УДК 517.94

Г. С. Жукова

Об одном дифференциальном уравнении с малым параметром при старшей производной

1. Введение. Рассмотрим обыкновенное линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с малым параметром при старшей производной

$$M[x] \equiv \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon^{p_\nu} a_\nu(t, \varepsilon) x^{(\nu)} - \varepsilon^{\alpha_1} f(t, \varepsilon) \exp(\varepsilon^{\alpha_2} \theta(t)) = 0. \quad (1)$$

Предполагается: а) $a_0(t, \varepsilon) \not\equiv 0$, $f(t, \varepsilon) \not\equiv 0$, $a_n(t, \varepsilon) \neq 0$ ($t \in [0, T]$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$); б) $f(t, \varepsilon)$ и те из коэффициентов $a_\nu(t, \varepsilon)$, $\nu = \overline{0, n}$, которые отличны от тождественного нуля, являются, во-первых, элементами множества E непрерывных по t, ε функций $y(t, \varepsilon)$, для которых $y(t, 0) \not\equiv 0$, и, во-вторых, допускают при $\varepsilon \to +0$ равномерные на интервале $[0, T]$ асимптотические представления

$$a_\nu(t, \varepsilon) \sim \sum_{s \geqslant 0} \varepsilon^s a_{\nu s}(t), \quad f(t, \varepsilon) \sim \sum_{s \geqslant 0} \varepsilon^s f_s(t), \quad a_{\nu s}, f_s \in \mathbb{C}^\infty [0, T]; \quad (2)$$

в) $\theta \in \mathbb{C}^\infty [0, T]$; г) числа $\alpha_1, \alpha_2, p_0, \ldots, p_n$ — целые, причем $p_0 = 0$ и для некоторого $0 \leqslant l_0 \leqslant n - 1$ $p_\nu \geqslant 0$ $\forall \nu = \overline{1, l_0 - 1}$, $p_{l_0} = 0$, $p_\nu > 0$ $\forall \nu = \overline{l_0 + 1, n}$, $a_{l_0}(t, \varepsilon) \not\equiv 0$.

Дифференциальные уравнения и системы уравнений с параметром часто встречаются в приложениях. Для их приближенного интегрирования существует большой набор асимптотических методов, каждый из которых решает определенный круг задач. Построение асимптотики решений некоторых типов уравнений n-го порядка вида (1) см. в [1; 2, с. 166; 3, с. 267; 4 — 6]. Наиболее изученными являются уравнения второго порядка при $\alpha_2 = -1$ и $p_2 = p_1 = 2$ или $p_2 = 2$, $p_1 = 1$ [2, с. 23; 7, с. 317 — 322; 8, с. 42 — 43].

Цель настоящей работы — обосновать возможность изучения структуры решений уравнения (1) порядка $n \geqslant 2$ при любых соотношениях между $\alpha_1, \alpha_2, p_1, \ldots, p_n$ с помощью метода диаграмм, предложенного в [9] для однородного дифференциального уравнения

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon^{p_\nu} a_\nu(t, \varepsilon) x^{(\nu)} = 0. \quad (3)$$

Как следует из дальнейшего изложения, такой подход позволяет по единой схеме проводить исследование резонансного и нерезонансного случаев, а также установить для достаточно большого класса неоднородных дифференциальных уравнений вида (1) существование частного решения с асимптотикой по целым степеням параметра ε (в то время как для соответствующего однородного уравнения (3) асимптотическое разложение решений идет в общем случае по дробным степеням ε).

Пусть r — число звеньев диаграммы [9] дифференциального уравнения (3). Для ее i-го звена обозначим через n_i коэффициент наклона; через s_i и s_{i+1} абсциссы начальной и конечной точек ($s_1 = 0$, $s_{r+1} = n$). Напомним, что

$$0 > n_1 > \ldots > n_r \text{ при } l_0 = 0, \ 0 = n_1 > n_2 > \ldots > n_r \text{ при } l_0 \geqslant 1, \quad (4)$$

$$n_i = (p_{s_i} - p_{s_{i+1}})/(s_{i+1} - s_i) \quad (5)$$

и при $n_i < 0$ определяющее уравнение i-го звена имеет вид

$$L_i[y] \equiv \sum_{\nu=s_i}^{s_{i+1}}{}' a_{\nu 0}(t) y^\nu = 0, \quad (6)$$

где символом Σ' обозначено суммирование только по тем индексам ν, $s_i \leqslant \nu \leqslant s_{i+1}$, для которых точки $(\nu,\ p_\nu)$ лежат на i-м звене диаграммы, т. е. $p_\nu + \nu n_i = p_{s_i} + s_i n_i \equiv A_i$ — константа для данного звена.

