УДК 517.54

С. А. Плакса

Краевая задача Римана с минус-бесконечным индексом на спрямляемой кривой

Изучается кусочно-непрерывная краевая задача Римана с минус-бесконечным индексом на замкнутой жордановой спрямляемой кривой; при этом индекс задачи учитывает интегральное влияние на ее разрешимость аргумента и модуля коэффициента задачи, а также свойств линии сопряжения. Допускаются разрывы второго рода у логарифма коэффициента и у свободного члена задачи. Решение задачи строится в явном виде в классе функций, допускающих слабостепенную особенность.

Вивчається кусочно-неперервна крайова задача Рімана з мінус-нескінченним індексом на замкненій жордановій спрямлюваній кривій; при цьому індекс задачі враховує інтегральний вплив на її розв'язність аргументу і модуля коефіцієнта задачі, а також властивостей лінії спряження. Допускаються розриви другого роду у логарифма коефіцієнта і у вільного члена задачі. Розв'язок задачі будується в явному вигляді в класі функцій, що допускають слабостепеневу особливість.

Данная работа является непосредственным продолжением исследования [1] кусочно-непрерывной краевой задачи Римана (КЗР) с бесконечным индексом на замкнутой жордановой спрямляемой кривой (з. ж. с. к.). В ней исследуется случай минус-бесконечного индекса КЗР; при этом допускаются разрывы второго рода у логарифма коэффициента и у свободного члена задачи. Решение КЗР строится в явном виде в классе функций, допускающих слабостепенную особенность в точке разрыва коэффициента задачи. Как и в [1], особенность изучаемой задачи состоит в необходимости одновременного учета влияния на ее разрешимость свойств $|G|$, $\arg G$ и линии сопряжения.

Пусть γ — з. ж. с. к. в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, D^+ и D^- — соответственно внутренняя и внешняя области, ограниченные γ, $T=\{x_0\}\subset\gamma$. Обозначим $E_\varepsilon(x):=\{t\in E:|t-x|\leqslant\varepsilon\}$ (в формульных определениях используются знаки «$:=$» и «$=:$», причем двоеточие пишется со стороны вводимого обозначения), $\mu_x(E,\varepsilon):=\operatorname{mes}E_\varepsilon(x)$, $\mu(E,\varepsilon):=\sup\limits_{x\in E}\mu_x(E,\varepsilon)$, где $E\subset\gamma$, $\varepsilon\in(0,\infty)$, mes обозначает линейную меру Лебега на γ; $\theta(\varepsilon):=\mu(\gamma,\varepsilon)$. В дальнейшем $\theta(\varepsilon)=O(\varepsilon^\nu)$, $\varepsilon\to0$, $0<\nu\leqslant1$. Обозначим через $H_T^\pm$ множество функций Φ, голоморфных в $D^\pm$ (включая точку $z=\infty$ для D^-), непрерывных в $\overline{D^\pm}\setminus T$ и удовлетворяющих неравенству $|\Phi(z)|\leqslant\leqslant c|z-x_0|^{-\nu'}$, $c=\mathrm{const}$, $0<\nu'<\nu$.

Рассмотрим КЗР об отыскании функций $\Phi^+\in H_T^+$, $\Phi^-\in H_T^-$ по условию граничного сопряжения

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t)+g(t)\quad\forall t\in\gamma\setminus T,\tag{1}$$

где $G(t):=\exp f(t)$, функция f в точке x_0 не имеет, вообще говоря, ни конечных, ни бесконечных односторонних пределов. При $g(t)\equiv0$ имеем однородную КЗР (ОКЗР), а при $g(t)\not\equiv0$ — неоднородную КЗР (НКЗР).

