УДК 517.9

Т. Я. Азизов, П. Йонас

О компактных возмущениях нормальных операторов в пространстве Крейна

Доказано существование спектральной функции, вообще говоря, неограниченного нормального в пространстве Крейна оператора, являющегося возмущением фундаментально приводимого нормального оператора N оператором специального класса, включающего в себя N-компактные операторы.

Доведено існування спектральної функції, взагалі кажучи, необмеженого нормального в просторі Крейна оператора, що є збуренням фундаментально звідного нормального оператора N оператором спеціального класу, який містить N-компактні оператори.

Центральным в настоящей работе является п. 2, в котором получены обобщения основной теоремы работы [1] и теоремы 3 из [2].

Следует отметить, что теории нормальных в пространстве Крейна операторов посвящено не так уж много работ. В частности, в [3] показано, что произвольный непрерывный оператор в гильбертовом пространстве является субнормальным в смысле пространств Крейна. В [4] описан специальный класс индефинитно субнормальных операторов. Следует отметить также работы [5, 6], посвященные соответственно нормальным операторам в пространстве Понтрягина и нормальным операторам в банаховом пространстве с эрмитовой формой.

В заключение работы теорема 1 использована при исследовании вопроса о расширении дуальной пары, инвариантной относительно нормального оператора (теорема 2), до максимальной дуальной пары, инвариантной относительно этого оператора.

1. Обозначения и предварительные замечания. 1.1. Положим $\mathbf{D}_r := \{z \,\|\, z| < r\}$, $0 < r < \infty$. Пусть $\alpha, \beta \in \mathbf{T}$ $(:= \{z \,\|\, z| = 1\}$. Через (α, β) (соответственно $[\alpha, \beta]$) обозначим открытую (соответственно замкнутую) дугу с началом в точке α и концом в точке β, направленную против движения часовой стрелки (относительно $\mathbf{T}$). Будем говорить, что множество $G \subset \mathbb{C}$ удовлетворяет условию $\mathfrak{A}$, если существует объединение γ конечного числа открытых дуг на $\mathbf{T}$ и положительное число r такие, что $G \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbf{D}_r) = \{z \mid z\,|z|^{-1} \in \gamma\} \cap (\mathbb{C} \setminus \mathbf{D}_r)$. Для конкретных γ и r это свойство будем обозначать $\mathfrak{A}(\gamma; r)$.

Кроме обычной метрики на $\mathbb{C}$ будем рассматривать следующую ($z_1, z_2 \in \mathbb{C}$):

$$d_\infty(z_1, z_2) := |z_1(|z_1| + 1)^{-1} - z_2(|z_2| + 1)^{-1}|.$$

Для двух множеств $F_1, F_2 \subset \mathbb{C}$ положим

$$\operatorname{dist}_\infty(F_1, F_2) := \inf\{d_\infty(z_1, z_2) \mid z_1 \in F_1, z_2 \in F_2\}.$$

Пусть $\alpha, \beta \in \mathbf{T}$, $\alpha \neq \beta$, ω — длина дуги (α, β) и $\Omega := \{z \mid z\,|z|^{-1} \in (\alpha, \beta)\}$. Для $\eta_1, \eta_2 : 0 < \eta_1 < \eta_2 < \infty$ и $z \in \Omega \cup (\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega})$ положим

$$T(\Omega; \eta_1, \eta_2; z) := -(2\pi i)^{-1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (z - \alpha\mu)^{-1} \alpha d\mu + (2\pi i)^{-1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} (z - \beta\mu)^{-1} \beta d\mu.$$

Тогда

$$\lim_{\eta_1\to 0,\ \eta_2\to\infty} T(\Omega;\eta_1,\eta_2;z) = \begin{cases} -\omega(2\pi)^{-1}+1, & \text{если } z\in\Omega; \\ -\omega(2\pi)^{-1}, & \text{если } z\notin\overline{\Omega}. \end{cases} \qquad (1)$$

Более того, эта сходимость равномерна на каждом компактном множестве $F\subset\mathbb{C}$ с $\operatorname{dist}_\infty(\partial\Omega, F)>0$. Функция $z\mapsto T(\Omega;\eta_1,\eta_2;z)$ равномерно ограничена на каждом замкнутом множестве F с $\operatorname{dist}_\infty(\partial\Omega, F)>0$.

1.2. Пусть $(\mathcal{H},[\cdot,\cdot])$ — пространство Крейна. Если $\mathcal{L}$ — линейное подпространство в $\mathcal{H}$, то через $\varkappa_+(\mathcal{L})$ (соответственно $\varkappa_-(\mathcal{L})$) обозначим размерность максимального положительного (соответственно отрицательного) подпространства в $\mathcal{L}$. Символом $\varkappa_0(\mathcal{L})$ обозначим размерность изотропной части $\mathcal{L}$.

Плотно определенный в $\mathcal{H}$ замкнутый оператор N назовем нормальным, если его область определения $D(N)$ совпадает с областью определения сопряженного (по отношению к форме$[\cdot,\cdot]$) оператора N^+: $D(N)=D(N^+)=:D$ и $[Nx, Nx]=[N^+x, N^+x]$ при каждом $x\in D$. Если резольвентное множество $\rho(N)$ оператора N не пусто и $\lambda\in\rho(N)$, то оператор N нормален тогда и только тогда, когда резольвенты $R(\lambda; N)$ и $R(\overline{\lambda}; N^+)$ операторов N и N^+ коммутируют.

