УДК 517.95

А. В. Романов

О размерности центрального многообразия для полулинейных параболических уравнений

Предложены конструктивные условия, позволяющие, в известном смысле, сводить параболическое эволюционное уравнение в гильбертовом пространстве к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) в R^k. Более точно, речь идет о построении в фазовом пространстве E k-мерного (гомеоморфного R^k) инвариантного многообразия H, притягивающего E.

Запропоновані конструктивні умови, які дозволяють, у відомому розумінні, зводити параболічне еволюційне рівняння в гільбертовому просторі до звичайного диференціального рівняння (ЗДУ) в R^k. Більш точно, мова йде про побудову в фазовому просторі E k-вимірної (гомеоморфної R^k) інваріантної многостатності H, яка притягує E.

1. Рассмотрим полулинейное параболическое уравнение

$$\dot{u} = -Au + F(u), \quad u(0) = u_0 \tag{1}$$

в сепарабельном вещественном гильбертовом пространстве E с нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Здесь $u = u(t)$, $\dot{u}$ — производная по $t \in R$, A и F — линейный и нелинейный операторы в E. Считаем, что оператор A самосопряженный, полуограничен снизу, имеет компактную резольвенту и собственные числа $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ (с кратностью), а оператор F глобально ограничен и равномерно липшицев: для $u, u' \in E$

$$\|F(u)\| \leqslant M, \quad \|F(u) - F(u')\| \leqslant L\|u - u'\|. \tag{2}$$

В этих условиях решения $u(t)$ уравнения (1) существуют при $t \geqslant 0$, ограниченные полутраектории $\{u(t)\}_{t\geqslant 0}$ относительно компактны в E и $\dot{u}(t)$ — непрерывные функции t на $(0, \infty)$ [1] (гл. 3). Если $\dim E = n$, то уравнение (1) — это ОДУ в $\mathbf{R}^n$.

Называем компактное множество $\mathrm{N} \subset E$ инвариантным (КИ-множеством), если для $u_0 \in \mathrm{N}$ решения $u(t)$ существуют при $t \in \mathrm{R}$ и $u(t) \in \mathrm{N}$. Простейшие примеры КИ-множеств — это траектории стационарных ($u(t) \equiv u_0$) и периодических ($u(t) = u(t+T)$) решений. Для широкого класса эволюционных уравнений установлена конечность хаусдорфовой размерности КИ-множеств и получены оценки этой размерности [2—4].

Интересно, однако, установить эквивалентность (при $t \to +\infty$) уравнения (1) и некоторого ОДУ в $\mathbf{R}^k$, гомеоморфность их КИ-множеств. Для этого оказывается полезным понятие центрального многообразия. В дальнейшем $\varphi \in \mathrm{Lip}$ будет означать локальную липшицевость и, значит, дифференцируемость почти всюду для скалярных функций или вектор-функций $\varphi(\tau)$ на том или ином промежутке в $\mathbf{R}$; любые соотношения с $\dot{\varphi}(\tau)$ нужно понимать как справедливые при почти всех τ из этого промежутка.

Пусть E_1 — k-мерное подпространство E, P — ортопроектор на E_1, $\sigma: E_1 \to E_1^{\perp}$ — равномерно липшицево отображение, $\psi(y) = y + \sigma(y)$ для $y \in E_1$, $V(u) = \|u - \psi(Pu)\|$ для $u \in E$, $V(u(t)) \in \mathrm{Lip}$ на $(0, \infty)$.

