УДК 519.21

Д. В. Гусак

Осциллирующие процессы с независимыми приращениями и невырожденной винеровской компонентой

Для осциллирующего процесса $\zeta_z(t)$ $(\zeta_z(0)=z,\ t\geqslant 0)$, который задается с помощью двух однородных процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ с независимыми приращениями и невырожденными винеровскими компонентами, при некоторых ограничениях установлено соотношение для

$$\varphi(\lambda,\ \alpha)=\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}M\exp\{i\alpha\zeta_z(t)\}\,dt$$

и найдена характеристическая функция эргодического распределения рассматриваемого процесса.

Для осцилюючого процесу $\zeta_z(t)$ $(\zeta_z(0)=z,\ t\geqslant 0)$, який задається за допомогою двох однорідних процесів $\xi_1(t)$ та $\xi_2(t)$ з незалежними приростами та невиродженими вінеровськими компонентами, при деяких обмеженнях встановлено співвідношення для

$$\varphi(\lambda,\ \alpha)=\lambda\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}M\exp\{i\alpha\zeta_z(t)\}\,dt$$

і знайдена характеристична функція ергодичного розподілу розглядуваного процесу.

В [1—6] рассмотрены различные модели осциллирующих случайных блужданий, прикладной аспект изучения которых отражен в [3]. В [3—6] основное внимание уделено исследованию условий эргодичности и нахождению эргодического распределения осциллирующих блужданий. В частности, в [4—5] при некоторых ограничениях установлены соотношения для характеристических функций (х. ф.) допредельных и эргодических распределений осциллирующего блуждания, описываемого обобщенными пуассоновскими процессами.

В данной работе изложены результаты сообщения [6] на 5-й Вильнюсской международной конференции по теории вероятностей. Здесь осциллирующий процесс задается с помощью двух однородных процессов $\xi_k(t)$, $k = 1, 2$, с независимыми приращениями с невырожденными винеровскими компонентами и соответствующими кумулянтами

$$\psi_k(\alpha) = i\alpha a_k - \alpha^2\sigma_k^2/2 + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\alpha x} - 1)\,\Pi_k(dx),$$

$$\int_{-1}^{1} |x|\,\Pi_k(dx) < \infty, \quad k = 1, 2.$$

Для $\xi_1(t)$ разрешенной зоной блуждания является полуплоскость $\Pi_+ = \{y \geqslant 0\}$, для $\xi_2(t)$ — полуплоскость $\Pi_- = \{y \leqslant b\}$, $b > 0$. Осциллирующий процесс $\zeta_z(t)$ с началом в точке $z > 0$ описывается процессом $\xi_1(t)$ до момента первого выхода из зоны Π_+ затем — процессом $\xi_2(t)$ до выхода последнего из зоны Π_- и т. д.

С помощью граничных функционалов: $\xi_k^{\pm}(t)$ — экстремумов $\xi_k(t)$ на $[0, t]$, $\tau_k^{\pm}(x)$ — моментов первого достижения уровня x, $\pm x > 0$, $\gamma_k^{\pm}(x)$ — величин первого перескока через уровень x и обозначений

$$\tau_1^- = \tau_1^-(-z), \quad \tau_2^+(\gamma_1^-(-z) + b),$$

$$\tau_1^* = \tau_1^- + \tau_2^+, \quad \gamma_2^* = \gamma_2^+(\gamma_1^-(-z) + b)$$

так называемый осциллирующий процесс со сбрасыванием задается так:

$$\zeta_z(t) = \begin{cases} z + \xi_1(t), & 0 \leqslant t < \tau_1^-, \\ -\gamma_1^-(-z) + \xi_2(t - \tau_1^-), & \tau_1^- \leqslant t < \tau_1^*, \\ \zeta_{\gamma_2^*}(t - \tau_1^*), & \tau_1^* < t. \end{cases} \tag{1}$$

Аналогично задается осциллирующий процесс без сбрасывания, но при этом третья строчка в представлении (1) заменяется соотношением

$$\zeta_z'(t) = b + \zeta'_{\gamma_2^*}(t - \tau_1^*), \quad \tau_1^* < t. \tag{1'}$$

Чтобы найти с помощью представления (1) искомые х. ф.

