}$ на части и используя неравенство Минковского, получаем

$$W_{2,1}\leqslant\left\{\frac{1}{b}\sum_{i\in B_1}\left|\int\limits_{1/b\leqslant|t|\leqslant 1}\frac{h(x+t)}{t}\sin(\sigma_i^* t+\theta)\,dt\right|^{p}\right\}^{1/p}+$$

$$+\left\{\frac{1}{b}\sum_{i\in B_1}\left|\int\limits_{d^*(d)\leqslant|t|\leqslant 1/b}\frac{h(x+t)}{t}\sin(\sigma_i^* t+\theta)\,dt\right|^{p}\right\}^{1/p}. \tag{14}$$

Второе слагаемое в правой части неравенства (14) не превышает

$$E_{d-1}(f_\beta^\psi)\ln\frac{1}{d^*(d)\,b}\,E_{d-1}(f_\beta^\psi)\ln\frac{\eta(d)-d}{b}, \tag{15}$$

а для оценки первого слагаемого положим

$$F(t)=\begin{cases}h(x+t)/t, & |t|\in[1/b,\ 1];\\ 0, & |t|\in[0,\ \pi]\diagdown[1/b,\ 1],\end{cases}\qquad F(t+2\pi)=F(t).$$

Таким образом,

$$\int\limits_{1/b\leqslant|t|\leqslant 1}\frac{h(x+t)}{t}\sin(\sigma_i^* t+\theta)\,dt=\pi\,[b_{\sigma_i^*}(F)\cos\theta+a_{\sigma_i^*}(F)\sin\theta],$$

где $a_{\sigma_i^*}$, $b_{\sigma_i^*}$ — коэффициенты Фурье функции F.

Следовательно, применяя неравенство Хаусдорфа—Юнга [5, с. 214], получаем

$$\left\{\frac{1}{b}\sum_{i\in B_1}|b_{\sigma_i^*}(F)\cos\theta+a_{\sigma_i^*}(F)\sin\theta|^p\right\}^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant Kb^{-1/p}\left\{\int\limits_{1/b\leqslant|t|\leqslant 1}\left|\frac{h(x+t)}{t}\right|^{p_1}\right\}^{1/p_1}\leqslant K_1E_{d-1}(f_\beta^\psi),\quad p_1=\frac{p}{p-1}.$$

Отсюда следует,

$$W_{2,1}\leqslant K_2E_{d-1}(f_\beta^\psi). \tag{16}$$

Из соотношений (10) — (13), (15) и (16) следует (6). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Докажем соотношение (4) (соотношение (5) доказывается аналогично). Если $E_{d-1}(f_\beta^\psi)=0$, то ввиду убывания функции $E_{\sigma-1}(f_\beta^\psi)$ следует $E_{\sigma-1}(f_\beta^\psi)=0$, $\sigma\geqslant d-1$. Тогда $f_\beta^\psi(t)=\chi(t)\in P_{d-1}^2$. В силу равенства (55) работы [1], в котором $\rho_\sigma(f,x)=\int\limits_R h(x+t)\hat{r}_\sigma(t)$, где $\hat{r}_\sigma(t)$ — некоторая суммируемая функция, а $h(t)=f_\beta^\psi(t)-\chi(t)$, получаем $\rho_\sigma(f;x)=0$, $d\leqslant\sigma\leqslant\eta(d)$. В этом случае справедливость соотношения (4) очевидна.