Определение. *Гомеоморфное R^k, липшицево многообразие (типа графика)*

$$H = \{u \in E : u = \psi(y),\ y \in E_1\}$$

называем центральным многообразием, если оно инвариантно и притягивает E:

а) *для $u_0 \in H$ решения $u(t)$ существуют при $t \in R$ и $u(t) \in H$;*

б) $(V(u(t)))_t^{\cdot} \leqslant -\gamma V(u(t))$ *для $u_0 \in E$, $t > 0$ ($\gamma > 0$).*

Из условия б) видим, что $V(u(t)) \leqslant V(u_0)\exp(-\gamma t)$ при $t \geqslant 0$ и, значит, $\mathrm{dist}(u(t), H) \to 0$ при $t \to +\infty$ для всех $u_0 \in E$. Если $u(t) \in H$, то $u(t) = \psi(y(t))$, где $y(t) = Pu(t)$ — решение ОДУ в $E_1 \simeq R^k$

$$\dot{y} = -PA\psi(y) + PF(\psi(y)), \quad y(0) = y_0 = Pu_0. \tag{3}$$

Обозначаем далее через η КИ-множества уравнения (3).

2. Будем говорить, что уравнение (1) диссипативно, если $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\,\|u(t)\| < \infty$ для $u_0 \in E$. В этом случае КИ-множества всегда существуют (как следствие относительной компактности $\{u(t)\}_{t\geqslant 0}$).

При $\lambda_1 > 0$ уравнение (1) диссипативно. Действительно, пусть $\varphi(t) \equiv \|u(t)\| \in \mathrm{Lip}$ на $(0, \infty)$. Так как $(Au, u) \geqslant \lambda_1(u, u)$ и $\|F(u)\| \leqslant M$, то $\dot{\varphi} \leqslant -\lambda_1\varphi + M$; пользуясь неравенством (12) (см. ниже) с $a = M$, $b = -\lambda_1$, находим

$$\|u(t)\| \leqslant \|u_0\| e^{-\lambda_1 t} + \frac{M}{\lambda_1}(1 - e^{-\lambda_1 t}),$$

откуда $\overline{\lim\limits_{t\to+\infty}}\,\|u(t)\| \leqslant M/\lambda_1$.

З а м е ч а н и е. Разумеется, КИ-множества могут существовать и в случае $\lambda_1 \leqslant 0$.

Л е м м а 1. *Если H — центральное многообразие, то все КИ-множества уравнения* (1) *лежат на H.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть N — КИ-множество, $u_0 \in$ N и $u_0 \notin H$. Тогда $V(u_0) > 0$ и из условия б) заключаем, что $V(u(t)) \to \infty$ при $t \to -\infty$, что противоречит ограниченности N.

Если H — k-мерное центральное многообразие, то $\psi : E_1 \to H$ — гомеоморфизм и, согласно лемме 1, отображение ψ устанавливает взаимно однозначное и взаимно непрерывное (в смысле расстояния между компактами) соответствие между КИ-множествами (3) и (1): $\psi\eta =$ N, PN $= \eta$.

Назовем КИ-множество N устойчивым, если в E существует окрестность $U \supset$ N такая, что для $u_0 \in U$ dist $(u(t),$ N$) \to 0$ при $t \to +\infty$, и неустойчивым, если для некоторого $u_0 \in$ N решение $u(t)$ существует при $t \in R$ и dist $(u(t),$ N$) \to 0$ при $t \to -\infty$. Аналогично определяется устойчивость и неустойчивость КИ множеств η для ОДУ (3) в E_1. Ясно, что устойчивость КИ-множества N влечет устойчивость $\eta = P$N, а неустойчивость η — неустойчивость N.

Л е м м а 2. *Если существует центральное многообразие H, то из неустойчивости КИ-множества* N $\subset H$ *следует неустойчивость* $\eta = P$N.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть N неустойчиво, $\alpha = \{u(t)\}_{t \in R}$ с $u_0 \notin$ N и $u(t) \to$ N при $t \to -\infty$. Тогда $\bar{\alpha}$ — КИ-множество для уравнения (1), по лемме 1 $\bar{\alpha} \subset H$, $Pu_0 \notin \eta$ и $y(t) = Pu(t) \to \eta$ при $t \to -\infty$, т. е. η — неустойчиво.

Наконец, можно утверждать, что КИ-множество N не может быть неустойчивым, если устойчиво N $= P$N (для ОДУ более точная формулировка «принципа сведения» дана в [5, с. 68]).