$$\Phi_z(\lambda, \alpha) = M\exp\{i\alpha\zeta_z(\theta_\lambda)\} = \lambda\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} M\exp\{i\alpha\zeta_z(t)\}\,dt,$$

$$\varphi_z(\lambda, \alpha) = M\exp\{i\alpha\zeta_z'(\theta_\lambda)\}, \quad P\{\theta_\lambda > t\} = e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \ t > 0, \tag{2}$$

предположим, что при $\sigma_k > 0$, $k = 1, 2$,

$$\Pi_1(dx) = k_1 e^{c_1 x}dx, \ x < 0; \quad \Pi_2(dx) = k_2 e^{-c_2 x}dx, \quad x > 0. \tag{3}$$

При условии (3) на основании факторизационных соотношений из [7] устанавливается независимость между $\tau_1^-(\cdot)$ и $\gamma_1^-(\cdot)$, $\tau_2^+(\cdot)$ и $\gamma_2^+(\cdot)$, при этом $\gamma_{1,2}^{\mp}(\cdot)$ условно показательно распределены с параметрами c_1, c_2. Точнее говоря, при $z > 0$

$$M[e^{-\lambda\tau_1^-(-x)}, \gamma_1^-(x) > z] = e^{-c_1 z} P\{\xi_1^-(\theta_\lambda) < x\}, \quad x < 0,$$

$$M[e^{-\lambda\tau_2^+(x)}, \gamma_2^+(x) > z] = e^{-c_2 z} P\{\xi_2^+(\theta_\lambda) > x\}, \quad x > 0,$$

$$M[e^{-\lambda\tau_1^-(x)}, \gamma_1^-(x) = 0] = \frac{1}{g_2^- - g_1^-}[(c_1 - g_1^-)e^{-g_1^- x} + (g_2^- - c_1)e^{-g_2^+ x}],$$

$$M[e^{-\lambda\tau_2^+(x)}, \gamma_2^+(x) = 0] = \frac{1}{g_2^+ - g_1^+}[(c_2 - g_1^+)e^{-g_1^+ x} + (g_2^+ - c_2)e^{-g_2^+ x}], \tag{4}$$

где $g_k^\mp = g_k^\mp(\lambda)$, $k = 1, 2$, — нули знаменателей выражений, определяющих х. ф. $Me^{-s\xi_1^-(\theta_\lambda)}$ ($Me^{-s\xi_2^+(\theta_\lambda)}$) и являющихся квадратными трехчленами по s. Используя представление (1) и соотношения (4), находим

$$\Phi_z(\lambda, \alpha) = \tilde{\mathcal{J}}_1(z, \lambda, \alpha) + \tilde{\mathcal{J}}_2(z, \lambda, \alpha) + \Phi_0(\lambda, \alpha)\mathcal{J}_*(z, \lambda) + \hat{\Phi}(\lambda, \alpha)\mathcal{J}_{**}(z, \lambda), \tag{5}$$

где

$$\hat{\Phi}(\lambda, \alpha) = c_2 \int_0^\infty e^{-c_2 z}\Phi_z(\lambda, \alpha)\, dz,$$

$$\tilde{\mathcal{J}}_1(z, \lambda, \alpha) = e^{i\alpha z} M e^{i\alpha\xi_1^+(\theta_\lambda)} M[e^{i\alpha\xi_1^-(\theta_\lambda)}, \xi_1^-(\theta_\lambda) > z],$$

$$\tilde{\mathcal{J}}_2(z, \lambda, \alpha) = \tilde{\mathcal{J}}_2^0(z, \lambda, \alpha) + \tilde{\mathcal{J}}_2^+(z, \lambda, \alpha),$$

$$\tilde{\mathcal{J}}_2^0(z, \lambda, \alpha) = M[e^{i\alpha\xi_2(\theta\lambda)}, \xi_2^+(\theta_\lambda) < b]\, M[e^{-\lambda\tau_1^-(-z)}, \gamma_1^-(-z) = 0], \tag{6}$$

$$\tilde{\mathcal{J}}_2^+(z, \lambda, \alpha) = M[e^{-\lambda\tau_1^-(-z)}, \gamma_1^-(-z) > 0] \times$$