Пусть теперь $E_{d-1}(f_\beta^\psi)>0$, $\eta(d)>d+1$. Положим $d_i=d+i$, $i=\overline{0,r}$, и $d_{r+1}=\eta(d)$. Используя теорему о среднем, имеем

$$\int\limits_d^{\eta(d)}\varphi(|\rho_\sigma(f;\ x)|\,d\sigma=\sum_{i=0}^{r}\int\limits_{d_i}^{d_{i+1}}\varphi(|\rho_\sigma(f;\ x)|)\,d\sigma=$$

$$=\sum_{i=0}^{r}\varphi(|\rho_{\sigma_i}(f;\ x)|)(d_{i+1}-d_i)\leqslant\sum_{i=0}^{r}\varphi(|\rho_{\sigma_i}(f;x)|).$$

Пусть $\gamma\in N$, $x\in R$, $\nu(\gamma)$ — число индексов $i=\overline{0,r}$, для которых

$$|\rho_{\sigma_i}(f;\ x)|\geqslant\gamma\psi(d)\,E_{d-1}(f_\beta^\psi). \tag{17}$$

Далее, пусть $\delta_\gamma=1$, если $\nu(\gamma)\geqslant 1$, и $\delta_\gamma=0$, если $\nu(\gamma)=0$,

$$Q_\gamma=\{\sigma_i,\ i=\overline{0,r}:(\gamma-1)\,\psi(d)\,E_{d-1}(f_\beta^\psi)\leqslant|\rho_{\sigma_i}(f;x)|\leqslant\gamma\psi(d)\,E_{d-1}(f_\beta^\psi).$$

Группируя слагаемые, с учетом обозначения Q_γ получаем

$$\sum_{i=0}^{r}\varphi(|\rho_{\sigma_i}(f;\ x)|)=\sum_{\gamma=1}^{\infty}\delta_\gamma\sum_{\sigma_i\in Q_\gamma}\varphi(|\rho_{\sigma_i}(f;\ x)|)\leqslant\sum_{\gamma=1}^{\infty}\varphi(\gamma\psi(d)\,E_{d-1}(f_\beta^\psi))\,\nu(\gamma-1). \tag{18}$$

Пусть $\nu(\gamma)\geqslant 1$. Тогда, считая B в $M_{B,d}^p(f;\ x)$ множеством индексов i величин $\rho_{\sigma_i}(f;\ x)$, $i=\overline{0,r}$, для которых неравенство (17) выполняется, в силу соотношения (6) при $p=1$ находим

$$\gamma\psi(d)\,E_{d-1}(f_\beta^\psi)\leqslant\frac{1}{\nu(\gamma)}\sum_{i\in B}|\rho_{\sigma_i}(f;\ x)|\leqslant K_1\psi(d)\,E_{d-1}(f_\beta^\psi)\left(\ln\frac{r}{\nu(\gamma)}+1\right).$$

Следовательно, $\nu(\gamma)\leqslant r\exp(1-\gamma/K_1)$. Таким образом,

$$(\eta(d)-d)^{-1}\int\limits_d^{\eta(d)}\varphi(|\rho_\sigma(f;\ x)|)\,d\sigma\leqslant K\sum_{\gamma=1}^{\infty}\varphi(\gamma\psi(d)\,E_{d-1}(f_\beta^\psi))\exp(-\gamma/K_1). \tag{19}$$

В силу (3) существует число $\alpha>0$ такое, что $\varphi(u)\leqslant K\exp(\alpha u)$ $\forall u\in[0,\infty)$. На основании неравенства [6] $\sum\limits_{\gamma=1}^{\infty}\varphi(\gamma u)\exp(-\gamma/K_1)\leqslant K\varphi(u)$, справедливого $\forall u \in [0,\ 1/2K_1\alpha]$, в случае

$$\psi(d)\, E_{d-1}(f_\beta^\psi) \leqslant 1/2K_1\alpha \tag{20}$$

из (19) получаем (4). С другой стороны, соотношение (20) выполняется при $d \geqslant d_0$, поскольку $\psi(d)\, E_{\alpha-1}(f_\beta^\psi) \to 0$. Очевидно, существует K такое, что при $d \leqslant d_0$ неравенство (4) выполняется.

