УДК 517.944:519.46

Н. И. Серов

Условная инвариантность и точные решения нелинейного уравнения теплопроводности

Исследована условная инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности. Операторы условной инвариантности применены для редукции исходного уравнения к обыкновенным дифференциальным уравнениям, а также для нахождения его точных решений.

Досліджена умовна інваріантність нелінійного рівняння теплопровідності. Оператори умовної інваріантності використані для редукції вихідного рівняння до звичайних диференціальних рівнянь, а також для знаходження його точних розв'язків.

Рассмотрим нелинейное уравнение теплопроводности

$$u_0 + u_{11} = F(u), \tag{1}$$

где $u = u(x) \in R_1$, $x = (x_0, x_1) \in R_2$, $u_0 = \partial u/\partial x_0$, $u_{11} = \partial^2 u/\partial x_1^2$, $F(u)$ — гладкая функция, нелинейно зависящая от u.

В работах [1, 2] исследована инвариантность нелинейного уравнения теплопроводности методом С. Ли [3]. Из результатов этих работ следует, что уравнение (1) может быть инвариантно только относительно следующих операторов:

$$\begin{gathered} \partial_0 = \partial/\partial x_0, \quad \partial_1 = \partial/\partial x_1, \quad G = e^{x_0}(\partial_1 + m x_1 u \partial_u), \\ D = 2x_0\partial_0 + x_1\partial_1 + M(u)\,\partial_u, \quad X = e^{x_0} u \partial_u, \end{gathered} \tag{2}$$

где $m = \text{const}$, $M(u)$ — некоторая конкретная функция, линейно зависящая от u, $\partial_u = \partial/\partial u$.

В настоящей работе исследована условная инвариантность (более подробно об этом понятии см. [4]) уравнения (1).

Пусть

$$Q = A(x, u)\,\partial_0 + B(x, u)\,\partial_1 + C(x, u)\,\partial_u, \tag{3}$$

где A, B, C — гладкие функции, дифференциальный оператор первого порядка, действующий на многообразии $(x, u) \in R_3$.

Теорема 1. *Уравнение* (1) *Q-условно инвариантно относительно оператора* (3), *если функции* A, B, C *удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в одном из следующих случаев*:

1) $A \neq 0$ (*не умаляя общности можно положить* $A = 1$):

$$\begin{gathered} B_{uu} = 0, \quad C_{uu} = 2(B_{1u} + BB_u), \\ 3B_uF = 2(C_{1u} + B_uC) - (B_0 + B_{11} + 2BB_1), \\ CF_u - (C_u - 2B_1)F = C_0 + C_{11} + 2CB_1; \end{gathered} \tag{4}$$

2) $A = 0$, $B = 1$;

$$CF_u - C_uF = C_0 + C_{11} + 2CC_{1u} + C^2C_{uu}. \tag{5}$$

В формулах (4), (5) и везде ниже индекс внизу возле функции означает дифференцирование по соответствующему аргументу.

Доказательство. Запишем условие Q-условной инвариантности

$$\tilde{Q}S = \lambda_1 \cdot S + \lambda_2 \cdot (Qu), \tag{6}$$

или

$$\tilde{Q}S\,\Big|_{\substack{S=0 \\ Qu=0}} = 0, \tag{7}$$

где $S = u_0 + u_{11} - F(u)$, $Qu = Au_0 + Bu_1 - C$; λ_1, λ_2 — некоторые дифференциальные операторы, $\tilde{Q}$ — продолжение оператора Q [3].