Таким образом, наличие k-мерного центрального многообразия позволяет сводить задачу описания устойчивых и неустойчивых КИ-множеств (и, в частности, стационарных и периодических решений) уравнения (1) к аналогичной задаче для ОДУ (3) в R^k

3. Вопрос о существовании центрального многообразия заданной размерности рассмотрен в [1] (гл. 6) для более общей ситуации (в частности, в банаховом пространстве). При этом изложение, обобщающее известную схему Крылова—Боголюбова для ОДУ [6], носит эскизный характер и не доведено до конструкцивных оценок. В наших предположениях, несколько модифицируя рассуждения [1], можно получить достаточные условия существования k-мерного центрального многообразия в виде (см. также [7]):

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geqslant 4L, \quad \lambda_1 \geqslant 0. \tag{4}$$

Аналогичные условия с большей константой получены в [8]. В [9] рассмотрены подобные вопросы для квазилинейных параболических систем с малой нелинейностью.

Здесь показано, что, действуя, как в [1, 6], но применяя более тонкие оценки и в полной мере используя свойства гильбертова пространства, уточнить неравенство (4):

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geqslant 2\sqrt{2}L, \quad \lambda_{k+1} > 2L. \tag{5}$$

Заметим, что при $\lambda_k \geqslant 0$ второе условие вытекает из первого. Следующая лемма показывает, что константы в достаточных условиях (5) уже недалеки от наилучших, а также, что анонсированные в [7] условия $\lambda_{k+1} - \lambda_k > 4L$, $\lambda_{k+1} > 0$ ошибочны.

Л е м м а 3. *Если c_1 и c_2 — константы такие, что при условиях $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geqslant c_1 L$, $\lambda_{k+1} > c_2 L$ всегда существует k-мерное центральное многообразие, то $c_1 \geqslant 2$ и $c_2 \geqslant 1$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u \in \mathbf{R}^2$, $\dot{u}_1 = -\lambda_2 u_1 + \chi(u_2)$, $\dot{u}_2 = -\lambda_1 u_2 - \chi(u_1)$, где $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, $\chi(\theta) = \min(|\theta|, 1) \cdot \operatorname{sign}\theta$. Тогда $L = 1$ и если $\lambda_2 - \lambda_1 < 2L$, т. е. $c_1 < 2$, то точка $u = 0$ — фокус, а значит, одномерного центрального многообразия не существует.

Пусть теперь $\dot{u}_1 = -\lambda_2 u_1 + \chi(u_1)$, $\dot{u}_2 = -\lambda_1 u_2$, где $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. Тогда $L = 1$ и если $\lambda_2 - \lambda_1 > 4L$, но $\lambda_2 < L$, т. е. $c_1 < 1$, то точка $u = 0$ — неустойчивый узел и, значит, одномерного центрального многообразия не существует.

Пусть, далее, $k \geqslant 1$ и $\lambda_{k+1} > 0$, E_1 и E_2 — инвариантные подпространства оператора A, отвечающие частям его спектра $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ и $(\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2} \dots)$. Рассмотрим класс $\mathfrak{M}_k(M, h)$ k-мерных многообразий

$$H_\sigma = \{u \in E : u = y + \sigma(y),\ y \in E_1\},$$

где $\sigma : E_1 \to E_2$, $h > 0$ и для $y', y' \in E_1$

$$\|\sigma(y)\| \leqslant \frac{M}{\lambda_{k+1}}, \quad \|\sigma(y) - \sigma(y')\| \leqslant h \|y - y'\|. \tag{6}$$

Такие отображения σ образуют полное метрическое пространство $\mathfrak{X}_k(M, h)$ с метрикой $\rho(\sigma, \sigma') = \sup \|\sigma(y) - \sigma'(y)\|$ по $y \in E_1$. Положим еще $\omega(h) = (1 + h^2)^{1/2} + (1 + h^{-2})^{1/2}$.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть для* $h \leqslant 1$

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geqslant \omega(h) L, \quad \lambda_{k+1} > (1 + h) L.$$