Пусть теперь $\eta(d) < d + 1$. Тогда на основании неравенства [1]

$$\|\rho_\sigma(f;\ x)\|_C \leqslant A\,[|\ln(\eta(\sigma) - \sigma)| + 1]\,\psi(\sigma)\, E_{\sigma-1}(f_\beta^\psi)$$

с использованием теоремы о среднем будем иметь

$$\int\limits_d^{\eta(d)} \varphi(|\rho_\sigma(f;\ x)|)\, d\sigma \leqslant \varphi(|\rho_{\sigma_0}(f;\ x)|\,(\eta(d) - d) \leqslant$$

$$\leqslant \varphi(K\psi(\sigma_0)\, E_{\sigma_0-1}(f_\beta^\psi)\,(|\ln(\eta(\sigma_0) - \sigma_0)| + 1). \tag{21}$$

Покажем, что при $\psi \in \mathfrak{A}_{C,\infty}$ и $\gamma_0 \leqslant \eta(d) - d \leqslant 1$ следует $\gamma_0 \leqslant \eta(\sigma) - \sigma \leqslant \leqslant C_1\ \forall \sigma \in [d,\ \eta(d)]$. Действительно, если $\psi \in \mathfrak{A}_\infty$, то ввиду убывания функции $(\eta(\sigma) - \sigma)/\sigma$ имеем $\eta(\sigma) - \sigma \leqslant (\eta(d) - d)\,\sigma/d \leqslant 2$. Если $\psi \in \mathfrak{A}_C$, то, учитывая, что $K_2 \leqslant \sigma/(\eta(\sigma) - \sigma) \leqslant K_3\ \ \forall \sigma \geqslant 1$, имеем $\eta(\sigma) - \sigma = = \dfrac{\eta(\sigma) - \sigma}{\sigma}\, \dfrac{d}{\eta(d) - d}\, \dfrac{\sigma}{d} \leqslant \dfrac{2K_3}{K_2}$. Таким образом, учитывая свойства функции $\varphi \in \Phi$, из (21) получаем (4). Теорема 1 доказана.

Используя теорему 1, докажем справедливость следующего утверждения.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \mathfrak{A}$, $\lambda(\sigma)$ — *определенная на* $[d,\ \infty)$, $d \geqslant 1$, *функция такая, что* $\psi(\sigma)\,\lambda(\sigma)$ *не возрастает. Тогда если* $\psi \in \mathfrak{A}_{C,\infty}$, $\eta(t) - - t \geqslant \gamma_0 > 0\ \ \forall t \geqslant d$, *то* $\forall f \in \hat{C}_\beta^\psi M$, $\beta \in R$, $\forall d \geqslant 1$

$$\|H_d^\varphi(f;\ x,\ \lambda)\|_C \leqslant K\,\Big\{\lambda(d)\,\varphi(\psi(d)\, E_{d-1}(f_\beta^\psi))\,(\eta(d) - d) +$$

$$+ \int\limits_d^\infty \lambda(\sigma)\,\varphi(\psi(\sigma)\, E_{\sigma-1}(f_\beta^\psi))\, d\sigma\Big\}. \tag{22}$$

Если же $\psi \in \mathfrak{A}_0$, *то* $\forall f \in \hat{C}_0^\psi M$, $\ \forall d \geqslant 1$

$$\|H_d^\varphi(f;\ x,\ \lambda)\|_C \leqslant K\,\Big\{d\lambda(d)\,\varphi(\psi(d)\, E_{d-1}(f_0^\psi)) + \int\limits_d^\infty \lambda(\sigma)\,\varphi(\psi(\sigma\ E_{\sigma-1}(f_0^\psi))\, d\sigma\Big\}, \tag{23}$$