Ниже в данном пункте нормальный оператор N будем считать фундаментально приводимым, т. е. существует такая фундаментальная симметрия $J(=J^+=J^{-1})$ пространства $\mathcal{H}$, что $JD=D$ и $NJ=JN$. В этом случае N нормален и относительно гильбертова скалярного произведения $(x,y):=[Jx,y]$, $x,y\in\mathcal{H}$. Это следует из равенства $N^+=JN^*J$, где N^* — оператор, сопряженный к N относительно $(\cdot,\cdot)$. Так как в принятых условиях спектральная функция $E(\cdot;N)$ оператора N коммутирует с J, то $E(\cdot;N)$ — самосопряженный проектор и относительно $[\cdot,\cdot]$.

Дополнительно положим, что $\rho(N)\neq\varnothing$. Символом $\mathcal{H}^{(*)}_{+1/2}(N)$ обозначим гильбертово пространство $(D((N^*N)^{1/4}), (\cdot,\cdot)^{(*)}_{+1/2})$, где

$$(x,y)^{(*)}_{+1/2}:=((I+N^*N)^{1/4}x,(I+N^*N)^{1/4}y),\ x,y\in D((N^*N)^{1/4}).$$

Символ $\mathcal{H}_{-1/2}(N)$ будет означать пополнение $\mathcal{H}$ по норме

$$\|x\|_{-1/2}:=\sup\{|[x,y]|\mid y\in\mathcal{H}^{(*)}_{+1/2}(N), \|y\|^{(*)}_{+1/2}=1\},$$

где $\|y\|^{(*)}_{+1/2}=(y,y)^{(*)1/2}_{+1/2}$. Кроме того, положим $\mathcal{L}^{(N)}:=\mathcal{L}(\mathcal{H}^{(*)}_{+1/2}(N), \mathcal{H}_{-1/2}(N))$ — множество ограниченных линейных операторов, действующих из $\mathcal{H}^{(*)}_{+1/2}(N)$ в $\mathcal{H}_{-1/2}(N)$.

Так как $\|Nx\|_{-1/2}\leqslant\|N(I+N^*N)^{-1/2}\|\,\|x\|^{(*)}_{+1/2}$, то оператор N допускает расширение по непрерывности до оператора $\widetilde{N}\in\mathcal{L}^{(N)}$. Символом $\mathfrak{S}^{(N)}_\infty$ обозначим множество компактных операторов из $\mathcal{L}^{(N)}$. Пусть $K\in\mathfrak{S}^{(N)}_\infty$. Положим $N\oplus K=\widetilde{N}+K\mid D(N\oplus K)$, где $D(N\oplus K):=\{x\in\mathcal{H}^{(*)}_{+1/2}(N)\mid(\widetilde{N}+K)x\in\mathcal{H}\}$ (см. [7], определение 2.2). Оператор $N\oplus K$ замкнут и плотно определен. Заметим, что коль скоро K — N-компактный оператор, а $\widetilde{K}$ — его расширение в $\mathcal{L}^{(N)}$, то $N\oplus\widetilde{K}=N+K$.

Аналогично предложению 3.1 из [7] доказывается следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть N — фундаментально приводимый нормальный оператор в пространстве Крейна $\mathcal{H}$ с $\rho(N)\neq\varnothing$, дуга $(\alpha,\beta)\subset\mathbf{T}$ и $r\in(0,\infty)$ таковы, что $\{z\mid z\,|z|^{-1}\in(\alpha,\beta)\}\setminus\overline{\mathbf{D}}_r\subset\rho(N)$, а оператор $K\in\mathfrak{S}^{(N)}_\infty$. Тогда для любых $\alpha',\beta'\in(\alpha,\beta)$ существует число $r'\in(0,\infty)$ такое, что $\{z\mid z\,|z|^{-1}\in[\alpha',\beta']\}\setminus\mathbf{D}_{r'}\subset\rho(N\oplus K)$ и при любом $z\in\rho(N)\cap\rho(N\oplus K)$ имеем $R(z;N\oplus K)-R(z;N)\in\mathfrak{S}_\infty$.*

Замечание 1. Пусть N, K, α', β' и r' — те же, что и в предложении 1. Тогда существует такое $\varepsilon_0>0$, что для любого $W\in\mathfrak{S}^{(N)}_\infty\subset$

$\subset \| W \|_{\mathcal{L}(N)} \leqslant \varepsilon_0$ имеем

$$\{z \mid z\,|z|^{-1} \in (\alpha', \beta')\} \setminus \mathbf{D}_{r'} \subset \rho(N \dotplus (K + W)).$$

1.3. Ниже будет введена спектральная функция, вообще говоря, неограниченного нормального в пространстве Понтрягина оператора. Следующие утверждения дополняют некоторые результаты из [5, 6].