$$\times\, c_1 \int_0^\infty e^{-c_1 z} M[e^{i\alpha(\xi_2(\theta_\lambda) - b)}, \xi_2^+(\theta_\lambda) < z + b]\, dz,$$

$$\mathcal{J}_*(z, \lambda) = M[e^{-\lambda\tau_1^-(-z)}, \gamma_1^-(-z) = 0]\, M[e^{-\lambda\tau_2^+(b)}, \gamma_2^+(b) = 0] +$$

$$+ M[e^{-\lambda\tau_1^-(-z)}, \gamma_1^-(-z) > 0]\, M[e^{-\lambda\tau_2^+(b+\theta_{c_1})}, \gamma_2^+(b + \theta_{c_1}) = 0],$$

$$\mathcal{J}_{**}(z, \lambda) = M[e^{-\lambda\tau_1^-(-z)}, \gamma_1(-z) = 0]\, M[e^{-\lambda\tau_2^+(b)}, \gamma_2^+(b) = 0] +$$

$$+ M[e^{-\lambda\tau_1^-(-z)}, \gamma_1^-(-z) > 0]\, M[e^{-\lambda\tau_2^+(b+\theta_{c_1})}, \gamma_2^+(b + \theta_{c_1}) > 0].$$

Подобно (6) введем обозначения

$$\hat{\mathcal{J}}_k(\lambda, \alpha) = c_2 \int_0^\infty e^{-c_2 z}\mathcal{J}_k(z, \lambda, \alpha)\, dz, \quad \hat{\mathcal{J}}_{*(**)}(\lambda) = c_2 \int_0^\infty e^{-c_2 z}\mathcal{J}_{*(**)}(z, \lambda)\, dz,$$

$$k = 1, 2,$$

и докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *При условии* (3) *х. ф.* $\hat{\Phi}(\lambda, \alpha)$ *определяется соотношением*

$$\hat{\Phi}(\lambda, \alpha) = \Bigg[\tilde{\mathcal{J}}_1(\lambda, \alpha) + \hat{\mathcal{J}}_2(\lambda, \alpha) + \frac{\hat{\mathcal{J}}_*(\lambda)}{1 - \mathcal{J}_*(0, \lambda)} \times$$

$$\times (\tilde{\mathcal{J}}_1(0, \lambda, \alpha) + \tilde{\mathcal{J}}_2(0, \lambda, \alpha))\Bigg]\Bigg[1 - \hat{\mathcal{J}}_{**}(\lambda) - \frac{\hat{\mathcal{J}}_*(\lambda)\,\mathcal{J}_{**}(0, \lambda)}{1 - \mathcal{J}_*(0, \lambda)}\Bigg]^{-1}. \tag{7}$$

Доказательство. После подстановки в (5) $z = 0$ находим значение $\Phi_0(\lambda, \alpha)$. Применяя к (5) интегральное преобразование по $z > 0$ с учетом значения $\Phi_0(\lambda, \alpha)$, получаем соотношение (7).

Для нахождения эргодического распределения осциллирующего процесса $\zeta_z(t)$, $t \to \infty$, кроме условия (3) потребуем выполнения условия

$$-\infty < M\xi_1(1) < 0, \quad 0 < M\xi_2(1) < \infty. \tag{8}$$

Очевидно, условие (8) является необходимым для эргодичности $\zeta_z(t)$. Оно обеспечивает также невырожденность распределений абсолютных экстремумов: $\xi_1^+ = \xi_1^+(\infty)$, $\xi_2^- = \xi_2^-(\infty)$, $\varphi_1^+(\alpha) = M\exp\{i\alpha\xi_1^+\}$, $\varphi_2^+(\alpha) = M\exp\{i\alpha\xi_2^-\}$; при этом $\lim\limits_{\lambda\to 0} g_1^-(\lambda) = \lim\limits_{\lambda\to 0} g_1^+(\lambda) = 0$, $g_2^\pm(0) > 0$.