С л у ч а й 1. Из уравнения $Qu = 0$ находим $u_0 = C - Bu_1$. Тогда условие (7) можно переписать следующим образом:

$$(\zeta^0 + \sigma^{11} - CF_u)|_{\substack{u_0 = C - Bu_1 \\ u_{11} = F - C + Bu_1}} = 0, \tag{8}$$

где

$$\zeta^0 = C_0 + u_0 C_u - u_1 B_0 - u_0 u_1 B_u, \quad \sigma^{11} = C_{11} + 2u_1 C_{1u} + u_1^2 C_{uu} - u_1 B_{11} -$$
$$- 2u_1^2 B_{1u} - u_1^3 B_{uu} + u_{11}(C_u - u_1 B_u) - 2u_{11}(B_1 + u_1 B_u). \tag{9}$$

Подставив (9) в (8), получим

$$u_1^3 B_{uu} + u_1^2(-C_{uu} + 2B_{1u} + 2BB_u) + u_1(3B_u F - 2C_{1u} - 2B_u C + B_0 +$$
$$+ B_{11} + 2BB_1) + CF_u - (C_u - 2B_1)F - C_0 - C_{11} - 2CB_1 = 0. \tag{10}$$

Поскольку функции B, C, F не зависят от u_1, то из (10) следует (4).

С л у ч а й 2. Из уравнения $Qu = 0$ имеем $u_1 = C$. Тогда

$$u_{11} = C_1 + C_u u_1 = C_1 + C_u C,$$
$$u_0 = F - u_{11} = F - C_1 - C_u C.$$

Проделав выкладки, аналогичные случаю 1, получим уравнение (5). Теорема доказана.

Т е о р е м а 2. *Уравнение* (1) *Q-условно инвариантно относительно оператора* (3) *при* $A = 1$, $B_u \neq 0$ *тогда и только тогда, когда оно локально эквивалентно уравнению*

$$u_0 + u_{11} = \lambda u^3 + \lambda_1 u + \lambda_2; \qquad \lambda, \lambda_1, \lambda_2 - \text{const}. \tag{11}$$

При этом оператор (3) *имеет вид*

$$Q = \partial_0 + \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}\, u\partial_1 + \frac{3}{2}(\lambda u^3 + \lambda_1 u + \lambda_2)\partial_u. \tag{12}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решим систему уравнений (4) в предположении, что $B_u \neq 0$. Интегрируя поочередно первые два уравнения (4), находим

$$B = a(x)u + b(x), \quad a(x) \neq 0,$$
$$C = \frac{1}{3}a^2 u^3 + (a_1 + ab)u^2 + M(x)u + N(x). \tag{13}$$

Тогда из третьего уравнения (4) получаем

$$F = \frac{2}{9}a^2 u^3 + \frac{2}{3}(2a_1 + ab)u^2 + \frac{1}{3a}(4a_{11} + 2a_1 b + 2ab_1 + 2aM - a_0 - a_{11}) \times$$
$$\times u + \frac{1}{3a}(2M_1 + 2aN - b_0 - b_{11} - 2bb_1), \tag{14}$$

где $a = a(x)$, $b = b(x)$, $M = M(x)$, $N = N(x)$ — произвольные дифференцируемые функции. Поскольку функция F не зависит от переменной x, а функции a, b, M, N — от переменной u, то коэффициенты при разных степенях u в формуле (14) должны быть постоянными. Это возможно только при условии, что a, b, M, N — const. После этого формулы (13), (14) принимают вид

$$B = a\left(u + \frac{b}{a}\right), \quad C = \frac{3}{2}F,$$
$$F = \frac{2}{9}a^2\left(u + \frac{b}{a}\right)^3 + \frac{2}{3}(M - b^2)u + \frac{2}{9a}(3aN - b^3). \tag{15}$$

Последнее уравнение (4) функции (15) удовлетворяют тождественно, Если в (1), (15) заменить $u + b/a$ на u, то получим формулы (11), (12). Теорема доказана.