Обозначим через C_E множество непрерывных на $E\subset\gamma$ функций;

$$\tilde\varphi(z):=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma(\varphi(t)/(t-z))\,dt,\quad z\in\mathbb{C}\setminus\gamma;$$

$$F^\pm(x):=\lim_{z\to x,\,z\in D^\pm}F(z),\quad x\in\gamma\setminus T;$$

$$\Delta^f:=\varliminf_{r\to0}\Big(\inf_{\substack{|z-x_0|=r\\ z\in\mathbb{C}\setminus\gamma}}\operatorname{Re}\tilde f(z)\Big)/\ln r;\qquad r_T:=\frac{1}{2}\max_{x\in\gamma}|x-x_0|;$$

$\gamma_\varepsilon^+(x_0)$ — множество точек из связной компоненты множества $\gamma_\varepsilon(x_0)$, содержащей точку x_0, которые при положительном обходе γ проходятся после точки x_0; $c_\varepsilon(z):=\{t\in\mathbb{C}:|t-z|=\varepsilon\}$; $K_\varepsilon(z):=\{t\in\mathbb{C}:|t-z|\leqslant\varepsilon\}$; $\Omega_x(\varphi,E,\varepsilon):=\sup\limits_{t\in E\cap c_\varepsilon(x)}|\varphi(t)-\varphi(x)|$, если $E\cap c_\varepsilon(x)\neq\varnothing$, и $\Omega_x(\varphi,E,\varepsilon):=0$, если $E\cap c_\varepsilon(x)=\varnothing$ (здесь $\varepsilon\in(0,\infty)$, $E\subset\gamma$, $\varphi\in C_E$, $x\in E$), $E^\varphi:=\{x\in\gamma\setminus T:\ :\varphi(x)\neq 0\}$, где $\varphi\in C_{\gamma\setminus T}$; $r(E,t):=\min\{|a_t-t|,|b_t-t|\}$, где $t\in\overline{E}\subset\gamma$, a_t и b_t — концы связной компоненты множества $\overline{E_{\frac{1}{4}|t-x_0|}(t)}$, содержащей t.

Через Y^* обозначим следующее условие на $E\subset\gamma$: существует $c=\mathrm{const}$, $0<c<1$, такая, что для всякой внутренней точки $x\in E$ круг $K_{cr(E,x)}(x)$ не содержит ни одной точки $\gamma\setminus\overline{E}$. Интеграл вида

$$\int\limits_{[0,a]}(\varphi(y)/y)\,d\mu_x(E,y)$$

понимается как интеграл Лебега — Стилтьеса.

Ниже исследуется НКЗР при $\Delta^f=-\infty$ (минус-бесконечный индекс КЗР). ОКЗР при $\Delta^f=-\infty$ по теореме 4 [2] (частным случаем этой теоремы при $\nu=1$ является теорема 1 [3]) имеет только тривиальное решение.

Обозначим $$\Delta^-_{\tilde f,F_0}:=\varliminf_{x\to x_0,\,x\in\gamma\setminus T}\frac{\max\left\{\operatorname{Re}\tilde f^+(x),\operatorname{Re}\tilde f^-(x)\right\}-\ln\left|F_0\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right|}{\ln|x-x_0|};$$

$$\overline{\Delta}^-_{\tilde f,F_0}:=\varlimsup_{x\to x_0,\,x\in\gamma\setminus T}\frac{\operatorname{Re}\tilde f^+(x)-\ln\left|F_0\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right|}{\ln|x-x_0|};$$ $\varkappa^-:=\Delta^-_{\tilde f,F_0}+\nu-1$ при $\Delta^-_{\tilde f,F_0}+\nu$ целом и $\varkappa^-:=[\Delta^-_{\tilde f,F_0}+\nu]$ при $\Delta^-_{\tilde f,F_0}+\nu$ нецелом; K_1' — класс функций $\varphi\in C_{\gamma\setminus T}$, для которых существует измеримое множество E, $\overline{E^\varphi}\subset E\subset\gamma$, удовлетворяющее условию Y^*, такое, что $\mu(E,\varepsilon)=O(\varepsilon^{\nu_\varphi})$, $\varepsilon\to 0$, $\nu\leqslant\nu_\varphi\leqslant 1$, и выполняются соотношения

$$\sup_{x\in\gamma\setminus\gamma_\delta(x_0)}\int\limits_{[0,\varepsilon]}\Omega_x(\varphi,E,y)\,y^{-1}d\mu_x(E,y)\to 0\quad(\varepsilon\to 0)\quad\forall\delta>0,$$

$$|\varphi(x)|\leqslant c\,|x-x_0|^{\alpha_0^\varphi}\ (-\nu_\varphi<\alpha_0^\varphi\leqslant 0)\quad\forall x\in E,$$

$$\int\limits_{\left[0,\frac{1}{4}|x-x_0|\right]}\Omega_x(\varphi,E,y)\,y^{-1}d\mu_x(E,y)\leqslant c\,|x-x_0|^{\beta_0^\varphi}\ (\beta_0^\varphi\leqslant 0)\quad\forall x\in\overline{E}\setminus T$$