Предложение 2. *Пусть N — нормальный оператор в пространстве Понтрягина $\mathcal{H}$ и $\rho(N) \neq \varnothing$. Тогда существует конечное (возможно, пустое) множество* $\operatorname{nd}(N) \subset \mathbb{C}$ *со следующим свойством: если $\mathfrak{B}(N)$— булева алгебра борелевских подмножеств b из $\mathbb{C}$ таких, что $\partial b \cap \operatorname{nd}(N) = \varnothing$, то существует сильно σ-аддитивный гомоморфизм E из $\mathfrak{B}(N)$ в булеву алгебру нормальных проекторов в $\mathcal{H}$, удовлетворяющий при каждом b условиям:*

1) $E(\mathbb{C}) = I$;

2) *если b ограничено, то $E(b)\mathcal{H} \subset D$ и $N \mid E(b)\mathcal{H}$ — ограниченный оператор;*

3) *если $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ и операторы T, T^{+} коммутируют с $R(z; N)$ при некотором $z \in \rho(N)$, то T и T^{+} коммутируют с $E(b)$;*

4) $\sigma(N \mid E(b)\mathcal{H}) \subset \bar{b}$;

5) *точка $\lambda \in \mathbb{C}$ принадлежит* $\operatorname{nd}(N)$ *тогда и только тогда, когда форма $[\cdot, \cdot] \mid E(b)\mathcal{H}$ вырождена или индефинитна при каждом $b \in \mathfrak{B}(N)$, содержащем λ.*

Множество $\operatorname{nd}(N)$ и функция $E(\cdot)$ однозначно определяются указанными свойствами.

Кроме того, $\operatorname{nd}(N^{+}) = (\operatorname{nd}(N))^*$ и отображение $b \mapsto (E(b^*))^{+}$, где $b \in \mathfrak{B}(N^{+})$, $b^* := \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in b\}$, — спектральная функция оператора N^{+}.

Гомоморфизм E называют спектральной функцией N и для определенности обозначают $E(\cdot; N)$. Множество $\operatorname{nd}(N)$ называется множеством точек неопределенного типа относительно N.

Приведем схему доказательства предложения 2. Сперва сконструируем спектральную функцию ограниченного нормального оператора $R := R(z; N)$, где $z \in \rho(N)$, после чего спектральную функцию оператора N можно получить соответствующим преобразованием аргумента.

Для построения спектральной функции оператора R введем самосопряженные проекторы Риса — Данфорда $E_{\mathrm{I},0}$ и $E_{\mathrm{II},0}$, соответствующие невещественным частям спектров операторов $R_{\mathrm{I}} := \frac{1}{2}(R + R^{+})$ и $R_{\mathrm{II}} := \frac{1}{2i}(R - R^{+})$ соответственно. Проектор $E_0 := I - (I - E_{\mathrm{I},0})(I - E_{\mathrm{II},0})$ является конечномерным, а разложение $\mathcal{H} = E_0\mathcal{H} + (I - E_0)\mathcal{H}$ приводит оператор R. Определим спектральную функцию оператора $R \mid E_0\mathcal{H}$ как соответствующие проекторы Риса — Данфорда. Спектральная же функция $R \mid (I - E_0)\mathcal{H}$ — суть тензорное произведение спектральных функций $R_{\mathrm{I}} \mid (I - E_0)\mathcal{H}$ и $R_{\mathrm{II}} \mid (I - E_0)\mathcal{H}$, рассматриваемых как спектральные функции на $\mathbb{R}$ [5].

2. Компактные возмущения фундаментально приводимых нормальных операторов в пространствах Крейна. Пусть $\mathcal{H}_1 := (\mathcal{H}, [\cdot, \cdot]_1)$ и $\mathcal{H}_2 := (\mathcal{H}, [\cdot, \cdot]_2)$ — пространства Крейна, образованные с помощью, вообще говоря, различных форм $[\cdot, \cdot]_1$ и $[\cdot, \cdot]_2$, определенных на одном линейном пространстве $\mathcal{H}$. Пусть $[\cdot, \cdot]_1$ и $[\cdot, \cdot]_2$ непрерывны относительно некоторого гильбертова скалярного произведения $(\cdot, \cdot)$ на $\mathcal{H}$. Тогда существуют такие ограниченные самосопряженные в $(\mathcal{H}, (\cdot, \cdot))$ операторы S_j, что $[x, y]_j = (S_j x, y)$, $x, y \in \mathcal{H}$, $j = 1, 2$.

Теорема 1. *Пусть $S_1 - S_2 \in \mathfrak{S}_\infty$, G_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, — такие односвязные области, что $\infty \notin G_j$ и $\partial G_j \cap \mathbb{C}$ — связные кривые класса C^1. Кроме того, $\bar{G}_j \cap \bar{G}_k \cap \mathbb{C} = \varnothing$ при $j \neq k$ и множество $G := \bigcup_{j=1}^{n} G_j$ обладает свойством $\mathfrak{A}$.*

Пусть N_1 — фундаментально разложимый нормальный оператор в $\mathcal{H}_1$ такой, что:

1) $\sigma(N_1)\subset G$;

2) $\operatorname{dist}_\infty(\sigma(N_1)\cap G_j, \mathbb{C}\setminus G_j)>0, \quad j=1,2,\dots m$;

3) *для каждого* $j=1,2,\dots,n$ *проектор* $E(G_j;N_1)$ *семидефинитен в* $\mathcal{H}_1$.