В зависимости от вида корней кубического уравнения

$$\lambda u^3 + \lambda_1 u + \lambda_2 = 0$$

имеем четыре различных случая:

$$\begin{aligned}
&1)\ \lambda u^3 + \lambda_1 u + \lambda_2 = \lambda (u-\alpha)(u-\beta)(u-\gamma);\\
&2)\ \lambda u^3 + \lambda_1 u + \lambda_2 = \lambda (u-\alpha)^2 (u-\gamma);\\
&3)\ \lambda u^3 + \lambda_1 u + \lambda_2 = \lambda (u-\alpha)^3;\\
&4)\ \lambda u^3 + \lambda_1 u + \lambda_2 = \lambda (u-\alpha)(u^2 + pu + q),
\end{aligned} \tag{16}$$

где α, β, γ, p, q — постоянные, $u^2 + pu + q$ — квадратный трехчлен, не имеющий действительных корней.

Уравнения (11) с правыми частями (16) эквивалентными преобразованиями можно свести к следующим «каноническим» уравнениям:

$$\begin{aligned}
&1)\ u_0 + u_{11} = \lambda (u^3 - u);\\
&2)\ u_0 + u_{11} = \lambda (u^3 - 3u + 2);\\
&3)\ u_0 + u_{11} = \lambda u^3;\\
&4)\ u_0 + u_{11} = \lambda (u^3 + u).
\end{aligned} \tag{17}$$

Анзацы, полученные с помощью оператора (12), для каждого из уравнений (17) соответственно имеют вид

$$\begin{aligned}
&1)\ 2\,\mathrm{arcth}\, u + \sqrt{2\lambda}x_1 = \varphi(\omega),\ \omega = -\ln(1 - u^{-2}) + 3\lambda x_0;\\
&2) -\frac{4}{9}\ln\frac{u+2}{u-1} - \frac{2}{3}(u-1)^{-1} - \sqrt{2\lambda}x_1 = \varphi(\omega), \quad \omega = \frac{2}{9}\ln\frac{u+2}{u-1} -\\
&-\frac{2}{3}(u-1)^{-1} - 3\lambda x_0;\\
&3)\ \frac{2}{u} + \sqrt{2\lambda}x_1 = \varphi(\omega), \quad \omega = -\frac{1}{u^2} - 3\lambda x_0;\\
&4)\ 2\,\mathrm{arctg}\, u - \sqrt{2\lambda}x_1 = \varphi(\omega),\ \omega = -\ln(1 + u^{-2}) - 3\lambda x_0.
\end{aligned} \tag{18}$$

Эти анзацы редуцируют соответствующие уравнения (17) к следующим обыкновенным дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned}
&1)\ 2\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}^3 - \dot{\varphi};\\
&2)\ 2\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}^3 - 3\dot{\varphi} + 2;\\
&3)\ 2\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}^3;\\
&4)\ 2\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}^3 + \dot{\varphi}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Сравним нелинейности в правых частях уравнений (19) с нелинейностями исходных уравнений (17). Мы видим, что анзацы (18) позволили не только редуцировать уравнения (17), но и существенно изменили их нелинейные правые части. Это позволяет проинтегрировать уравнения (19) и представить их общие решения с помощью элементарных функций:

$$\begin{aligned}
&1)\ \varphi(\omega) = -2\mathrm{arcth}\sqrt{c_1 e^{\omega} + 1} + c_2;\\
&2)\ \ln\left[c_1 - \frac{3}{2}(\varphi + 2\omega)\right] = \ln c_2 - \frac{3}{2}(\varphi - \omega);\\
&3)\ \varphi(\omega) = 2\sqrt{c_1 - \omega} + c_2;\\
&4)\ \varphi(\omega) = 2\,\mathrm{arctg}\sqrt{c_1 e^{\omega} - 1} + c_2.
\end{aligned} \tag{20}$$

Отметим, что, например, общее решение уравнения $2\ddot{\varphi} = \varphi^3$ задается эллиптическим интегралом

$$\int\limits_0^{\varphi} \frac{d\tau}{\sqrt{c_1 + \tau^4}} = \frac{1}{2}(\omega + c_2).$$