с не зависящей от x постоянной c.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $f\in C_{\gamma\setminus T}$; $\tilde f$ непрерывно продолжается на $\gamma\setminus T$ из D^+,D^-;*

$$\operatorname{Re}\tilde f(z)=\sum_{j=1}^n c_j\,|\ln|z-x_0||^{\alpha_j}+O(|\ln|z-x_0||),\quad z\to x_0,\quad z\in\mathbb{C}\setminus\gamma,\tag{2}$$

$$3=\alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_n>1,\quad c_1>0.$$

Пусть

$$\sum_{j=1}^n\alpha_jc_j(\ln t)^{\alpha_j-1}=\sum_{p=1}^q\sum_{i=1}^{n_p}\alpha_{p,i}c_{p,i}(\ln t)^{\alpha_{p,i}-1}=\sum_{p=1}^q u_p(t),\tag{3}$$

$$\alpha_{p,1}>\alpha_{p,2}>\ldots>\alpha_{p,n_p}\quad\forall p\in\overline{1,q},\ c_{p,1}>0\quad\forall p\in\overline{1,q},\ \gamma\cap\Big(\bigcup_{p=1}^q K_p\Big)=\varnothing,$$

где $K_p:=\bigcup\limits_{k=0}^\infty K_{\rho_{p,k}}\left(x_0+\frac{1}{r_{p,k}}\exp(i\varphi_p)\right)$, $0\leqslant\varphi_p<2\pi$, $|\ln\rho_{p,k}|=O(\ln r_{p,k})$

$(k \to \infty)$ $\forall p \in \overline{1, q}$, $r_{p,k} \in (R_{p,k-1}, R_{p,k}]$, $k = 1, 2, \ldots$, $R_{p,0} \leqslant r_{p,0} < r_{p,1}$, R_p, $k = 0, 1, \ldots$, *— решение уравнения* $u_p(R_{p,k}) = N_p + k$ *такое, что* $R_{p,k} > R_{p,0} > 1$ *и* u_p *возрастает на* $[R_{p,0}, \infty)$, N_p *— натуральное число;* $F_0(\zeta) = \prod_{p=1}^{q} F_p(\zeta)$, *где* $F_p(\zeta) = \left(1 - \frac{\zeta}{r_{p,0}} \exp(i\varphi_p)\right)^{N_p} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta}{r_{p,k}} \exp(i\varphi_p)\right)$, $p = 1, 2 \ldots q$; $g(t) = \hat{g}(t)(t - x_0)^m$, *где* $\hat{g} \in K_1'$, $m > \overline{\Delta}_{\bar{f}, F_0} - \Delta_{\bar{f}, F_0} - \nu + \max\{1 - \nu_{\hat{g}} - \alpha_0^{\hat{g}}, -\beta_0^{\hat{g}}\}$. *Тогда для разрешимости НКЗР необходимо и достаточно выполнение счетного числа условий*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_0\left(\frac{1}{t - x_0}\right) g(t)}{X^+(t)} \frac{dt}{t - z_{p,k}} = P_{\varkappa^-}(z_{p,k}), \quad k = 0, 1 \ldots; \; p = 1, 2, \ldots q, \tag{4}$$

$$\frac{(-1)^n n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_0\left(\frac{1}{t - x_0}\right) g(t)}{X^+(t)} \frac{dt}{(t - z_{p,0})^{n+1}} = P^{(n)}_{\varkappa^-}(z_{p,0}), \; n = 1, 2, \ldots, N_p - 1; \quad p = 1, 2, \ldots q \tag{5}$$

и при $\varkappa^- < -1 -$

$$\int_{\gamma} \frac{F_0\left(\frac{1}{t - x_0}\right) g(t)}{X^+(t)} t^{s-1} dt = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, -\varkappa^- - 1, \tag{6}$$