Пусть $K\in\mathfrak{S}_\infty^{(N_1)}$ *и* $N_2:=N_1\dotplus K$ *нормален в* $\mathcal{H}_2$. *Тогда*:

a) $\sigma(N_2)\setminus G=:g$ — *конечное подмножество во множестве* $\sigma_{p,\,\mathrm{norm}}(N_2)$ *нормальных собственных значений оператора* N_2;

b) $\operatorname{dist}_\infty(\sigma(N_2)\cap G_j, \quad \mathbb{C}\setminus G_j)>0, \quad j=1,2,\dots,m$;

c) *существует система попарно коммутирующих нормальных проекторов* $P_{2,0},P_{2,1},\dots,P_{2,n}$ *в* $\mathcal{H}_2$ *такая, что*:

α) $P_{2,j}P_{2,k}=0$ *при* $j\neq k$ *и* $\sum\limits_{j=0}^{n}P_{2,j}=I$;

β) $P_{2,0}$ — *проектор Риса — Данфорда, соответствующий оператору* N_2 *и множеству* g;

γ) $P_{2,j}$ *коммутирует со всеми ограниченными операторами, коммутирующими с резольвентой оператора* N_2 *и* $\sigma(N_2\,|\,P_{2,j}\mathcal{H}_2)\subset G_j$, $j=1,2,\dots,n$;

δ) *если проектор* $E(G_j;N_1)$ — *неотрицательный (неположительный) в* $\mathcal{H}_1$, *то* $\varkappa_0(P_{2,j}\mathcal{H}_2)<\infty$ *и* $\varkappa_-(P_{2,j}\mathcal{H}_2)<\infty$ (*соответственно* $\varkappa_+(P_{2,j}\mathcal{H}_2)<\infty$).

Доказательство. 1. Будем считать, что $G_j\in\mathfrak{A}(\gamma_j,r)$, $j=1,2,\dots,m$, $m\leqslant n$, где $r>1$ — некоторое фиксированное число и $\gamma_j=(\alpha_j,\beta_j)$, $j=1,2,\dots,m$, — некоторые открытые дуги на $\mathbf{T}$ с $\bar\gamma_j\cap\bar\gamma_k=\varnothing$ при $j\neq k$. Пусть ω_j, $j=1,2,\dots,m$, — длина дуги γ_j. Области $G_{m+1},\dots,G_n$ по условию ограничены.

Утверждения *a*) и *b*) следуют из предложения 1 и хорошо известного результата о спектрах компактных возмущений.

2. Пусть $\Omega_1:=\{z\,|\,z\,|\,z\,|^{-1}\in\gamma_1\}$. Без ограничения общности полагаем $\{z=\alpha_1t\,|\,t\in[r,\infty)\}\cup\{z=\beta_1t\,|\,t\in[r,\infty)\}\subset\rho(N_2)$. Тогда функция $z\mapsto T(\Omega_1;r,\eta;z)$, $\eta>r$ (см. (1)) голоморфна на спектрах N_1 и N_2,

$$T(\Omega_1;r,\eta;N_k)=-(2\pi i)^{-1}\int_r^\eta R(\mu\alpha_1;N_k)\,\alpha_1d\mu+(2\pi i)^{-1}\int_r^\eta R(\mu\beta_1;N_k)\,\beta_1d\mu,$$
$$k=1,2.$$

Пусть J_1 — такая фундаментальная симметрия $\mathcal{H}_1$, что $J_1D(N_1)=D(N_1)$ и $N_1J_1=J_1N_1$. Положим $(x,y):=[J_1x,y]_1$, $x,y\in\mathcal{H}_1$. Тогда для $r<\eta<\eta'$ имеем (см. [7], доказательство леммы 3.5):

$$|(\{T(\Omega_1;r,\eta';N_2)-T(\Omega_1;r,\eta';N_1)-T(\Omega_1;r,\eta;N_2)+$$
$$+T(\Omega_1;r,\eta;N_1)\}x,y)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\left|\int_\eta^{\eta'}(\{R(\mu\beta_1;N_2)-R(\mu\beta_1;N_1)\}x,y)\,d\mu\right|+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\left|\int_\eta^{\eta'}(\{R(\mu\alpha_1;N_2)-R(\mu\alpha_1;N_1)x,y)\,d\mu\right|\leqslant$$
$$\leqslant M\left\{\left(\int_\eta^{\eta'}\|R(\mu\beta_1;N_1)x\|^{(*)2}_{+1/2}d\mu\right)^{1/2}\left(\int_\eta^{\eta'}\|R(\mu\bar\beta_1;N_1^*)y\|^{(*)2}_{+1/2}d\mu\right)^{1/2}+\right.$$
$$\left.+\left(\int_\eta^{\eta'}\|R(\mu\alpha_1;N_1)x\|^{(*)2}_{+1/2}\,d\mu\right)^{1/2}\left(\int_\eta^{\eta'}\|R(\mu\bar\alpha_1;N_1^*)y\|^{(*)2}_{+1/2}\,d\mu\right)^{1/2}\right\},\qquad(2)$$

где M — некоторая константа, зависящая от K. Рассмотрим интеграл $\int_\eta^{\eta'}\|R(\mu\beta_1;N_1)x\|^{(*)2}_{+1/2}d\mu$ при произвольном $x\in\mathcal{H}$ с $\|x\|\leqslant 1$. Пусть $E_1(\cdot)=$

$= E(\cdot; N_1)$. При $\mu > r$ имеем соотношения

$$\| R(\mu\beta_1; N_1) x \|^{(*)^2}_{+1/2} = \int\limits_{\mathbf{D}_r} (|\zeta|^2 + 1)^{1/2} |\zeta - \mu\beta_1|^{-2} d(E_1(\zeta) x, x) +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{C} \setminus \mathbf{D}_r} (|\zeta|^2 + 1)^{1/2} |\zeta - \mu\beta_1|^{-2} d(E_1(\zeta) x, x) \leqslant M' (\mu - r)^{-2} +$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{C} \setminus \mathbf{D}_r} \sqrt{2} \, |\zeta| \, |\zeta - \mu\beta_1|^{-2} d(E_1(\zeta) x, x),$$