Тогда в классе $\mathfrak{M}_k(M, h)$ *существует единственное центральное многообразие.*

Следствие. *Если*

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geqslant 2\sqrt{2} L, \quad \lambda_{k+1} > 2L,$$

то в классе $\mathfrak{M}_k(M, 1)$ *существует единственное центральное многообразие.*

4. Доказательство теоремы. Обозначим через P_1 и P_2 ортопроекторы на E_1 и E_2, через y и x элементы E_1 и E_2; $A_1 = P_1 A$, $A_2 = P_2 A$, $F_1 = P_1 F$, $F_2 = P_2 F$; $\varkappa = L\sqrt{1 + h^2}$, $\beta_k = \lambda_k + \varkappa$. По условию теоремы $\lambda_{k+1} - \beta_k \geqslant \varkappa / h$.

Если $u(t) = x(t) + y(t)$ — решение уравнения (1), $y(t) = P_1 u(t)$ и $x(t) = P_2 u(t)$, то $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$ непрерывны на $(0, \infty)$,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -A_2 x + F_2(x + y), \\ \dot{y} &= -A_1 y + F_1(x + y). \end{aligned} \tag{7}$$

Для $\sigma \in \mathfrak{X}_k(M, h)$ положим $g(y) = F_1(\sigma(y) + y)$, $f(y) = F_2(\sigma(y) + y)$, $G(\sigma) : E_1 \to E_2$,

$$G(\sigma)(y_0) = \int_{-\infty}^{0} e^{A_2 s} f(y(s))\, ds, \tag{8}$$

где $y(s)$ — решение ОДУ в $E_1 \simeq R^k$

$$\dot{y} = -A_1 y + g(y), \quad y(0) = y_0. \tag{9}$$

Выполняются оценки (учитываем (2), (6) и $(\sigma(y), y) = 0$):

$$\begin{aligned} &(A_1 y, y) \leqslant \lambda_k (y, y), \quad (A_2 x, x) \geqslant \lambda_{k+1} (x, x), \\ &\|g(y) - g(y')\| \leqslant \varkappa \|y - y'\|, \quad \|f(y) - f(y')\| \leqslant \varkappa \|y - y'\|; \end{aligned} \tag{10}$$

для $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{X}_k(M, h)$ и $y, y' \in E_1$

$$\|F(\sigma(y) + y) - F(\sigma'(y') + y')\| \leqslant \varkappa \|y - y'\| + L\rho(\sigma, \sigma'). \tag{11}$$

Если $\varphi(\tau) \in \mathrm{Lip}$ на $(0, \infty)$, непрерывна в 0, $\{a, b\} \in R$, $\dot{\varphi} \leqslant a + b\varphi$, то

$$\varphi(\tau) \leqslant \varphi(0) e^{b\tau} + \frac{a}{b}(e^{b\tau} - 1). \tag{12}$$

Лемма 4. *Если $y(s)$ и $y'(s)$ — решения (9) с σ, y_0 и σ', y'_0 соответственно, то для $s \leqslant 0$*

$$\| y(s) - y'(s) \| \leqslant \| u_0 - y'_0 \| e^{-\beta_k s} + \frac{L\rho(\sigma, \sigma')}{\beta_k} (e^{-\beta_k s} - 1).$$

Доказательство. Пусть $\varphi_1(s) = \| y(s) - y'(s) \| \in \mathrm{Lip}$ на $(0, \infty)$. Тогда

$$\dot{\varphi}_1 \varphi_1 = -(A_1(y(s) - y'(s)), y(s) - y'(s)) + (F_1(\sigma(y(s)) + y(s)) - - F_1(\sigma'(y'(s)) + y'(s)), y(s) - y'(s)).$$

Полагая $\tau = -s$, $\varphi(\tau) = \varphi_1(-\tau)$ и используя (10), (11), находим $\dot{\varphi} \leqslant \beta_k \varphi + L\rho(\sigma, \sigma')$, и нужная оценка следует из (12) с $a = L\rho(\sigma, \sigma')$, $b = \beta_k$.