в которых $z_{p,k} := x_0 + \frac{1}{r_{p,k}} \exp(i\varphi_p)$, $X(z) := (z - x_0)^{-\varkappa^-} \exp(\tilde{f}(z))$ $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, $P_{\varkappa^-}$ *— некоторый многочлен степени не выше* $\varkappa^-$ *при* $\varkappa^- \geqslant 0$ *и* $P_{\varkappa^-} \equiv 0$ *при* $\varkappa^- < 0$. *При выполнении этих условий решение НКЗР единственно и задается формулой*

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{F_0\left(\frac{1}{z - x_0}\right)} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_0\left(\frac{1}{t - x_0}\right) g(t)}{X^+(t)} \frac{dt}{t - z} - P_{\varkappa^-}(z) \right) \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma. \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим $\psi(t) := \frac{F_0\left(\frac{1}{t - x_0}\right) g(t)}{X^+(t)}$. Необходимость. Пусть пара функций Φ^+, Φ^- является решением НКЗР. Из (1) получим

$$\frac{\Phi^+(t) F_0\left(\frac{1}{t - x_0}\right)}{X^+(t)} - \tilde{\psi}^+(t) = \frac{\Phi^-(t) F_0\left(\frac{1}{t - x_0}\right)}{X^-(t)} - \tilde{\psi}^-(t) \quad \forall t \in \gamma \setminus T.$$

С применением теоремы Адамара о трех кругах и с учетом леммы 2 [1] рассуждениями, аналогичными изложенным в работе [4, с. 46], доказывается, что определяемая этим равенством функция, голоморфная в $\mathbb{C} \setminus \{x_0\}$, имеет устранимую особенность в точке x_0. В бесконечно удаленной точке она, как нетрудно заметить, равна нулю, если $\varkappa^- < 0$, равна $\Phi^-(\infty)$, если $\varkappa^- = 0$, и может иметь полюс порядка не выше $\varkappa^-$ при $\varkappa^- > 0$. Следовательно, она тождественно равна определенной в условии теоремы функции $P_{\varkappa^-}$. Тогда Φ единственна и задается формулой (7), откуда с необходимостью следуют равенства (4)—(6).

Достаточность. Очевидно, что функция (7) при выполнении условий (4) — (6) голоморфна вне γ и удовлетворяет краевому условию (1). Остается показать, что $\Phi \in H_T^{\ddagger}$. Прежде всего отметим, что $|\tilde{\psi}(z)| \leqslant c|z-x_0|^{\mu-\varepsilon}$, $z \to x_0$, $z \in \mathbb{C}\setminus\gamma$, где $\mu = m + \varkappa^- - \overline{\Delta_{\bar{f},F_0}} + \min\{\alpha_0^{\hat{g}} + \nu_{\hat{g}} - 1, \beta_0^{\hat{g}}\}$ (см. аналогичные соотношения (5.5) — (5.8) из работы [2, с. 23]), и $|\Phi^{\pm}(x)| \leqslant c|x-x_0|^{-\nu'}$, $x \to x_0$, $x \in \gamma\setminus T$, $\nu' < \nu$. В указанных асимптотических неравенствах постоянные c не зависят от z и x. Далее, обозначим $\alpha := \frac{1}{2}\min_{i,j\in\overline{1,q}}\{|\varphi_i - \varphi_j|, |\varphi_i - \varphi_j + 2\pi|\}$ при $q > 1$ и $\alpha := \pi/2$ при $q = 1$ и обозначим $K_p^1 := \bigcup_{k=0}^{\infty} K_{\rho'_{p,k}}(z_{p,k})$, $p = 1, 2, \ldots, q$, где $\rho'_{p,k} := \frac{1}{2}\min\left\{\rho_{p,k}; \frac{1}{R_{p,k-1}} - \frac{1}{R_{p,k}}\right\}\sin\alpha$, если $\frac{1}{r_{p,k}} \in \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_{p,k-1}} + \frac{1}{R_{p,k}}\right); \frac{1}{R_{p,k-1}}\right]$, и $\rho'_{p,k} := \frac{1}{2}\min\left\{\rho_{p,k}; \frac{1}{r_{p,k}} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_{p,k}} + \frac{1}{R_{p,k+1}}\right)\right\}\sin\alpha$, если $\frac{1}{r_{p,k}} \in \left(\frac{1}{R_{p,k}}; \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_{p,k-1}} + \frac{1}{R_{p,k}}\right)\right)$. Легко проверяется, что $|\ln\rho'_{p,k}| = O(\ln r_{p,k})$ $(k\to\infty)$ $\forall p \in \overline{1,q}$, $K_i^1 \cap K_j^1 = \varnothing$ $\forall i,j: (i, j \in \overline{1,q}) \wedge (i \neq j)$ и каждый круг $K_{\rho'_{p,k}}(z_{p,k})$ содержит, кроме точки $z_{p,k}$, еще не более одного нуля функции $F'_p(z) := F_p\left(\frac{1}{z-x_0}\right)$. При этом возможны следующие случаи: 1) $z_{p,k-1} \in K_{\rho'_{p,k}}(z_{p,k})$; 2) $z_{p,k+1} \in K_{\rho'_{p,k}}(z_{p,k})$; 3) ни одна из точек $z_{p,i}$, кроме $z_{p,k}$, не принадлежит $K_{\rho'_{p,k}}(z_{p,k})$.