Используя формулы (20) и (18), находим решения уравнений (17) соответственно:

$$1)\ \operatorname{arcth} u + \operatorname{arcth}\sqrt{\frac{u^2}{u^2-1}c_1 e^{3\lambda x_0} + 1} = \frac{1}{2}(c_2 - \sqrt{2\lambda}x_1);$$

$$2)\ u = -\frac{2c_2\exp\left(-\frac{9}{2}\lambda x_0 + \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}x_1\right) + 9\lambda x_0 + \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}x_1 + c_1 - 3}{c_2\exp\left(-\frac{9}{2}\lambda x_0 + \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}x_1\right) - 9\lambda x_0 - \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}x_1 - c_1};\tag{21}$$

$$3)\ u = \frac{\sqrt{\frac{2}{\lambda}}(x_1 + c_1)}{3(x_0 + c_2) - \frac{1}{2}(x_1 + c_1)^2};$$

$$4)\ \operatorname{arctg} u - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{u^2}{u^2+1}c_1 e^{-3\lambda x_0} - 1} = \frac{1}{2}(c_2 + \sqrt{2\lambda}x_1).$$

Исследуем теперь Q-условную инвариантность уравнения (1) относительно оператора (3) в предположении, что

$$A_u = B_u = 0, \quad C_{uu} \neq 0. \tag{22}$$

Из теоремы 1 следует, что в случае 1 таких операторов нет. В случае 2 $A = 0$, $B = 1$, а C определяется из уравнения (5), найти общее решение которого не представляется возможным. Приведем некоторые частные решения уравнения (5) в предположении (22). Эти результаты представим в виде таблицы.

Вид функции $F(u)$	F—решение уравнения $FF'' = 2$	F—решение уравнения $FF'' = 2(F' - 1)$	$F = \Phi'(u)$, $\Phi(u)$—произвольная гладкая функция
Оператор Q	$2\sqrt{x_0}\partial_1 + F(u)\partial_u$	$x_1\partial_1 + F(u)\partial_u$	$\partial_1 + \sqrt{2\Phi + c_2}\,\partial_u$
Анзац	$F'(u) = \varphi(x_0) + \frac{x_1}{\sqrt{x_0}}$	$F'(u) = x_1^2\varphi(x_0) + 1$	$\int\frac{du}{\sqrt{2\Phi + c_2}} = \varphi(x_0) + x_1$
Редуцированное уравнение	$\varphi' + \frac{1}{2x_0}\varphi = 2$	$\varphi' - 2\varphi + 2\varphi^2 = 0$	$\varphi' = 0$
Решение редуцированного уравнения	$\varphi = \frac{c_1}{\sqrt{x_0}} + \frac{4}{3}x_0$	$\varphi = \frac{1}{1 + c_1 e^{-2x_0}}$	$\varphi = c_1$
Решение уравнения (8)	$F'(u) = \frac{x_1 + c_1}{\sqrt{x_0}} + \frac{4}{3}x_0$	$F'(u) = \frac{x_1^2}{1 + c_1 e^{-2x_0}} + 1$	$\int\frac{du}{\sqrt{2\Phi + c_2}} = x_1 + c_1$

Отметим также, что и в предположении

$$A_u = B_u = C_{uu} = 0 \tag{23}$$

можно найти операторы, не входящие в алгебру инвариантности уравнения (1). Проиллюстрируем это на примере уравнения

$$u_0 + u_{11} = \lambda u^k, \tag{24}$$

где λ, k — постоянные, $\lambda \neq 0$, $k \neq 0; 1$.

В предположении (23) из уравнений (4) находим

$$Q = \partial_0 + B(x)\partial_1 + \alpha(x) u \partial_u, \tag{25}$$

где $B(x)$ и $\alpha(x)$ — решения системы уравнений

$$\alpha_0 + \alpha_{11} = (k-1)\alpha^2, \tag{26}$$

$$\begin{cases} B_0 = (k-1)\alpha B + \dfrac{k+3}{2}\alpha_1, \\ B_1 = \dfrac{1}{2}(1-k)\alpha. \end{cases} \tag{27}$$

Таким образом, чтобы найти оператор (25), необходимо решить уравнение (26) относительно неизвестной функции $\alpha(x)$, а потом из условий (27) определить $B(x)$. Интересно отметить, что при $k = 2$ формулы (26), (27) можно рассматривать как формулы размножения решений уравнения (24).