Так как $\| F(u) \| \leqslant M$, то из (8), (10) видим, что $\| G(\sigma)(y) \| \leqslant M/\lambda_{k+1}$ для $y \in E_1$.

Лемма 5. *Многообразие $H_\sigma \in \mathfrak{M}_k(M, h)$ инвариантно (удовлетворяет условию а)) тогда и только тогда, когда $\sigma = G(\sigma)$.*

Доказательство (см. также [1, с. 164]). Пусть $y_0 \in E_1$, $y(t)$ — решение уравнения (9), $u(t)$ — решение уравнения (1) с $u_0 = \sigma(y_0) + y_0 \in H_\sigma$. Из уравнения (8) следует

$$(G(\sigma)(y(t)) = \int_{-\infty}^{t} e^{A_2(s-t)} f(y(s))\, ds.$$

Решение $u(t) \in H_\sigma$ при $t \in R$ в том и только том случае, если $u(t) = \sigma(y(t)) + y(t)$ и, значит, $x(t) = \sigma(y(t))$ — ограниченное на R решение уравнения $\dot{x} = -A_2 x + f(y(t))$, $x(0) = \sigma(y_0)$ в E_2. Но единственное такое решение — это $x_1(t) = G(\sigma)(y(t))$, откуда и следует утверждение леммы.

Таким образом, существование в клессе $\mathfrak{M}_k(M, h)$ единственного инвариантного многообразия H_σ будет установлено, если показать, что $G: \mathfrak{X}_k(M, h) \to \mathfrak{X}_k(M, h)$ и G — сжатие в $\mathfrak{X}_k(M, h)$. Доказательство теоремы разобьем на три этапа.

I. $G: \mathfrak{X}_k(M, h) \to \mathfrak{X}_k(M, h)$. Известно, что $\| G(\sigma)(y) \| \leqslant M/\lambda_{k+1}$. Пользуясь (10), для y_0, $y'_0 \in E_1$ имеем

$$\mathrm{I} = \| G(\sigma)(y_0) - G(\sigma)(y'_0) \| \leqslant \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda_{k+1} s} \| f(y(s)) - f(y'(s)) \| ds \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda_{k+1} s} \| y(s) - y'(s) \| ds.$$

Применяя теперь лемму 4 с $\sigma = \sigma'$, получаем

$$\mathrm{I} \leqslant \frac{\varkappa}{\lambda_{k+1} - \beta_k} \| y_0 - y'_0 \| \leqslant h \| y_0 - y'_0 \|.$$

II. G — сжатие в $\mathfrak{X}_k(M, h)$. Пусть $y(s)$ и $y'(s)$ — решения (7) с σ и σ' соответственно и $y_0 = y'_0$. Тогда для $\mathrm{I} = \| G(\sigma)(y_0) - G(\sigma')(y_0) \|$ имеем (см. (11)):

$$\mathrm{I} \leqslant \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda_{k+1} s} \| F_2(\sigma(y(s)) + y(s)) - F_2(\sigma'(y'(s)) + y'(s)) \| ds \leqslant$$

$$\leqslant \varkappa \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda_{k+1} s} \| y(s) - y'(s) \| ds + L\rho(\sigma, \sigma') \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda_{k+1} s} ds.$$

Применяя лемму 4 с $y_0 = y_0'$, находим

$$\mathrm{I} \leqslant L\rho(\sigma, \sigma') \left\{ \frac{1}{\lambda_{k+1}} + \frac{\varkappa}{\beta_k} \int_{-\infty}^{0} e^{\lambda_{k+1}s} (e^{-\beta_k s} - 1)\, ds \right\} \frac{L}{\lambda_{k+1}} = \left(1 + \frac{\varkappa}{\lambda_{k+1} - \beta_k}\right) \times$$

$$\times\, \rho(\sigma, \sigma') \leqslant q\rho(\sigma, \sigma')$$

с $q < 1$, поскольку $\lambda_{k+1} - \beta_k \geqslant \varkappa/h$ и $\lambda_{k+1} > L(1+h)$.