где M' не зависит от x. Далее, в силу условия 2 теоремы 1 существует такое $\delta > 0$, что $|\zeta - \mu\beta_1|^2 \geqslant \delta(|\zeta|^2 - \mu^2)$ для всех $\mu > r$ и $\zeta \in (\operatorname{supp} E_1) \setminus \mathbf{D}_r$. Отсюда

$$\int\limits_{\eta}^{\eta'} \| R(\mu\beta_1; N_1) x \|^{(*)^2}_{+1/2} d\mu \leqslant M' \int\limits_{\eta}^{\eta'} (\mu - r)^{-2} d\mu + \sqrt{2}\, \delta^{-1} \int\limits_{\mathbb{C} \setminus \mathbf{D}_r} \left(\operatorname{arctg} \frac{\eta'}{|\zeta|} - \right.$$

$$\left. - \operatorname{arctg} \frac{\eta}{|\zeta|} \right) d(E_1(\zeta) x, x)$$

и потому, в частности, левая часть этого неравенства стремится к 0 при $\eta, \eta' \uparrow \infty$. Следовательно,

$$\sup \left\{ \int\limits_{r}^{\eta} \| R(\mu\beta_1; N_1) x \|^{(*)^2}_{+1/2} d\mu \,|\, \|x\| \leqslant 1, \quad \zeta \in [r, \infty) \right\} < \infty.$$

Аналогичные соотношения получаются и для остальных интегралов правой части (2). Поэтому из (2) следует сильная сходимость при $\eta \uparrow \infty$ разности $T(\Omega_1; r, \eta; N_2) - T(\Omega_1; r, \eta; N_1)$. Из (1) и (2) получаем существование сильного предела

$$s - \lim_{\eta \uparrow \infty} T(\Omega_1; r, \eta; N_1) = : T(\Omega_1; r, \infty; N_1),$$

что влечет существование

$$s - \lim_{\eta \uparrow \infty} T(\Omega_1; r, \eta; N_2) = : T(\Omega_1; r, \infty; N_2).$$

Положим

$$P_{k,1} : = -(2\pi i)^{-1} \int\limits_{\partial G_1 \cap \mathbf{D}_r} R(z; N_k)\, dz + T(\Omega_1; r, \infty; N_k) + \omega_1 (2\pi)^{-1} I, \quad k = 1, 2.$$

Аналогично введем операторы $P_{k,j}$, $k = 1, 2$; $j = 2, \ldots, m$. Для $j = m + 1, \ldots, n$ положим

$$P_{k,j} : = -(2\pi i)^{-1} \int\limits_{\partial G_j} R(z; N_k)\, dz, \quad k = 1, 2.$$

Из (1) имеем

$$P_{1,j} = E_1(G_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Символом $P_{2,0}$ обозначим проектор Риса — Данфорда, соответствующий N_2 и g.

3. Покажем, что операторы $P_{2,j}$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n$, удовлетворяют условиям утверждения c). Сперва предположим, что K — конечномерный оператор в $\mathcal{H}$, имеющий вид

$$K = \sum_{j=1}^{l} s_j [\cdot, e_j] f_j, \quad s_j \in \mathbb{R}, \quad e_j, f_j \in \bigcup_{n=1}^{\infty} E_1(\mathbf{D}_n) \mathcal{H}, \quad j = 1, 2, \ldots, l. \tag{4}$$

Отсюда следует существование такого $n_0 \in \mathbb{N}$, что прямое разложение

$$\mathcal{H} = E_1(\mathbf{D}_{n_0}) \mathcal{H} + (I - E_1(\mathbf{D}_{n_0})) \mathcal{H} \tag{5}$$

приводит $N_1 + K$, оператор $N_1 + K \mid E_1(\mathbf{D}_{n_0})\mathcal{H}$ ограничен и операторы N_1 и $N_1 + K$ совпадают на $(I - E(\mathbf{D}_{n_0}))\mathcal{H}$. Поэтому разложение (5) приводит и проекторы $P_{2,j}$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Эти операторы являются попарно коммутирующими проекторами, удовлетворяющими условиям

$$P_{2,j}P_{2,k} = 0, \quad j \neq k, \tag{6}$$

и

$$\sum_{j=0}^{n} P_{2,j} = I. \tag{7}$$

В самом деле, эти отношения справедливы для сужений операторов $P_{2,j}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, на $E_1(\mathbf{D}_{n_0})\mathcal{H}$ и $(I - E_1(\mathbf{D}_{n_0}))\mathcal{H}$ и отсюда — для самих операторов.