Условием совместности уравнений (26), (27) является уравнение пограничного слоя для функции $B(x)$:

$$\frac{2}{k-1} B_{111} + BB_{11} = 0, \tag{28}$$

в которое переменная x_0 входит как параметр. Уравнение (28) может быть сведено к уравнению Абеля второго рода

$$xyy' + y^2 + \left(7x + \frac{k-1}{2}\right) y + 6x^2 + (k-1)x = 0$$

с помощью цепочки замен

$$B_1 = p(B); \qquad p(B) = B^2 x(\eta), \quad \eta = \ln B; \qquad x'(\eta) = y(x).$$

Из (26), (27) находим, в частности, при $k = 3$, $\alpha(x) = 3x_1^{-2}$ оператор

$$Q = x_1^2\partial_0 + 3x_1\partial_1 + 3u\partial_u. \tag{29}$$

Анзац

$$u = x_1\varphi(\omega), \quad \omega = x_0 - \frac{1}{6}x_1^2,$$

полученный с помощью оператора (29), редуцирует уравнение (24) при $k = 3$ к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\varphi'' = 9\lambda\varphi^3. \tag{30}$$

Общее решение уравнения (30) задается эллиптическим интегралом

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\tau}{\sqrt{c_1 + \tau^4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}(\omega + c_2).$$

Тогда

$$\int_0^{u/x_1} \frac{d\tau}{\sqrt{c_1 + \tau^4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}\left(x_0 - \frac{1}{6}x_1^2 + c_2\right) \tag{31}$$

— решение уравнения (24) при $k = 3$.

З а м е ч а н и е. Полученные выше результаты переносятся и на случай произвольного количества переменных $x = (x_0, \vec{x}) \in R_{1+n}$ в уравнении (1). Так, для уравнения

$$u_0 + \frac{1}{2m}\Delta u = \lambda u^3, \tag{32}$$

где $u = u(x)$, $x = (x_0, \vec{x}) \in R_{1+n}$; λ, m — const, имеем а) операторы: $Q_a = 2\alpha_a\partial_0 + 3\lambda u\partial_a + 3\lambda\alpha_a u^3\partial_u$, где α_a — const, $\vec{\alpha}^2 = \lambda m$; $a = \overline{1, n}$;

анзац: $2/u + 2\overrightarrow{\alpha x} = \varphi(\omega)$, $\omega = -1/u^2 - 3\lambda x_0$;

редуцированное уравнение: $2\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}^3$;

решение уравнения (32): $u = \dfrac{2\overrightarrow{\alpha x}}{3\lambda x_0 - (\overrightarrow{\alpha x})^2}$;

б) операторы: $Q_a = \alpha_a(\overrightarrow{\alpha x})^2\partial_0 + 3\overrightarrow{\alpha x}\partial_a + 3\alpha_a u\partial_u$, $\vec{\alpha}^2 = 1$;

анзац: $u = \overrightarrow{\alpha x}\varphi(\omega)$, $\omega = x_0 - \dfrac{1}{6}(\overrightarrow{\alpha x})^2$;

редуцированное уравнение: $\ddot{\varphi} = 9\lambda\varphi^3$;

решение уравнения (32):

$$\int\limits_0^{u/\overrightarrow{\alpha x}} \frac{d\tau}{\sqrt{c_1 + \tau^4}} = \frac{3}{2}\sqrt{2\lambda}\left[x_0 - \frac{1}{6}(\overrightarrow{\alpha x})^2 + c_2\right].$$

А для уравнения

$$u_0 + \frac{1}{2m}\Delta u = F(u), \tag{33}$$

где функция $F(u)$ является решением уравнения $FF'' = 2$, имеем

2) операторы: $Q_a = 2\sqrt{x_0}\partial_a + \alpha_a F(u)\partial_u$, $\vec{\alpha}^2 = 2m$;