Итак, установлено существование в $\mathfrak{M}_h(M, h)$ единственного иваринтного многообразия H_σ; считаем в дальнейшем, что $\sigma = G(\sigma)$.

III. Глобальное притяжение H_σ (условие б)). Для решения $u(t) = x(t) + y(t)$ уравнения (1) полагаем $\xi(t) = x(t) - \sigma(y(t)) \in E_2$. Пусть $z = z(s, t)$ — решение ОДУ в E_1

$$z_s = -A_1 z + g(z), \quad z(t, t) = y(t). \tag{13}$$

Так как $y(t) \in \mathrm{Lip}$ на $(0, \infty)$, то по теореме о зависимости решений от начальных данных z, $g(z)$, $f(z) \in \mathrm{Lip}$ по $t \in [s, \infty)$. Из (10) следуют оценки

$$\|(g(z))_t\| \leqslant \varkappa \|z_t\|, \quad \|(f(z))_t\| \leqslant \varkappa \|z_t\|. \tag{14}$$

Лемма 6. *При $s \leqslant t$ выполняется неравенство $\|z_t(s, t)\| \leqslant L \|\xi(t)\| \times \exp(\beta_k (t - s))$.*

Доказательство Для $\tau = t - s \geqslant 0$ положим $\varphi(\tau) = \|z_t(t - \tau, t)\| \in \mathrm{Lip}$ на $(0, \infty)$ (при фиксированном t). Тогда $\dot\varphi\varphi = (-z_{st}, z_t)$. Дифференцируя в (13) по t, имеем $z_{st} = -A_1 z_t + (g(z))_t$ и из (10) и (14) следует $\dot\varphi \leqslant \beta_k \varphi$, откуда $\varphi(\tau) \leqslant \varphi(0) \exp(\beta_k \tau)$. Представим теперь (13) в виде

$$z(s, t) = y(t) + \int_t^s (-A_1 z(\theta, t) + g(z(\theta, t)))\, d\theta,$$

продифференцируем по t (см. (7)) и положим $s = t$:

$$z_t(t, t) = \dot y(t) - (-A_1 y(t) + g(y(t))) = F_1(x(t) + y(t)) - F_1(\sigma(y(t)) + y(t)).$$

Отсюда и из (2) следует $\varphi(0) = \|z_t(t, t)\| \leqslant L \|\xi(t)\|$ и лемма доказана.

Положим теперь $\varphi(t) = \|\xi(t)\| \in \mathrm{Lip}$ на $(0, \infty)$. Тогда $\dot\varphi\varphi = (\dot\xi, \xi)$ и (см. (7)) $\dot\xi = \dot x - (\sigma(y))_t = -A_2 x + F_2(x + y) - (\sigma(y))_t$. Имеем

$$\sigma(y(t)) = G(\sigma)(y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A_2(s-t)} f(z(s, t))\, ds,$$

$$(\sigma(y(t)))_t = -A_2 \sigma(y(t)) + f(y(t)) + \mathrm{I}(t),$$

$$\mathrm{I}(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A_2(s-t)} (f(z, t))_t\, ds$$

и, таким образом,

$$(\dot\xi, \xi) = -(A_2\xi, \xi) + (F_2(x + y) - F_2(\sigma(y) + y), \xi) + (\mathrm{I}, \xi).$$

Пользуясь (10), (14) и леммой 6, находим

$$\|\mathrm{I}(t)\| \leqslant \varkappa \int_{-\infty}^{t} e^{\lambda_{k+1}(s-t)} \|z_t(s, t)\|\, ds \leqslant \frac{\varkappa L}{\lambda_{k+1} - \beta_k} \|\xi(t)\|$$

и, окончательно, $\dot\varphi \leqslant -\gamma\varphi$, где (см. (2), (10))

$$\gamma = \lambda_{k+1} - L - \frac{\varkappa L}{\lambda_{k+1} - \beta_k} \geqslant \lambda_{k+1} - (1 + h) L > 0.$$

Так как $\xi(t) = u(t) - \psi(P_1 u(t))$, то $\varphi(t) = V(u(t))$ — значит, $\dot V \leqslant -\gamma V$ и условие б) установлено. Теорема доказана полностью.