Вернемся к общему случаю. Без ограничения общности будем считать, что $g \cap \bigcup_{j=1}^{n} \partial G_j = \varnothing$. Выберем такое $\delta > 0$, что между множествами $\mathfrak{A}_\delta(g) := \{z \mid \operatorname{dist}_\infty(g, \{z\}) < \delta\}$ и $\bigcup_{j=1}^{n} G_j$ положительное расстояние. Далее, с учетом замечания 1 выберем $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого $K' \in \mathfrak{S}_\infty^{(N_1)}$, принадлежащего множеству $\mathfrak{K}_\varepsilon := \{K' \mid \|K' - K\|_{\mathcal{L}(N_1)} < \varepsilon\}$, имеет место включение $\sigma(N_1 \dotplus K') \subset \bigcup_{j=1}^{n} G_j \cup \mathfrak{U}_\delta(g)$ и $\operatorname{dist}_\infty(\sigma(N_1 \dotplus K') \cap G_j, \mathbb{C} \setminus G_j) > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Аналогично [7] (вторая часть доказательства леммы 3.5) проверяется, что отображения $K \mapsto P_{2,j}$ из $\mathfrak{K}_\varepsilon$ (с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(N_1)}$) в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ непрерывны и

$$P_{2,j} - P_{1,j} \in \mathfrak{S}_\infty, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{8}$$

Теперь, аппроксимируя оператор $K \in \mathfrak{S}_\infty^{(N_1)}$ операторами вида (4), принадлежащими $\mathfrak{K}_\varepsilon$, получаем, что и в общем случае $P_{2,j}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, — попарно коммутирующие проекторы, удовлетворяющие соотношениям (6) и (7).

4. Первая часть γ) следует из определения проекторов $P_{2,j}$, $j = 0, 1, \ldots, n$. Операторы $P_{2,j}$ коммутируют с $[\cdot,\cdot]_2$-сопряженным оператором резольвенты оператора N_2, что влечет нормальность этих операторов в пространстве $\mathcal{H}_2$. Докажем, что $\sigma(N_2 \mid P_{2,j}\mathcal{H}) \subset G_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Достаточно это проверить для $j = 1$. Выберем такие $z_0 \in \mathbb{C} \setminus (g \cup G_1)$ и $z_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, чтобы $z_0 + z_1^{-1} \notin g \cup G_1$ и для функции $f(z) := (z - z_0)^{-1} - z_1$ точка $0 \notin \overline{f(g \cup G_1)}$. Так как $\sigma(N_1 \mid P_{1,1}\mathcal{H}) \subset G_1$, то

$$\sigma(R(z_0; N_1) - z_1 I \mid P_{1,1}\mathcal{H}) \subset \overline{f(G_1)}.$$

Отсюда

$$\sigma((R(z_0; N_1) - z_1 I) P_{1,1}) \subset \overline{f(G_1)} \cup \{0\}.$$

Согласно (8) точки множества

$$\sigma((R(z_0; N_2) - z_1 I) P_{2,1}) = \sigma(R(z_0; N_2) - z_1 I \mid P_{2,1}\mathcal{H}) \cup \{0\},$$

не принадлежащие $\overline{f(G_1)} \cup \{0\}$, включены во множество $\sigma_{p,\mathrm{norm}}(R(z_0; N_2) - z_1 I \mid P_{2,1}\mathcal{H})$. Поэтому если $z \in \sigma(N_2 \mid P_{2,1}\mathcal{H}) \setminus \overline{G}_1$, $z \neq z_0$, $z_0 + z_1^{-1}$, то получим $z \in \sigma_{p,\mathrm{norm}}(N_2 \mid P_{2,1}\mathcal{H})$, т. е. существует такой вектор $x_0 \neq \theta$: $x_0 \in P_{2,1}\mathcal{H} \cap D(N_2)$, что $N_2 x_0 = z x_0$ и $z \in g \cup \left(\bigcup_{j=2}^{n} G_j\right)$. Это противоречит (6).

Следовательно, $\sigma(N_2 \mid P_{2,1}\mathcal{H}) \subset \overline{G}_1$. Так как в приведенных рассуждениях множества G_1 можно заменить некоторым открытым множеством G_1' с $\overline{G_1'} \subset G_1$, то $\sigma(N_2 \mid P_{2,1}\mathcal{H}) \subset \overline{G}_1$.

5. В заключение докажем утверждение δ). Предположим, что $E_1(G_j) = P_{1,j}$ — $[\cdot,\cdot]_1$-неотрицательный проектор, где $j\in\{j\}_1^n$. Так как $[\cdot,\cdot]_1$-сопряженный ($[\cdot,\cdot]_2$-сопряженный) с произвольным $T\in\mathscr{L}(\mathscr{H})$ совпадает с оператором $S_1^{-1}T^*S_1$ (соответственно $S_2^{-1}T^*S_2$), то из (8) и компактности $S_1 - S_2$ следует

$$P_{2,j}(I - S_2^{-1}P_{2,j}^*S_2) = P_{2,j}(I - S_2^{-1}P_{2,j}^*S_2) - P_{1,j}S_1^{-1}P_{1,j}^*S_1\in\mathfrak{S}_\infty,$$

что влечет неравенство $\varkappa_0(P_{2,j}\mathscr{H}) < \infty$. С другой стороны,

$$P_{2,j}S_2^{-1}P_{2,j}^*S_2 - P_{1,j} = P_{2,j}S_2^{-1}P_{2,j}^*S_2 - P_{1,j}S_1^{-1}P_{1,j}^*S_1\in\mathfrak{S}_\infty.$$

Из [4] (следствие 3.2) следует, что $\varkappa_-(P_{2,j}S_2^{-1}P_{2,j}^*S_2\mathscr{H}) = \varkappa_-(P_{2,j}\mathscr{H}) < \infty$.