Следовательно, из соотношений (4) находим

$$P\{\gamma_1^-(-z) = 0\} \frac{1}{g_2^-(0)}[c_1 + (g_2^-(0) - c_1)e^{-g_2^-(0)z}],$$

$$P\{\gamma_1^-(-z) > u\} = \frac{g_2^-(0) - c_1}{g_2^-(0)}(1 - e^{-g_2^-(0)z})e^{-c_1 u}, \quad z > 0, \ u > 0,$$

$$P\{\gamma_2^+(x) = 0\} = \frac{1}{g_2^+(0)}[c_2 + (g_2^+(0) - c_2)e^{-g_2^+(0)x}],$$

$$P\{\gamma_2^+(x) > u\} = \frac{g_2^+(0) - c_2}{g_2^+(0)}(1 - e^{-g_2^+(0)x})e^{-c_2 u}, \quad x > 0, \ u > 0.$$

С учетом последних соотношений процесс $\zeta_z(t)$ можно связать с регенерирующей схемой блуждания. С этой целью обозначим через $\tau_1^*, \tau_2^*, \ldots$ моменты последовательных переключений $\zeta_z(t)$ на компоненту $\xi_1(\cdot)$ и $\varkappa_k = \zeta_z(\tau_k^* + 0)$, $k \geqslant 1$. Как и в [4], можно доказать, что цепь $\varkappa_k$ является эргодической марковской цепью с переходными вероятностями

$$Q[x, [0, u)) \equiv \int\limits_{-0}^{\infty} P\{\gamma_1^-(x) \in dz\} P\{0 \leqslant \gamma_2^+(z) < u\} =$$

$$= 1 - \frac{g_2^-(0) - c_1}{g_2^-(0)} \frac{g_2^+(0) - c_2}{g_2^+(0) + g_2^-(0)} e^{-g_2^+(0)u}(1 - e^{-g_2^-(0)x}),$$

и установить, таким образом, эргодичность процесса $\zeta_z(t)$.

Чтобы найти эргодическое распределение для $\zeta_z(t)$, $t \to \infty$, воспользуемся предельным переходом ($\lambda \to 0$) в соотношении (7). В результате этого перехода получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *При выполнении условий* (3) *и* (8) *х. ф. для эргодического распределения процесса* $\zeta_z(t)$, $t \to \infty$, *определяется соотношением*

$$\Phi_0(\alpha) = \lim_{t\to\infty} Me^{i\alpha\zeta_z(t)} = m_*^{-1}(\hat{\mathcal{T}}_1'(0, \alpha) + \hat{\mathcal{T}}_2'(0, \alpha)), \tag{9}$$

где

$$\hat{\mathcal{T}}_k'(0, \alpha) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-1}\hat{\mathcal{T}}_k(\lambda, \alpha), \qquad k = 1, 2;$$

$$m_* = M\tau_1^-(-\theta_{c_2}) + \hat{p}_0 M\tau_2^+(b) + \hat{p}_+ M\tau_2^+(b + \theta_{c_1})$$

— среднее время длительности регенерации — выражается через вероятности $\hat{p}_0 = P\{\gamma_1^-(-\theta_{c_2}) = 0\}$, $\hat{p}_+ = P\{\gamma_1^-(-\theta_{c_2}) > 0\}$.

Значения $\hat{\mathcal{I}}'_k$ выражаются следующим образом:

$$\hat{\mathcal{I}}'_1(0, \alpha) = \frac{g'_{1-}(0)\,\varphi_1^+(\alpha)\,g_2^-(0)\,(c_1 + c_2)}{c_1(c_2 + g_2^-(0))\,(c_2 - i\alpha)}, \quad g'_{1\pm}(0) = \frac{d}{d\lambda}\, g_1^{\pm}(\lambda)\Big|_{\lambda=0};$$

$$\hat{\mathcal{I}}'_2(0, \alpha) = g'_{1+}(0)\,\varphi_2^-(\alpha)\Bigg[bMe^{i\alpha\chi_b} + \frac{\hat{p}_0}{c_2}\,\frac{c_2 - g_2^+(0)}{i\alpha - g_2^+(0)}\,(1 - e^{(i\alpha - g_2^+(0))b}) +$$

$$+ \frac{c_1\hat{p}_+}{c_2}\Bigg(\frac{1}{c_1 + i\alpha}\left(\frac{c_2}{c_1} + \frac{c_2 - g_2^+(0)}{i\alpha - g_2^+(0)}\right) -$$