Рассмотрим случай 1. Пусть при некоторых p и $k, k \geqslant 2$, $z_{p,k-1} \in K_{\rho'_{p,k}}(z_{p,k})$. Тогда, обозначив

$$F_{p,k}(\zeta) := \left(1 - \frac{\zeta}{r_{p,0}}\exp(i\varphi_p)\right)^{N_p}\left(1 - \frac{\zeta}{r_{p,k-2}}\exp(i\varphi_p)\right)^2 \times$$

$$\times \prod_{\substack{i=1\\ i\neq k-1,k}}^{\infty}\left(1 - \frac{\zeta}{r_{p,i}}\exp(i\varphi_p)\right), \qquad F'_0(\zeta) := F_{p,k}(\zeta)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq p}}^{q} F_i(\zeta),$$

имеем

$$\frac{X(z)}{F_0\left(\frac{1}{z-x_0}\right)} = \frac{X(z)}{F'_0\left(\frac{1}{z-x_0}\right)}\,\frac{(z-z_{p,k-2})^2}{(z-z_{p,k-1})(z-z_{p,k})}\,. \tag{8}$$

Аналогично лемме 1 [1] доказывается неравенство

$$\left|\ln\left|F_{p,k}\left(\frac{1}{z-x_0}\right)\right| + \sum_{i=1}^{n_p} c_{p,i}|\ln|z-x_0||^{\alpha_{p,i}}\right| \leqslant c|\ln|z-x_0||$$

$$\forall z \in K_a(x_0)\setminus(K_p^1\setminus K_{\rho'_{p,k}}(z_{p,k})), \tag{9}$$

в котором $a := \min\left\{\frac{1}{2r_{i,0}} : i \in \overline{1,q}\right\}$ и постоянная c не зависит от z, p и k.

С учетом (4), (8) получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{F'_0\left(\frac{1}{t-x_0}\right)g(t)}{X^+(t)}\,\frac{t-z_{p,k-1}}{(t-z_{p,k-2})^2}\,dt = P_{\varkappa^-}(z_{p,k}),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{F_0'\left(\frac{1}{t-x_0}\right)g(t)}{X^+(t)}\,\frac{dt}{(t-z_{p,k-2})^2}=\frac{P_{\varkappa-}(z_{p,k})-P_{\varkappa-}(z_{p,k-1})}{z_{p,k}-z_{p,k-1}}.$$

Теперь, используя эти равенства, при $z\in K_{\rho'_{p,k}}(z_{p,k})$ получаем (приводимые ниже равенства верны при всех $p\in\overline{1,q}$, а индекс p в них опущен)