5. Различные аспекты теории инвариантных многообразий для ОДУ подробно рассмотрены в [10]; при этом, однако, вопрос о достаточных условиях в виде (5) существования таких многообразий не ставился.

Было бы интересно найти наименьшие возможные константы в условиях $\lambda_{k+1} - \lambda_k \geqslant c_1 L$, $\lambda_{k+1} > c_2 L$, при которых для уравнения (1) существует k-мерное центральное многообразие. Пока установлено: $2 \leqslant c_1 \leqslant 2\sqrt{2}$, $1 \leqslant c_2 \leqslant 2$.

Отметим, что условие глобальной ограниченности $\| F(u) \| \leqslant M$ в (2) обычно несущественно: его легко обеспечить, если в E существует конечная выпуклая положительно инвариантная область Ω ($u(t) \in \Omega$ при $t > 0$, $u_0 \in \Omega$), что часто выполняется в конкретных задачах.

С точки зрения приложений к уравнениям в частных производных весьма важно найти простые условия (типа (5)), позволяющие сводить эволюционное уравнение (1) к ОДУ в R^k при менее ограничительных (по сравнению с (2)) предположениях о нелинейности F, например таких ($A > 0$):

$$\| F(u) - F(u') \| \leqslant L \| A^{\theta} (u - u') \| \tag{15}$$

с $\theta \in [0, 1)$ (в (2) имеем $\theta = 0$). Подобные вопросы обсуждались в ряде недавних работ (см. [11, 12] и библиографию в них) и ранее в [8, 1], однако известные пока условия существования k-мерного центрального многообразия для уравнений типа (1)—(15) не являются в достаточной мере конструктивными.

Результаты работы анонсированы в [13].

1. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений.— М. : Мир, 1985.— 376 с.
2. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Аттракторы эволюционных уравнений с частными производными и оценки их размерности // Успехи мат. наук.— 1983.— **38**, вып. 4.— С. 137—187.
3. *Ладыженская О. А.* О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье—Стокса и других уравнений с частными производными // Там же.— 1987.— **42**, вып. 6.— С. 25—60.
4. *Koppel N., Ruelle D.* Bounds on complexity in reactiondiffusion systems // SIAM J. Appl. Math.— 1986.— **46**, N 1.— P. 68—80.
5. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний.— М. : Наука, 1987.— 302 с.
6. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 503 с.
7. *Mora X.* Finite-dimensional attracting manifolds in reactiondiffusion equations // Contemp. Math.— 1983.— **17**.— P. 353—360.
8. *Mane R.* Reduction of semilinear parabolic equations to finite dimensional C^1 flows // Lect. Notes Math.— 1977.— **597**.— P. 361—378.
9. *Вишневский М. П.* Интегральные множества нелинейных параболических систем // Динамика сплошной среды.— 1982.— Вып. 54.— С. 74—84.
10. *Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия в нелинейной механике.— М. : Наука, 1973.— 512 с.
11. *Бабин А. В., Вишик М. И.* Спектральное и стабилизированное асимптотическое поведение решений нелинейных эволюционных уравнений // Успехи мат. наук.— 1988.— **43**, вып. 5.— С. 99—132.
12. *Foias C., Sell G. R., Temam R.* Inertial manifolds for nonlinear evolutionary equations // J. Different. Equat.— 1988.— **73**, N 2.— P. 209—353.
13. *Романов А. В.* Асимптотическая конечномерность полулинейных параболических уравнений // Докл. АН СССР.— 1989.— **307**, № 3.— С. 548—551.

Ин-т геологии руд. месторождений,
петрографии, минералогии и геохимии АН СССР, Москва

Получено 03.07.89