$$- \frac{c_2 - g_2^+(0)}{i\alpha - g_2^+(0)}\,\frac{1}{c_1 + v_2^+(0)}\,e^{(i\alpha - g_2^+(0))b}\Bigg)\Bigg]; \tag{10}$$

$$Me^{i\alpha\chi_b} = (i\alpha b)^{-1}\,(e^{i\alpha b} - 1).$$

Доказательство. Поскольку $\breve{\mathcal{I}}_k(0, \lambda, \alpha) = 0$, $k = 1, 2$, $\hat{\mathcal{I}}_*(0) + \hat{\mathcal{I}}_{**}(0) = 1$, то при $\lambda \to 0$ из (7) нетрудно получить формулу (9). Формулы (10) следуют из представлений для $\breve{\mathcal{I}}_k$ и установленных в [7] факторизационных соотношений. При этом устанавливается, что $-\hat{\mathcal{I}}'_*(0) - \hat{\mathcal{I}}'_{**}(0) = m_*$.

Введем необходимые для формулировки аналогичных утверждений в случае отсутствия сбрасывания (т. е. для процесса $\zeta'_z(t)$) обозначения

$$M_1^0(-z, \lambda) = P\{\xi_1^-(\theta_\lambda) < -z,\ \gamma_1^-(-z) = 0\},$$
$$M_2^0(b, \lambda) = P\{\xi_2^+(\theta_\lambda) > b,\ \gamma_2^+(b) = 0\},$$
$$M_1^+(-z, \lambda) = P\{\xi_1^-(\theta_\lambda) < -z,\ \gamma_1^-(-z) > 0\},$$
$$M_2^+(b, \lambda) = P\{\xi_2^+(\theta_\lambda) > b,\ \gamma_2^+(b) > 0\},$$

$$\tilde{\mathcal{I}}_1(z, \lambda, \alpha) = e^{i\alpha z}M\,[e^{i\alpha\xi_1(\theta_\lambda)},\ \xi_1^-(\theta_\lambda) > -z],$$

$$\tilde{\mathcal{I}}_2(z, \lambda, \alpha) = M\,[e^{i\alpha\xi_2(\theta_\lambda)},\ \xi_2^+(\theta_\lambda) < b]\,M_1^0(-z, \lambda) +$$

$$+ c_1\int_{+0}^{\infty} e^{-(i\alpha + c_1)y}M\,[e^{i\alpha\xi_2(\theta_\lambda)},\ \xi_2^+(\theta_\lambda) < y + b]\,M_1^+(-z, \lambda)\,dy,$$

$$i_*(z, \lambda) = M_1^0(-z, \lambda)\,M_2^0(b, \lambda) + c_1M_1^+(-z, \lambda)\int_0^{\infty} e^{-c_1y}M_2^0(y + b, \lambda)\,dy,$$

$$i_{**}(z, \lambda) = M_1^0(-z, \lambda)\,M_2^+(b, \lambda) + c_1M_1^-(-z, \lambda)\int_0^{\infty} e^{-c_1y}M_2^+(y + b, \lambda)\,dy.$$

Теорема 2. *При условии* (3) *х. ф.* $\hat{\varphi}(\lambda, \alpha)$ *для процесса* $\zeta'_z(t)$ *определяется соотношением*

$$\hat{\varphi}(\lambda, \alpha) = \left[\hat{i}_1(\lambda, \alpha) + \hat{i}_2(\lambda, \alpha) + \frac{\hat{i}_*(\lambda)}{1 - i_*(b, \lambda)}\,(\tilde{\mathcal{I}}_1(b, \lambda, \alpha) + \tilde{\mathcal{I}}_2(b, \lambda, \alpha))\right] \times$$

$$\times \left|1 - \hat{i}_{**}(\lambda)\,\frac{\hat{i}_*(\lambda)\,i_{**}(b, \lambda)}{1 - i_*(b, \lambda)}\right|^{-1}, \tag{11}$$

где

$$\hat{i}_k(\lambda, \alpha) = c_2 \int_0^\infty e^{-c_2 z} \tilde{\mathcal{J}}_k(b + z, \lambda, \alpha)\, dz, \quad k = 1, 2,$$

$$\hat{i}_{*(**)}(\lambda) = c_2 \int_0^\infty e^{-c_2 z} i_{*(**)}(b + z, \lambda)\, dz.$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1, но соответствующие аналитические соотношения немного усложняются в виду изменения, приводимого в представлении (1′).