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{F_0\left(\frac{1}{z-x_0}\right)}(\tilde{\psi}(z)-P_{\varkappa-}(z_k)+P_{\varkappa-}(z_k)-P_{\varkappa-}(z))=$$

$$=\frac{X(z)}{F_0\left(\frac{1}{z-x_0}\right)}(P_{\varkappa-}(z_k)-P_{\varkappa-}(z))+\frac{X(z)(z-z_{k-2})^2}{2\pi iF_0'\left(\frac{1}{z-x_0}\right)(z-z_{k-1})}\times$$

$$\times\int\limits_{\gamma}\frac{F_0'\left(\frac{1}{t-x_0}\right)g(t)}{X^+(t)}\,\frac{t-z_{k-1}}{(t-z_{k-2})^2(t-z)}\,dt=\frac{X(z)(z-z_{k-2})^2}{F_0'\left(\frac{1}{z-x_0}\right)}\times$$

$$\times\left(\frac{P_{\varkappa-}(z_k)-P_{\varkappa-}(z)}{(z-z_{k-1})(z-z_k)}+\frac{1}{2\pi i(z-z_{k-1})}\int\limits_{\gamma}\frac{F_0'\left(\frac{1}{t-x_0}\right)g(t)}{X^+(t)}\times\right.$$

$$\times\frac{t-z_{k-1}}{(t-z_{k-2})^2(t-z)}\,dt-\frac{1}{2\pi i(z-z_{k-1})}\int\limits_{\gamma}\frac{F_0'\left(\frac{1}{t-x_0}\right)g(t)}{X^+(t)}\,\frac{dt}{(t-z_{k-2})^2}+$$

$$\left.+\frac{P_{\varkappa-}(z_k)-P_{\varkappa-}(z_{k-1})}{(z-z_{k-1})(z_k-z_{k-1})}\right)=\frac{X(z)(z-z_{k-2})^2}{F_0'\left(\frac{1}{z-x_0}\right)}\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{F_0'\left(\frac{1}{t-x_0}\right)g(t)}{X^+(t)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{dt}{(t-z_{k-2})^2(t-z)}+\frac{P_{\varkappa-}(z_k)-P_{\varkappa-}(z)}{(z-z_{k-1})(z-z_k)}+\frac{P_{\varkappa-}(z_k)-P_{\varkappa-}(z_{k-1})}{(z-z_{k-1})(z_k-z_{k-1})}\right)=$$

$$=\frac{X(z)(z-z_{k-2})}{2\pi iF_0'\left(\frac{1}{z-x_0}\right)}\left(\int\limits_{\gamma}\frac{F_0'\left(\frac{1}{t-x_0}\right)g(t)}{X^+(t)}\,\frac{dt}{(t-z_{k-2})(t-z)}-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{\gamma}\frac{F_0'\left(\frac{1}{t-x_0}\right)g(t)}{X^+(t)}\,\frac{dt}{(t-z_{k-2})^2}\right)+\frac{X(z)(z-z_{k-2})^2}{F_0'\left(\frac{1}{z-x_0}\right)}\left(\frac{P_{\varkappa-}(z_k)-P_{\varkappa-}(z)}{(z-z_{k-1})(z-z_k)}+\right.$$

$$\left.+\frac{P_{\varkappa-}(z_k)-P_{\varkappa-}(z)}{(z-z_{k-1})(z_k-z_{k-1})}+\frac{P_{\varkappa-}(z)-P_{\varkappa-}(z_{k-1})}{(z-z_{k-1})(z_k-z_{k-1})}\right)=\frac{X(z)}{2\pi iF_0'\left(\frac{1}{z-x_0}\right)}\times$$

$$\times\int\limits_{\gamma}\frac{F_0'\left(\frac{1}{t-x_0}\right)g(t)}{X^+(t)}\,\frac{dt}{t-z}-\frac{X(z)}{2\pi iF_0'\left(\frac{1}{z-x_0}\right)}\int\limits_{\gamma}\frac{F_0'\left(\frac{1}{t-x_0}\right)g(t)}{X^+(t)}\times$$

$$\times \frac{dt}{t-z_{k-2}} - \frac{X(z)(z-z_{k-2})}{F_0'\left(\frac{1}{z-x_0}\right)} \frac{P_{\varkappa^-}(z_k)-P_{\varkappa^-}(z_{k-1})}{z_k-z_{k-1}} + \frac{X(z)(z-z_{k-2})^2}{F_0'\left(\frac{1}{z-x_0}\right)} \times$$
$$\times\left(\frac{P_{\varkappa^-}(z)-P_{\varkappa^-}(z_{k-1})}{(z-z_{k-1})(z_k-z_{k-1})} - \frac{P_{\varkappa^-}(z)-P_{\varkappa^-}(z_k)}{(z-z_k)(z_k-z_{k-1})}\right) =: \sum_{i=1}^{4} s_i.$$