Для случая, когда $E_1(G_j)$ — $[\cdot,\cdot]_1$-неположительный проектор, рассуждения аналогичны и при этом $\varkappa_0(P_{2,j}\mathscr{H}) < \infty$ и $\varkappa_+(P_{2,j}\mathscr{H}) < \infty$.

Замечание 2. Теорема 1 остается справедливой, если свойство 3 заменить условием, что $E(G_j, N_1)\mathscr{H}_1$ — пространство Понтрягина при каждом $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда

$$\varkappa_+(E(G_j, N_1)\mathscr{H}_1) < \infty \quad (\varkappa_-(E(G_j, N_1)\mathscr{H}_1) < \infty)$$

влечет $\varkappa_0(P_{2,j}\mathscr{H}_2) < \infty$ *и* $\varkappa_+(P_{2,j}\mathscr{H}_2) < \infty$ (соответственно $\varkappa_-(P_{2,j}\mathscr{H}_2) < \infty$).

Следствие. *В условиях теоремы 1 оператор N_2 обладает спектральной функцией. Более точно, существует конечное (возможно пустое) множество $\mathrm{nd}(N_2)\subset\overline{\mathbb{C}}$ со свойствами 1 — 5, аналогичными свойствам $\mathrm{nd}(N)$ из предложения 2. Кроме того, существует такое $r > 0$, что $\overline{\mathbb{C}}\setminus\mathbf{D}_r\in\mathfrak{L}(N_2)$, $E_2(\overline{\mathbb{C}}\setminus\mathbf{D}_r)$ — самосопряженный в $\mathscr{H}_2$ оператор и нормальный оператор $N_2\,|\,E_2(\overline{\mathbb{C}}\setminus\mathbf{D}_r)\mathscr{H}_2$ фундаментально разложим.*

Доказательство. Запишем $\mathscr{H}_2$ как прямую $[\cdot,\cdot]_2$-ортогональную сумму $n+1$ пространства Понтрягина, приводящих N_2:

$$\mathscr{H}_2 = \sum_{j=1}^n (P_{2,j}P_{2,j}^+)\mathscr{H}_2 + \left(I - \sum_{j=1}^n P_{2,j}P_{2,j}^+\right)\mathscr{H}_2.$$

Пусть $N_2^{(j)} := N_2\,|\,(P_{2,j}P_{2,j}^+)\mathscr{H}_2$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Сужение N_2 на конечномерное пространство $\mathscr{H}' := \left(I - \sum_{j=1}^n P_{2,j}P_{2,j}^+\right)\mathscr{H}_2$ обозначим через N_2'. Используя предложение 2 и теорему 1, легко проверить, что прямая сумма спектральных функций $E(\cdot, N_2^{(j)})$, $j = 1, 2, \ldots, n$, и $E(\cdot, N_2')$ с либо $\mathrm{nd}(N_2) = \bigcup_{j=1}^n \mathrm{nd}(N_2^{(j)})\cup\mathrm{nd}(N_2')$ либо $\mathrm{nd}(N_2) = \bigcup_{j=1}^n \mathrm{nd}(N_2^{(j)})\cup\mathrm{nd}(N_2')\cup\{\infty\}$ удовлетворяет свойствам 1—5. Как следствие получаем, что при достаточно большом $r > 0$ подпространство $E_2(\overline{\mathbb{C}}\setminus\mathbf{D}_r)\mathscr{H}_2$ есть $[\cdot,\cdot]_2$-ортогональная прямая сумма равномерно дефинитных подпространств, приводящих N_2, что и доказывает последнее утверждение

Замечание 3. Если N_2 то же, что и в теореме 1, $b\in\mathfrak{B}(N_2)$ — ограниченное множество с $b\cap\mathrm{nd}(N_2) = \varnothing$, то $N_2\,|\,E_2(b)\mathscr{H}_2$ — фундаментально разложимый нормальный оператор в $(E_2(b)\mathscr{H}_2, [\cdot,\cdot]_2)$. Это вытекает из свойств 3 и 5.

Замечание 4. Последнее утверждение следствия означает, что возмущение оператором $K\in\mathfrak{S}_\infty^{(N)}$ сохраняет ограниченность спектральной функции в окрестности $z = \infty$

3. Расширение инвариантных дуальных пар. Будем говорить [9], что неотрицательное подпространство $\mathscr{L}_+$ пространства Крейна $(\mathscr{H}, [\cdot,\cdot])$ принадлежит классу h^+, если оно представимо в виде прямой суммы конечномерного нейтрального и равномерно положительного подпространств Аналогично вводится класс h^- неположительных подпространств. Пара подпространств $\{\mathscr{L}_+, \mathscr{L}_-\}$ называется дуальной парой, если $\mathscr{L}_+$ неотрицательно, $\mathscr{L}_-$ неположительно и $\mathscr{L}_+$ $[\cdot,\cdot]$-ортогонально $\mathscr{L}_-$: $\mathscr{L}_+ [\perp] \mathscr{L}_-$.