где K — *постоянная.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем справедливость неравенства (22) (неравенство (23) доказывается аналогично). Обозначив $d_0 = d$, $d_i = = \eta(d_{i-1})$, $i = 1,\ 2,\ \ldots$, в силу теоремы 1 имеем

$$H_d^\varphi(f;\ x, \lambda) = \sum_{i=0}^\infty \int\limits_{d_i}^{d_{i+1}} \lambda(\sigma)\,\varphi(|\rho_\sigma(f;\ x)|)\, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant K \sum_{i=0}^\infty \max_{\sigma \in [d_i, d_{i+1}]} \lambda(\sigma)\,\varphi(\psi(d_i)\, E_{d_i-1}(f_\beta^\psi))\,(d_{i+1} - d_i).$$

Покажем, что

$$\frac{d_{i+1} - d_i}{d_i - d_{i-1}} \leqslant K \quad \forall i \geqslant 1. \tag{24}$$

По определению чисел d_i имеем

$$\frac{d_{i+1} - d_i}{d_i - d_{i-1}} = \frac{\eta(d_i) - \eta(d_{i-1})}{\eta(d_{i-1}) - d_{i-1}} = \frac{\eta(\eta(z)) - \eta(z)}{\eta(z) - z},$$

где $z = z(i) = d_{i-1}$.

Если $\psi \in \mathfrak{A}_C$, то в силу определения множества $\mathfrak{A}_C$ $\forall t \geqslant 1$ $K_3^{-1} t \leqslant \eta(t) - t \leqslant K_2^{-1} t$. Тогда

$$\frac{d_{i+1} - d_i}{d_i - d_{i-1}} \leqslant \frac{K_2^{-1} \eta(z)}{\eta(z) - z} \leqslant K_2 + 1.$$

Если же $\psi \in \mathfrak{A}_\infty$, то $2\eta'(t) = \psi'(t)/\psi'(\eta(t)) \leqslant K_3$ $\forall t \geqslant 1$, поэтому

$$\frac{d_{i+1} - d_i}{d_i - d_{i-1}} = \eta'(\xi) \leqslant K_3, \ \xi \in [z, \ \eta(z)].$$

Ввиду убывания функции $\lambda(\sigma)\psi(\sigma)$ имеем

$$\lambda(\sigma) = \frac{\lambda(\sigma)\psi(\sigma)}{\psi(\sigma)} \leqslant \frac{\lambda(d_i)\psi(d_i)}{\psi(\eta(d_i))} \leqslant 2\lambda(d_i) \quad \forall \sigma \in [d, \ d_{i+1}].$$

Следовательно, учитывая неравенство (24), получаем

$$H_d^\varphi(f; \ x, \ \lambda) \leqslant 2K \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(d_i)\varphi(\psi(d_i) E_{d_i-1}(f_\beta^\psi)(d_{i+1} - d_i) \leqslant$$

$$\leqslant K_3 [\lambda(d) \varphi(\psi(d) E_{d-1}(f_\beta^\psi)(\eta(d) - d) + \sum_{i=1}^{\infty} \lambda(d_i) \varphi(\psi(d_i) E_{d_i-1}(f_\beta^\psi)) \times$$

$$\times (d_i - d_{i-1}) \leqslant K_3 [\lambda(d) \varphi(\psi(d) E_{d-1}(f_\beta^\psi))(\eta(d) - d) +$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^{\infty} \int_{d_{i-1}}^{d_i} \lambda(\sigma) \varphi(\psi(\sigma) E_{\sigma-1}(f_\beta^\psi)) \, d\sigma.$$

Отсюда следует справедливость неравенства (22). Теорема 2 доказана. Отметим, что теорема 2 при $\varphi(u) = u^p$, $p > 0$, доказана в [3].

Оценки (22) и (23) при $d = 1$ принимают вид

$$\int_1^\infty \lambda(\sigma) \varphi(|\rho_\sigma(f; \ x)|) \, d\sigma \leqslant K \int_1^\infty \lambda(\sigma) \varphi(\psi(\sigma) E_{\sigma-1}(f_\beta^\psi)) \, d\sigma. \tag{25}$$

Очевидно, что неравенство (25) содержательно в случае сходимости интеграла, стоящего в его правой части.