Нетрудно показать, что в s_4 выражение, стоящее в скобках, при $\varkappa^- \leqslant 1$ равно нулю, а при $\varkappa^- > 1$ — есть некоторый многочлен степени не выше $\varkappa^- - 2$. С учетом леммы 2[1], неравенства (9) и соотношений (2), (3) интегралы в s_1 и s_2 оцениваются аналогично интегралу $\tilde{\psi}$ и, по крайней мере, для достаточно больших k (для которых $K_{\rho'_{p,k}}(z_{p,k}) \subset K_a(x_0)$) при $z \in K_{\rho'_{p,k}}(z_{p,k})$ имеем $|\Phi(z)| \leqslant \sum_{i=1}^{4} |s_i| \leqslant c|z-x_0|^{\mu_1}$, где вещественные постоянные μ_1, c не зависят от z, p и k.

В случаях 2 и 3 аналогично доказывается, что по крайней мере для достаточно больших k при $z \in K_{\rho'_{p,k}}(z_{p,k})$ $\forall p \in \overline{1, q}$ справедливо неравенство $|\Phi(z)| \leqslant c|z-x_0|^{\mu_2}$, в котором вещественные постоянные μ_2, c не зависят от z, p и k.

Учитывая отмеченную выше оценку для $\tilde{\psi}$, лемму 2 [1] и соотношения (2), (3), получаем неравенство $|\Phi(z)| \leqslant c|z-x_0|^{\mu_3}$, $z \to x_0$, $z \in (\mathbb{C} \setminus \gamma) \setminus \left(\bigcup_{p=1}^{q} K_p^1\right)$, в котором вещественные постоянные μ_3, c не зависят от z.

В силу изложенного выше справедливы неравенства
$$|(z-x_0)^{\nu'}\Phi(z)| \leqslant \exp(|z-x_0|^{-\varepsilon})\,(z \to x_0,\ z \in \mathbb{C} \setminus \gamma), \ |(x-x_0)_{\pm}^{\nu'}\Phi^{\pm}(x)| \leqslant c,$$
$$(x \to x_0, x \in \gamma \setminus T),$$

в которых: 1) $(z-x_0)^{\nu'} := |z-x_0|^{\nu'} \exp(i\nu' \operatorname{Arg}_\gamma^*(z-x_0))$ $\forall z \in K_{r_T}(x_0) \setminus \overline{\gamma_{r_T}^+(x_0)}$, $\operatorname{Arg}_\gamma^*(z-x_0)$ — непрерывная в $K_{r_T}(x_0) \setminus \overline{\gamma_{r_T}^+(x_0)}$ ветвь функции $\operatorname{Arg}(z-x_0)$ такая, что $\operatorname{Arg}_\gamma^*(z_0-x_0) = \psi_0$, где z_0 — произвольно зафиксированная точка из $K_{r_T}(x_0) \setminus \overline{\gamma_{r_T}^+(x_0)}$, ψ_0 — произвольно зафиксированное вещественное число; 2) $(x-x_0)_+^{\nu'}$ (соответственно $(x-x_0)_-^{\nu'}$) $\forall x \in \gamma_{r_T}(x_0) \setminus T$ — непрерывное продолжение на $\gamma_{r_T}(x_0) \setminus T$ из D^+ (соответственно из D^-) функции $(z-x_0)^{\nu'}$; 3) $\varepsilon > 0$ может быть выбрано сколько угодно малым; 4) постоянная c не зависит от x. Отсюда с учетом принципа Фрагмена — Линделефа [5, с. 357] следует $\Phi \in H_T^{\pm}$, что завершает доказательство достаточности теоремы. Теорема доказана.