Будем говорить, что имеет место резонансный случай, если $\alpha_2 = n_j$ для некоторого $1 \leqslant j \leqslant r$ и $L_j[\theta'] = 0$ хотя бы для одного $t \in [0, T]$. При нарушении по крайней мере одного из указанных условий будем говорить, что имеет место нерезонансный случай.

2. Преобразование уравнения (1). Сделаем в (1) замену

$$x(t, \varepsilon) = g(t, \varepsilon) \exp(\varepsilon^{\alpha_2}\theta(t)). \tag{7}$$

Предполагая функцию $g(t, \varepsilon)$ дифференцируемой по t достаточное число раз, получаем для нее дифференциальное уравнение

$$N[g] \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{l=1}^{\nu} \varepsilon^{p_\nu + l\alpha_2} a_\nu(t, \varepsilon) \sum_{i_1=l}^{\nu} \sum_{i_2=l-1}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_l=1}^{i_{l-1}-1} r_{\nu+1,l+1} \prod_{c=1}^{l} (\theta^{(b_c)}(t))\, g^{(\nu-i_1)} +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon^{p_\nu} a_\nu(t, \varepsilon)\, g^{(\nu)} - \varepsilon^{\alpha_1} f(t, \varepsilon) = 0, \tag{8}$$

где $b_c = i_c - i_{c+1}$, $i_0 = \nu + 1$, $i_{l+1} = 0$, $r_{\nu+1,l+1} = \prod_{c=0}^{l-1} (i_c - 1)!/i_{c+1}!\,(b_c - 1)!$. (В случае $\theta(t) \equiv 0$ выражение $N[g]$ совпадает с $M[g]$.)

Учитывая разложения (2), введем в рассмотрение уравнение

$$Q[g] \equiv \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{l=1}^{\nu} \varepsilon^{s+p_\nu+l\alpha_2} a_{\nu s} \sum_{i_1=l}^{\nu} \sum_{i_2=l-1}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_l=1}^{i_{l-1}-1} r_{\nu+1,l+1} \prod_{c=1}^{l} (\theta^{(b_c)})\, g^{(\nu-i_1)} +$$

$$+ \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon^{s+p_\nu} a_{\nu s} g^{(\nu)} - \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s+\alpha_1} f_s = 0. \tag{9}$$

(Здесь и далее для сокращения записи аргумент t всех фигурирующих функций не указывается.)

Назовем формальным решением уравнения (1) выражение (7), где разложение $\sum_{s\geqslant 0} \varepsilon^{m_s} g_s(t)$ (не обязательно сходящееся) удовлетворяет (9) тождественно на $[0, T]$ в смысле равенства асимптотических рядов.

Обозначим

$$\rho_1 = 0 \text{ при } \theta'(t) \equiv 0 \text{ и } \rho_1 = \min_{\nu=\overline{0,n}} \min_{l=\overline{0,\nu}} (\rho_\nu + l\alpha_2) \text{ при } \theta'(t) \not\equiv 0, \tag{10}$$

$$F_{1s}[z] \equiv \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{l=1}^{\nu} a_{\nu, s-p_\nu-l\alpha_2+\rho_1} \sum_{i_1=l}^{\nu} \sum_{i_2=l-1}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_l=1}^{i_{l-1}-1} r_{\nu+1,l+1} \prod_{c=1}^{l} (\theta^{(b_c)})\, z^{(\nu-i_1)} +$$

$$+ \sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu, s-p_\nu+\rho_1} z^{(\nu)}, \quad s \geqslant 0. \tag{11}$$

Тогда уравнение (9) приводится к виду

$$Q[g] = \varepsilon^{\rho_1+\rho_2} \sum_{i\geqslant 0} \varepsilon^i F_{1,i+\rho_2}[g] - \varepsilon^{\alpha_1} \sum_{i\geqslant 0} \varepsilon^i f_i = 0, \tag{12}$$

где ρ_2 — наименьший из индексов $s \geqslant 0$, для которого $F_{1s}[z] \equiv 0$.