Следствие 2. *При выполнении условий* (3) *и* (8) *х. ф. эргодического распределения для* $\zeta'_z(t)$, $t \to \infty$, *определяется соотношением*

$$\varphi_0(\alpha) = \lim_{t\to\infty} M e^{i\alpha\zeta'_z(t)} = \frac{\hat{i}'_1(0, \alpha) + \hat{i}'_2(0, \alpha)}{m_*(b)}, \tag{12}$$

где

$$i'_k(0, \alpha) = \lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-1} \hat{i}_k(\lambda, \alpha), \qquad k = 1, 2,$$

$$m_*(b) = M\tau_1^-(-b - \theta_{c_2}) + \hat{p}_0(b) M\tau_2^+(b) + \hat{p}_+(b) M\tau_2^+(b + \theta_{c_1}),$$

$$\hat{p}_0(b) = P\{\gamma_1^-(-b - \theta_{c_2}) = 0\}, \quad \hat{p}_+(b) = P\{\gamma_1^-(-b - \theta_{c_2}) > 0\}.$$

Доказательство основано на предельном переходе $(\lambda \to 0)$ в (11). Соотношения для $\hat{i}'_k(0, \alpha)$ имеют вид

$$\hat{i}'_1(0, \alpha) = \frac{c_2 g'_{1-}(0)\varphi_1^+(\alpha)}{c_1(g_2^-(0) + i\alpha)} \left[\frac{b g_2^-(0)(c_1 + i\alpha) M e^{i\alpha\chi_b}}{c_2 - i\alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{g_2^-(0)(c_1 + c_2) + c_1(i\alpha - c_2)}{c_2(c_2 - i\alpha)} + \frac{c_1 - g_2^-(0)}{g_2^-(0) + c_2} e^{-g_2^-(0) b} \right],$$

$$\hat{i}'_2(0, \alpha) = g'_{1+}(0)\varphi_2^-(\alpha) \left[b M e^{i\alpha\chi_b} + \hat{p}_0(b) \frac{c_2 - g_2^+(0)}{c_2(g_2^+(0) - i\alpha)} (e^{(i\alpha - g_2^+(0))b} - 1) + \right.$$

$$+ \frac{c_1}{c_2} \frac{\hat{p}_+(b)}{g_2^+(0) - i\alpha} \left(\frac{c_2 - g_2^+(0)}{c_1 + g_2^+(0)} e^{(i\alpha - g_2^+(0)b)} - \right.$$

$$\left.\left. - \frac{c_2(c_1 + i\alpha) - g_2^+(0)(c_1 + c_2)}{c_1 + i\alpha} \right) \right].$$

Следует заметить, что в отличие от эргодического распределения для осциллирующих вокруг прямой $y = 0$ пуассоновских процессов эргодические распределения с х ф. $\Phi_0(\alpha)$ и $\varphi_0(\alpha)$ зависят не только от $Me^{i\alpha\xi_1^+}$, $Me^{i\alpha\gamma_2^+(\infty)}$ и $Me^{i\alpha\xi_2^-}$, $Me^{i\alpha\gamma_1^-(-\infty)}$, но и от

$$\lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-1} M e^{i\alpha\xi_1^-(\theta_\lambda)} = \int_0^\infty M e^{i\alpha\xi_1^-(t)} dt, \quad \lim_{\lambda\to 0} \lambda^{-1} M e^{i\alpha\xi_2^+(\theta_\lambda)} = \int_0^\infty M e^{i\alpha\xi_2^+(t)} dt.$$

Поскольку при $b > 0$ х. ф. $\Phi_0(\alpha) = \Phi_0(\alpha; b)$, $\varphi_0(\alpha) = \varphi_0(\alpha; b)$ зависят от b, то возникает вопрос: как связаны предельные соотношения для этих х. ф. при $b \to 0$? При предельном переходе в (9) и (12) легко устанавливается, что $\Phi_0(\alpha; +0) = \varphi_0(\alpha; +0)$, и полученное таким образом предельное соотношение определяет х. ф. эргодического распределения процесса $\zeta_z^0(t)$, «склеенного» определенным образом из процессов $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$.