Аналогично с учетом лемм 1, 2 работы [1] доказывается следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $f \in C_{\gamma \setminus T}$; $\tilde{f}$ *непрерывно продолжается на* $\gamma \setminus T$ *из* D^+, D^-; $\operatorname{Re}\tilde{f}(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j |\ln|z-x_0||^{\alpha_j} + o(|\ln|z-x_0||)$, $z \to x_0$, $z \in \mathbb{C} \setminus \gamma$, $3 > \alpha_1 > \alpha_2 > \ldots > \alpha_n \geqslant 1$, $\alpha_1 > 1$, $c_1 > 0$; $g(t) = \hat{g}(t)(t-x_0)^m$, *где* $\hat{g} \in K_1'$, $m > \max\{1-\alpha_0^{\hat{g}} - \nu_{\hat{g}}, -\beta_0^{\hat{g}}\} - \nu$. *Пусть выполняется* (3) *и* $\gamma \cap \left(\bigcup_{p=1}^{q} K_p\right) = \varnothing$, *где*
$$K_p := \bigcup_{k=0}^{\infty} K_{\rho_{p,k}}\left(x_0 + \frac{1}{r_{p,k}} \exp(i\varphi_p)\right),\ 0 < \varphi_p < 2\pi,\quad |\ln \rho_{p,k}|/\ln r_{p,k} \to 1$$

$(k \to \infty)$ $\forall p \in \overline{1, q}$, $r_{p,k} \in (R_{p,k-1}, R_{p,k}]$, $k = 1, 2, \ldots$, $R_{p,0} \leqslant r_{p,0} < r_{p,1}$,

$$\sum_{i=1}^{k} \left| \ln \frac{a_{p,i}}{r_{p,i}} \right| = o(\ln R_{p,k}), \quad k \to \infty,$$

$$a_{p,k} = \frac{(R_{p,k})^{N_p+k}}{(R_{p,k-1})^{N_p+k-1}} \exp\Big(-\int_{R_{p,k-1}}^{R_{p,k}} u_p(t)\, t^{-1} dt\Big), \quad k = 1, 2, \ldots; R_{p,k}, \ k = 0, 1, \ldots,$$

— решение уравнения $u_p(R_{p,k}) = N_p + k$ *такое,* что $R_{p,k} > R_{p,0} > 1$ *и* u_p *возрастает на* $[R_{p,0}, \infty)$, N_p *— натуральное число. Тогда*: 1) $\varkappa^- = \Delta^-_{f,F_0} = \overline{\Delta}^-_{f,F_0} = 0$; 2) *справедливы все уверждения теоремы* 1.

З а м е ч а н и е. Теоремы 1, 2 расширяют классы кривых и функций G, g из соответствующих результатов работ [6—8], при этом случай, изученный в работе [7], включается полностью. Справедливы также замечания 1, 2 работы [1]. Аналогично изложенному выше рассматривается КЗР с минус-бесконечным индексом в классе ограниченных функций [9].

1. *Плакса С. А.* Краевая задача Римана с плюс-бесконечным индексом на спрямляемой кривой // Укр. мат. журн.— 1990.— **41**, № 9.— С. 1204—1213.
2. *Плакса С. А.* Краевая задача Римана в полунепрерывной постановке и сингулярные интегральные уравнения на спрямляемой кривой.— Киев, 1988.— 27 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.2).
3. *Плакса С. А.* Краевая задача Римана с осциллирующим коэффициентом и сингулярные интегральные уравнения на спрямляемой кривой // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 1.— С. 116—121.
4. *Кац Б. А.* Об исключительном случае задачи Римана с осциллирующим коэффициентом // Изв. вузов. Математика.— 1981.— № 12.— С. 41—50.
5. *Евграфов М. А.* Аналитические функции.— М. : Наука, 1968.— 471 с.
6. *Монахов В. Н., Семенко Е. В.* Классы корректности краевых задач сопряжения аналитических функций с бесконечным индексом // Докл. АН СССР.— 1986.— **286**, № 1.— С. 27—30.
7. *Алекна П. Ю.* Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка $0 < \gamma < 1$ для полуплоскости // Лит. мат. сб.— 1974.— **14**, № 3.— С. 5—18.
8. *Алекна П. Ю.* Необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной краевой задачи Римана с минус-бесконечным индексом логарифмического порядка $\min(\alpha, \beta) > 1$ для полуплоскости // Там же.— 1978.— **18**, № 3.— С. 5—14.
9. *Плакса С. А.* Краевые задачи с бесконечным индексом на спрямляемых кривых.— Киев, 1989.— 43 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.6).

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 30.10.89