Проведем анализ дифференциального уравнения (9) по схеме метода диаграммы Ньютона [10] (§2).

3. Вспомогательные утверждения. Нетрудно видеть, что при любых α_1, α_2, p_1, …, p_n диаграмма дифференциального уравнения (9) состоит из одного звена, соединяющего точки $(0, \alpha_1)$ и $(1, \rho_1 + \rho_2)$. Учитывая, что коэффициент наклона этого звена, равный $\alpha_1 - \rho_1 - \rho_2$, является целым числом, будем искать решение уравнения (9) в виде разложения $\varepsilon^{\alpha_1\rho_1-\rho_2}\sum\limits_{s\geqslant 0}\varepsilon^s g_s(t)$, коэффициенты которого должны удовлетворять условию

$$Q\left[\varepsilon^{\alpha_1-\rho_1-\rho_2}\sum_{s\geqslant 0}\varepsilon^s g_s\right] \equiv 0, \quad t \in [0, T]. \tag{13}$$

Заметим, что с учетом (11), (12) справедлива цепочка равенств

$$Q\left[\varepsilon^{\alpha_1-\rho_1-\rho_2}\sum_{s\geqslant 0}\varepsilon^s g_s\right] = \varepsilon^{\alpha_1}\sum_{s\geqslant 0}\varepsilon^s\left(\sum_{k=0}^{s}F_{1,k+\rho_2}[g_{s-k}] - f_s\right) =$$

$$= \varepsilon^{\alpha_1}\sum_{s\geqslant 0}\varepsilon^s\left(F_{1\rho_2}[g_s] - h_{s-1}\right),$$

где функция

$$h_{s-1} \equiv f_s(t) - \sum_{k=1}^{s}F_{1,k+\rho_2}[g_{s-k}] \tag{14}$$

определяется по $g_0(t), \ldots, g_{s-1}(t)$ и коэффициентам уравнения (1).

Поэтому для выполнения требования (13) функции $g_s(t)$ должны удовлетворять рекуррентному соотношению

$$F_{1\rho_2}[g_s] = h_{s-1}, \quad s \geqslant 0. \tag{15}$$

При этом вопрос о разрешимости уравнений (15) может быть решен после нахождения числа ρ_2 и изучения характера зависимости $F_{1\rho_2}[z]$ от z.

Прежде чем перейти к анализу возможных случаев, уточним значение числа ρ_1 при $\theta'(t) \not\equiv 0$.

Нетрудно видеть, что в силу (10)

$$\rho_1 = 0 \text{ при } \alpha_2 > 0, \ \rho_1 = \min_{\nu=\overline{0,n}}(p_\nu + \nu\alpha_2) \text{ при } \alpha_2 \leqslant 0. \tag{16}$$

С учетом (4) обозначим $\Delta_i =]n_{i+1}, n_i]$, $i = \overline{0, r}$, где $n_0 = 0$, $n_{r+1} = -\infty$.

Лемма. *В случае $\alpha_2 \leqslant 0$ справедливо равенство*

$$\rho_1 = p_{s_{j+1}} + s_{j+1}\alpha_2, \tag{17}$$

где j — номер того интервала Δ_j, которому принадлежит число α_2.

Доказательство. Пусть $\alpha_2 \in \Delta_j$. Тогда из (4) следует

$$\alpha_2 > n_{j+1} > \ldots > n_r. \tag{18}$$

Напомним, что в силу правила построения диаграммы уравнения (3)

$$p_\nu \geqslant p_{s_i} + (s_i - \nu)n_i \quad \forall \nu = \overline{s_i, s_{i+1}}, \quad i = \overline{1, r}. \tag{19}$$