анзац: $F'(u) = \dfrac{\overrightarrow{\alpha x}}{\sqrt{x_0}} + \varphi(x_0)$;

редуцированное уравнение: $\varphi' + \dfrac{1}{2x_0}\varphi = 2$;

решение уравнения (33):

$$F'(u) = \frac{\overrightarrow{\alpha x} + c_1}{\sqrt{x_0}} + \frac{4}{3}x_0.$$

В заключение приведем некоторые результаты, полученные для уравнения

$$u_0 + u_{11} = F(u, u_1). \tag{34}$$

Теорема 3. *Уравнение* (34) *Q-условно инвариантно относительно оператора* (3) *при* $A = 1$, *если функции* B, C, F *удовлетворяют уравнению*

$$[B_u u_1^2 + (B_1 - C_u)u_1 - C_1]F_{u_1} - CF_u + (C_u - 2B_1 - 3B_u u_1)F =$$
$$= B_{uu}u_1^3 + (2B_{1u} + 2BB_u - C_{uu})u_1^2 + (B_0 + B_{11} + 2BB_1 - 2C_{1u} - 2B_u C)u_1 -$$
$$-(C_0 + C_{11} + 2B_1 C).$$

Теорема 3 доказывается аналогично теореме 1.

Из теоремы 3 получаем, в частности, следующие утверждения.

Теорема 4. *Уравнение*

$$u_0 + uu_1 + u_{11} = \ddot{\lambda}(u)\,u_1^3, \tag{35}$$

где $\lambda(u)$ — *произвольная гладкая функция,* $\ddot{\lambda} = \partial^2\lambda/\partial u^2$, *Q-условно инвариантно относительно оператора*

$$Q = \partial_0 + u\partial_1. \tag{36}$$

Теорема 5. *Уравнение*

$$u_0 + u_{11} = uu_1(1 - uu_1)(2 - uu_1) \tag{37}$$

Q-условно инвариантно относительно оператора

$$Q = \partial_0 + u\partial_1 + \partial_u. \tag{38}$$

Отметим, что при $\lambda(u) = 0$ уравнение (35) является уравнением Бюргерса. Анзац $x_0 u - x_1 = \varphi(u)$, полученный с помощью оператора (36), редуцирует уравнение (35) к уравнению $\ddot{\varphi} = \ddot{\lambda}$. Тогда $\lambda(u) = (x_0 + c_0)u - (x_1 + c_1)$ — решение уравнения (35).

Анзац

$$\frac{1}{2}u^2 - x_1 = \varphi(\omega), \quad \omega = u - x_0, \tag{39}$$

полученный с помощью оператора (38), редуцирует уравнение (37) к уравнению

$$\ddot{\varphi} = \dot{\varphi}^3 + 1. \tag{40}$$

Общее решение уравнения (40) имеет вид

$$\ln\left[\sin\frac{\sqrt{3}}{2}(\varphi + \omega + c_2)\right] = -\frac{3}{2}(\varphi - \omega + c_1). \tag{41}$$

Из формул (41) и (39) находим решение уравнения (37):

$$\ln\left\{\sin\frac{\sqrt{3}}{4}[(u+1)^2 - 2(x_0 + x_1) + c_2]\right\} = -\frac{3}{4}[(u-1)^2 + 2(x_0 - x_1) + c_1].$$

1. *Овсянников Л. В.* Групповые свойства уравнения нелинейной теплопроводности //Докл. АН СССР.— 1959.— **125**, № 3.— С. 492—495.
2. *Дородницын В. А., Князева И. В., Свищевский С. Р.* Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения.— 1983.— **19**, № 7.— С. 1215—1224.
3. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1978.— 400 с.
4. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов Н. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики.— Киев : Наук. думка, 1989.— 336 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 02.04.90