Неравенство (25) справедливо и в случае, когда функция $\lambda(\sigma) = \lambda(\sigma, t)$ зависит от некоторого параметра $t \in E \subset R$, при условии, что $\lambda(\sigma, t)\psi(\sigma)$ убывает по переменной σ при любом фиксированном $t \in E$. Рассмотрим, например,

$$\lambda(\sigma) = \lambda(\sigma, t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha(t-\sigma)^{\alpha-1}}{(t-1)^\alpha}, & \sigma \in [1, \ t], \quad \alpha \geqslant 1; \\ 0, & \sigma \geqslant t. \end{cases}$$

Очевидно, что $\lambda(\sigma)$ не возрастает. На основании неравенства (25)

$$\frac{\alpha}{(t-1)^\alpha} \int_1^t (t-\sigma)^{\alpha-1} \varphi(|\rho_\sigma(f; \ x)|) \, d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K\alpha}{(t-1)^\alpha} \int_1^t (t-\sigma)^{\alpha-1} \varphi(\psi(\sigma) E_{\sigma-1}(f_\beta^\psi)) \, d\sigma,$$

т. е. получаем оценку скорости сходимости (C, α)-сильных интегральных средних уклонений операторов Фурье.

Пусть функция $F(\sigma)$ определена на $[d, \infty)$, $d \geqslant 1$; причем, убывая, стремится к нулю. Положим $\hat{C}_\beta^\psi F = \{f \in \hat{C}_\beta^\psi M : E_\sigma(f_\beta^\psi) \leqslant KF(\sigma)\}$. Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in \Phi$, $\psi \in \mathfrak{A}$, функция $\lambda(\sigma)$ *определена на* $[d, \infty)$, $d \geqslant 1$; *причем функция* $\lambda(\sigma)\psi(\sigma)$ *не возрастает. Тогда если* $\psi \in \in \mathfrak{A}_{C,\infty}$, $\eta(t) - t \geqslant \gamma_0 > 0 \quad \forall t \geqslant d$, *то*

$$\sup_{f \in \hat{C}^{\psi}_{\beta} F} \| H^{\psi}_{d}(f;\ x, \lambda)\|_C \leqslant K \Big\{ \lambda(d)\, \varphi(\psi(d) F(d)) (\eta(d) - d) + \\ + \int_{d}^{\infty} \lambda(\sigma)\, \varphi(\psi(\sigma) F(\sigma))\, d\sigma \Big\}.$$

Если же $\psi \in \mathfrak{A}_0$, *то*

$$\sup_{f \in \hat{C}^{\psi}_{0} F} \| H^{\psi}_{d}(f;\ x, \lambda)\|_C \leqslant K \Big\{ d\lambda(d)\, \varphi(\psi(d) F(d)) + \\ + \int_{d}^{+\infty} \lambda(\sigma)\, \varphi(\psi(\sigma) F(\sigma))\, d\sigma \Big\}.$$

1. *Степанец А. И.* Приближения целыми функциями в равномерной метрике // Приближение целыми функциями на действительной оси.— Киев, 1988.— С. 3—41.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.27).
2. *Пачулиа Н. Л.* О сильной суммируемости рядов Фурье (ψ, β)-дифференцируемых функций // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 6.— С. 808—814.
3. *Степанец А. И., Пачулиа Н. Л.* Оценки сильных средних уклонений операторов Фурье в равномерной метрике // Приближение целыми функциями на действительной оси.— Киев, 1988.— С. 48—56.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.27).
4. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических фннкций.— Киев : Наук. думка, 1987.— 268 с.
5. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды.— М. : Физматгиз, 1961.— 936 с.
6. *Totik V.* Notes on Fourier series: Stong approximation // J. Approxim. Theory.— 1985.— **43**.— P. 105—111.

Абхаз. ун-т

Получено 09.10.89