Поэтому в случае $j + 1 \leqslant i \leqslant r$, $\nu = \overline{s_i, s_{i+1}}$ в силу (18) $p_\nu + \nu\alpha_2 \geqslant p_{s_i} + s_i\alpha_2$, где равенство достигается только при $\nu = s_i$. Кроме того, так как с учетом (5), (18) $p_{s_{i+1}} + s_{i+1}\alpha_2 > p_{s_i} + s_i\alpha_2$ $\forall i = \overline{j+1, r}$ и $s_{r+1} = n$, то справедливо равенство

$$\min_{\nu=\overline{s_{j+1}, n}}(p_\nu + \nu\alpha_2) = p_{s_{j+1}} + s_{j+1}\alpha_2. \tag{20}$$

Таким образом, в случае $j = 0$ лемма доказана. Если же $j \geqslant 1$, то $s_{j+1} \geqslant 1$ и для завершения доказательства формулы (17) остается найти наименьшее значение $p_\nu + \nu a_2$ при $0 \leqslant \nu \leqslant s_{j+1}$.

Заметим, что в случае $j \geqslant 1$ из условия $\alpha_2 \in \Delta_j$ следует неравенство $\alpha_2 \leqslant n_j < \ldots < n_1$. Учитывая (19) и формулу $p_{s_i} + s_i n_i = p_{s_{i+1}} + s_{i+1}n_i$, справедливую для всех $i = \overline{1, r}$, получаем

$$p_\nu + \nu\alpha_2 \geqslant p_{s_{i+1}} + s_{i+1}\alpha_2 \quad \forall \nu = \overline{s_i, s_{i+1}}, \quad i = \overline{1, j}. \tag{21}$$

Причем, если $\alpha_2 \neq n_j$, то в (21) равенство справедливо только при $\nu = s_{i+1}$. Если же $i = j$ и $\alpha_2 = n_j$, то в (21) равенство имеет место для всех $s_j \leqslant \nu \leqslant s_{j+1}$, как только $p_\nu + \nu\alpha_2 = A_j$.

Заметим, что с учетом (5) $p_{s_{i+1}} + s_{i+1}\alpha_2 < p_{s_i} + s_i\alpha_2 \quad \forall i = \overline{1, j}$. Поэтому

$$\min_{\nu=\overline{0,s_{j+1}}} (p_\nu + \nu\alpha_2) = p_{s_{j+1}} + s_{j+1}\alpha_2. \tag{22}$$

Нетрудно видеть, что в случае $j = r$ формула (22) совпадает с (17) и доказывает лемму. Если же $1 \leqslant j \leqslant r - 1$, то утверждение (17) вытекает из (20) и (22). Лемма доказана.

Замечание 1. Если $\alpha_2 \in \Delta_j$ и $\alpha_2 \neq n_j$, то в (17) минимум реализуется только при $\nu = s_{j+1}$. Если $\alpha_2 = n_j$, то он достигается при всех значениях ν, для которых точки (ν, p_ν) лежат на j-м звене диаграммы уравнения (3).

4. Построение формального решения. Рассмотрим возможные случаи.

1). Пусть $\theta'(t) \equiv 0$. Тогда согласно (10), (11) полагаем $\rho_1 = 0$ и

$$F_{10}[z] = a_{l_0 0}(t)\, z^{(l_0)} + \sum_{\nu=1}^{l_0-1} \gamma a_{\nu 0}(t)\, z^{(\nu)} + a_{00}(t)\, z \not\equiv 0, \tag{23}$$

где $\gamma = \delta_{p_\nu, 0}$ и $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Поэтому, полагая $\rho_2 = 0$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Пусть* $\theta'(t) \equiv 0$ *и* $a_{l_0 0}(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$. *Тогда дифференциальное уравнение* (1) *при любом* $\alpha_2 \in \mathbb{R}$ *имеет формальное решение вида*

$$x(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\alpha_1 - \rho_1 - \rho_2} \sum_{s \geqslant 0} \varepsilon^s g_s(t) \exp(\varepsilon^{\alpha_2}\theta(t)), \tag{24}$$

где $\rho_1 = \rho_2 = 0$. *При этом функции* $g_s(t)$, $s \geqslant 0$, *последовательно вычисляются по рекуррентным формулам*

$$\sum_{\nu=0}^{l_0} \gamma a_{\nu 0}(t)\, g_s^{(\nu)} = h_{s-1}(t), \text{ если } l_0 \geqslant 1, \; g_s(t) = h_{s-1}(t)/a_{00}(t), \text{ если } l_0 = 0, \tag{25}$$

где $h_{s-1}(t) = f_s(t) - \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{k=0}^{s-p_\nu-\gamma} a_{\nu, s-p_\nu-k}(t)\, g_k^{(\nu)}(t), \quad s \geqslant 0.$

(Из теоремы 1, в частности, следуют утверждения [7, с. 317, 8, с. 39].)