Если $\xi_k(t)=a_k t+\sigma_k W_k(t)$, $k=1, 2$, $\sigma_k>0$, $W_1(t)$ и $W_2(t)$ — независимые между собой стандартные винеровские процессы, то для $\xi_{1,2}(t)$ $\gamma_{1,2}^{+}(\cdot)\equiv 0$ и при $s>0$

$$M\exp\{i\alpha\xi_k^{\pm}(\theta_\lambda)\}=\frac{\rho_k^{\pm}(\lambda)}{\rho_k^{\pm}(\lambda)\mp i\alpha}, \quad \rho_k^{\pm}(\lambda)>0, \qquad k=1, 2.$$

При $a_1<0$, $a_2>0$ непрерывный осциллирующий процесс $\zeta_2'(t)$ (см. (1′)) имеет предельное распределение с х. ф.

$$\lim_{t\to\infty} M\exp\{i\alpha\zeta_2'(t)\}=\frac{M\exp\{i\alpha\chi_b\}}{\rho_{1-}'(0)+\rho_{2+}'(0)}\left[\frac{\rho_1^{+}(0)\,\rho_{1-}'(0)}{\rho_1^{+}(0)-i\alpha}+\right.$$

$$\left.+\frac{\rho_2^{-}(0)\,\rho_{2+}'(0)}{\rho_2^{-}(0)+i\alpha}\right], \quad \rho_{k\pm}'(0)=\frac{d}{d\lambda}\,\rho_k^{\pm}(\lambda)\Big|_{\lambda=0}, \qquad k=1, 2.$$

Отсюда следует, что при $b\to 0$

$$\varphi_0(\alpha, +0)=\frac{1}{\rho_{1-}'(0)+\rho_{2+}'(0)}\left[\frac{\rho_1^{+}(0)\,\rho_{1-}'(0)}{\rho_1^{+}(0)-i\alpha}+\frac{\rho_2^{-}(0)\,\rho_{2+}'(0)}{\rho_2^{-}(0)+i\alpha}\right],$$

$$\rho_1^{+}(0)=\frac{2|a_1|}{\sigma_1^2}, \quad \rho_2^{-}(0)=\frac{2a_2}{\sigma_2^2}, \quad \rho_{1-}'(0)=\frac{1}{|a_1|}, \quad \rho_{2+}'(0)=\frac{1}{a_2}.$$

1. *Kemperman G.* The oscillating random walk // Stochast. Process. and Appl.— 1974.— **2**, N 1.— P. 1—29.
2. *Keilson J., Servi L. D.* Oscillating random walk models for *GI / G/1* vacation systems with Bernoulli schedules // J. Appl. Probab.— 1986.— **23**.— P. 790—802.
3. *Боровков А. А.* Предельные распределения осциллирующего случайного блуждания // Теория вероятностей и ее применения.— 1980.— **25**, № 3.— С. 663—665.
4. *Братийчук Н. С., Гусак Д. В.* Эргодическое распределение осциллирующего процесса с независимыми приращениями // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 5.— С. 547—554.
5. *Гусак Д. В.* Об осциллирующих схемах случайного блуждания. I, II // Теория вероятностей и мат. статистика.— 1988.— Вып. 39.— С. 33—39.— 1989.— Вып. 40.— С. 11—17.
6. *Гусак Д. В.* Предельные распределения для осциллирующих случайных блужданий // Пятая Междунар. Вильнюс. конф. по теории вероятностей и мат. статистике, Вильнюс, 26 июня — 1 июля 1989 г.: Тез докл.— Вильнюс: Ин-т математики и кибернетики АН ЛитССР, 1989.— 3.— С. 170—171.
7. *Гусак Д. В.* Метод факторизации в граничных задачах для однородных процессов с независимыми приращениями // Распределение некоторых функционалов для процессов с независимыми приращениями и полумарковских процессов.—Киев, 1985.— С. 12—56.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.43).

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 15.09.89