Пусть N — нормальный оператор в пространстве Крейна и $\rho(N) \neq \varnothing$. Символами $\mathfrak{M}_+(N, N^+)$ и $\mathfrak{M}_-(N, N^+)$ будем обозначать соответственно множества максимальных неотрицательных и максимальных неположительных подпространств, инвариантных относительно $R(z; N)$ и $R(z; N)^+$ при всех $z \in \rho(N)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и* $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ — *дуальная пара, инвариантных при некотором* $z_0 \in (\mathbb{C} \setminus G) \cap \rho(N_2)$ *относительно* $R(z_0; N_2)$ *и* $R(z_0; N_2)^+$ *подпространств. Тогда* $\mathcal{L}_+ \in h^+$, $\mathcal{L}_- \in h^-$ *и существует расширение* $\{\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-\}$ *до такой максимальной дуальной пары* $\{\widetilde{\mathcal{L}}_+, \widetilde{\mathcal{L}}_-\}$, *что* $\widetilde{\mathcal{L}}_+ \in \mathfrak{M}_+(N_2, N_2^+)$ *и* $\widetilde{\mathcal{L}}_- \in \mathfrak{M}_-(N_2, N_2^+)$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{H}_{2,j} := P_{2,j}P_{2,j}^+\mathcal{H}_2$, $j = 0, 1, \ldots, n$; $\mathcal{H}_{2,-1} := \left(I - \sum_{j=0}^{n} P_{2,j}P_{2,j}^+\right)\mathcal{H}_2$. В силу теоремы 1 подпространства $\mathcal{H}_{2,-1}$ и $\mathcal{H}_{2,0}$ конечномерны, а $\mathcal{H}_{2,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, — пространства Понтрягина. Из инвариантности $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ относительно $R(z_0; N_2)$ и $R(z_0; N_2)^+$ и связности множества $(\mathbb{C} \setminus G) \cap \rho(N_2)$ следует инвариантность этих подпространств относительно $P_{2,j}$ и $P_{2,j}^+$, $E_2(\cdot)$ и $E_2(\cdot)^+$. Поэтому включения $\mathcal{L}_+ \in h^+$ и $\mathcal{L}_- \in h^-$ следуют из равенств

$$\mathcal{L}_\pm = (\mathcal{L}_\pm \cap \mathcal{H}_{2,-1})[+](\mathcal{L}_\pm \cap \mathcal{H}_{2,0})[+]\ldots[+](\mathcal{L}_\pm \cap \mathcal{H}_{2,n}).$$

Кроме того, эти равенства позволяют без ограничения общности считать $\mathcal{H}_2$ пространством Понтрягина, что и будем далее предполагать. В силу следствия существует такое $r > 0$, что $E_2(\mathbb{C} \setminus \mathbf{D}_r)\mathcal{H}_2$ — равномерно дефинитное подпространство. Так как

$$\mathcal{L}_\pm = (\mathcal{L}_\pm \cap (I - E_2(\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{D}_r)\mathcal{H}_2)[+](\mathcal{L}_\pm \cap E_2(\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{D}_r)\mathcal{H}_2),$$

то без ограничения общности будем считать $E_2(\overline{\mathbb{C}} \setminus \mathbf{D}_r)\mathcal{H}_2 = 0$, т. е. операторы N_2 и N_2^+ ограничены и подпространства $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ инвариантны относительно них. В силу теоремы Наймарка [10] существует максимальная пара $\{\widetilde{\mathcal{L}}_+, \widetilde{\mathcal{L}}_-\}$ инвариантных относительно N_2 и N_2^+ подпространств $\widetilde{\mathcal{L}}_+ \supset \mathcal{L}_+$ и $\widetilde{\mathcal{L}}_- \supset \mathcal{L}_-$. Поскольку $\min\{\dim \widetilde{\mathcal{L}}_+, \dim \widetilde{\mathcal{L}}_-\} < \infty$ и $\min\{\dim \widetilde{\mathcal{L}}_+^\perp, \dim \widetilde{\mathcal{L}}_-^\perp\} < \infty$, то $\widetilde{\mathcal{L}}_+ \in \mathfrak{M}_\pm(N_2, N_2^+)$ и $\widetilde{\mathcal{L}}_- \in \mathfrak{M}_-(N_2, N_2^+)$.

1. *Veselić K.* A spectral theorem for a class of J-normal operators // Glas. mat.—1970. — 5, N 1.— P. 97—102.
2. *Jonas P.* Compact perturbations of definitizable operators. II // J. Operator Theory.— 1982.— 8.— P. 3—18.
3. *Wu J.* Normal extensions of operators to Krein spaces // Chin. Ann. Math.— 1987.— 8B.— P. 36—42.
4. *Cowen C. C., Li Sh.* Hilbert space operators that are subnormal in the Krein space sense // J. Operator Theory.— 1988.— 20.— P. 165—181.
5. *Xioman Cd., Chaocheng H.* Normal operators in π_k space // Northeastern Math. J.— 1985.— 1.— P. 242—252.
6. *Штраус В. А.* О нормальных дефинизируемых операторах в банаховом пространстве с эрмитовой формой // Докл. АН УзССР.— 1987.— № 11.— С. 15—16.
7. *Jonas P.* On a problem of perturbation theory of selfadjoint operators in Krein spaces // Preprint Institute Math. AdW.— 1989.— P.— Math.— 38.
8. *Jonas P.* On a class of selfadjoint operators in Krein space and their compact perturbations // Integral Equations and Operator Theory.— 1988.— 11.— P. 351—384.
9. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой.— М.: Наука, 1986.— 352 с.
10. *Наймарк М. А.* О перестановочных унитарных операторах в пространстве $\Pi_\varkappa$ // Докл. АН СССР.— 1963.— 149, № 6.— С. 1261—1263.

Воронеж. ун-т,
Ин-т математики АН ГДР

Получено 27.11.89