Замечание 2. Построенная с помощью теоремы 1 функция $g(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\alpha_1 - \rho_1 - \rho_2} \sum_{s \geqslant 0} \varepsilon^s q_s(t)$ является формальным решением уравнения

$$\sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon^{p_\nu} a_\nu(t, \varepsilon)\, x^{(\nu)} - \varepsilon^{\alpha_1} f(t, \varepsilon) = 0. \tag{26}$$

Поэтому при $\theta'(t) \not\equiv 0$ и $\alpha_2 = 0$ дифференциальное уравнение (1) не требует отдельного рассмотрения, поскольку является частным случаем (26), где в качестве $f(t, \varepsilon)$ используется функция $f(t, \varepsilon) \exp(\theta(t))$.

Перейдем к анализу уравнения (1) при $\theta'(t) \not\equiv 0$.

2). Пусть $\alpha_2 > 0$. Тогда из (16) $\rho_1 = 0$ и из (11) $F_{10}[z]$ имеет вид (23). Поэтому, полагая $\rho_2 = 0$, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть* $\theta'(t) \not\equiv 0$, $\alpha_2 > 0$ *и* $a_{l_0 0}(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$. *Тогда дифференциальное уравнение* (1) *имеет формальное решение вида* (24), *где* $\rho_1 = \rho_2 = 0$. *При этом функции* $g_s(t)$, $s \geqslant 0$, *последовательно могут быть найдены по рекуррентным формулам* (11), (14), (25).

3). Пусть $\alpha_2 < 0$ и $\alpha_2 \neq n_j$ для $1 \leqslant j \leqslant r$. Тогда согласно (17) $\rho_1 = p_{s_{j+1}} + s_{j+1}\alpha_2$. При этом с учетом замечания 1 из формулы (11) получаем $F_{10}[z] = a_{s_{j+1}0}(\theta')^{s_{j+1}} \not\equiv 0$. Таким образом, полагая $\rho_2 = 0$, приходим к следующему утверждению.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha_2 \in]n_{j+1}, n_j[$, $a_{s_{j+1}}(t) \neq 0$ *и в случае* $j \neq 0$ *дополнительно* $\theta'(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$. *Тогда дифференциальное уравнение* (1) *имеет формальное решение вида* (24), *где* $\rho_1 = p_{s_{j+1}} + s_{j+1}\alpha_2$, $\rho_2 = 0$, $g_s = h_{s-1}/a_{s_{j+1}0}(\theta')^{s_{j+1}}$ *и* h_{s-1} *вычисляется по формулам* (11), (14).

4) Пусть $a_2 = n_j < 0$, где $1 \leqslant j \leqslant r$. Тогда согласно (17) $\rho_1 = A_j$, причем $\rho_1 = 0$, если $j = 1$, и $\rho_1 < 0$ в остальных случаях.

Анализ формул (6), (11) и замечания 1 приводит к равенству

$$F_{10}[z] = L_j[\theta']z. \tag{27}$$

Таким образом, если выполнено условие

$$L_j[\theta'] \neq 0 \quad \forall t \in [0, T], \tag{28}$$

то $\rho_2 = 0$ и справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\theta'(t) \not\equiv 0$, $\alpha_2 = n_j < 0$, *где* $1 \leqslant j \leqslant r$. *Тогда в случае* (28) *дифференциальное уравнение* (1) *имеет формальное решение вида* (24), *где* $\rho_1 = A_j$, $\rho_2 = 0$, $g_s(t) = h_{s-1}/L_j[\theta']$, $s \geqslant 0$, *и* h_{s-1} *вычисляется по формулам* (11), (14).

(В частности, следствиями теоремы 4 являются результаты [7, с. 321; 8, с. 42].) Отметим, что теоремы 1—4 описывают нерезонансный случай.

5). Пусть $\alpha_2 = n_j < 0$, $1 \leqslant j \leqslant r$, и хотя бы для одного $t \in [0, T]$ функция $\theta'(t)$ совпадает с корнем (обозначим его $y_0(t)$) алгебраического уравнения

$$L_j[y] \equiv {\sum_{\nu=s_j}^{s_{j+1}}}' a_{\nu 0}(t)\, y^\nu = 0. \tag{29}$$

В этом случае (который является резонансным), считая расстройку малой, положим $L_j[\theta'] = \varepsilon u_0(t)$. (Вариант $u_0(t) \equiv 0$ включается.) Тогда из (27) следует

$$F_{10}[z] = \varepsilon u_0(t)\, z \tag{30}$$

и уравнение (12) принимает вид

$$Q[g] = \varepsilon^{\rho_1+\rho_2} \sum_{i \geqslant 0} \varepsilon^i F_{2,i+\rho_2}[g] - \varepsilon^{\alpha_1} \sum_{i \geqslant 0} \varepsilon^i f_i = 0, \quad \rho_1 = A_j, \tag{31}$$

где

$$F_{20}[z] \equiv 0, \quad F_{21}[z] = F_{11}[z] + u_0(t)\, z, \quad F_{2s}[z] = F_{1s}[z] \quad \forall s \geqslant 2, \tag{32}$$

ρ_2 — наименьший из индексов s, для которого $F_{2s}[z] \not\equiv 0$.

Изучение уравнения (31) проведем в полном соответствии со схемой данного выше исследования уравнения (12). Однако в последнем случае $\rho_2 \neq 0$ (см. (32)) и для его определения проанализируем выражение $F_{21}[z]$.

Прежде всего заметим, что согласно формуле (11)

$$F_{11}[z] = \sum_{\nu=0}^{n} \sum_{l=0}^{\nu} \frac{\nu!}{l!} a_{\nu,1-p_\nu-l\alpha_2+\rho_1}(\theta')^l z^{(\nu-l)} + \sum_{\nu=2}^{n} \sum_{l=1}^{\nu-1} a_{\nu,1-p_\nu-l\alpha_2+\rho_1} \times$$
$$\times \sum_{i_1=l+1}^{\nu} \sum_{i_2=l-1}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_l=1}^{i_{l-1}-1} r_{\nu+1,l+1} \prod_{c=1}^{l} (\theta^{(b_c)})\, z^{(\nu-i_1)}.$$

Поэтому, учитывая неравенства $\rho_1 \leqslant p_\nu + \nu\alpha_2 < p_\nu + (\nu-1)\alpha_2 < \ldots < p_\nu + \alpha_2 < p_\nu$, $\rho_1 \leqslant 0$, $\alpha_2 < 0$, замечание 1 и тот факт, что числа ρ_1, α_2 — целые, получаем представление $F_{11}[z] = \delta_{\alpha_2+1,0} u_2(t) z' + u_1(t) z$, где

$$u_2(t) = \sum_{\nu=s_j}^{s_{j+1}}{}' \nu a_{\nu 0}(t) (\theta'(t))^{\nu-1},$$

$$u_1(t) = \sum_{\nu=s_j}^{s_{j+1}}{}' a_{\nu 1}(t)(\theta'(t))^{\nu} + \sum_{\nu=0}^{n} \delta_{p_\nu+\nu\alpha_2, 1+\rho_1} a_{\nu 0}(t)(\theta'(t))^{\nu} +$$

$$+ \delta_{\alpha_2+1,0} \sum_{\nu=2}^{s_{j+1}}{}' \frac{\nu(\nu-1)}{2} a_{\nu 0}(t)\theta''(t)(\theta'(t))^{\nu-2}. \tag{33}$$

Таким образом, воспользовавшись (32), заключаем, что $F_{21}[z] = \delta_{\alpha_2+1,0} u_2(t) z' + (u_1(t) + u_0(t)) z$, где, в частности, $u_2(t)$ совпадает в силу (29) с dL_j/dy при $y = \theta'(t)$.

Приведенные рассуждения доказывают следующие утверждения.

Теорема 5. *Пусть $\theta'(t) \not\equiv 0$, $\alpha_2 = n_j = -1$ и выполнено условие*

$$u_2(t) \neq 0, \quad t \in [0, T]. \tag{34}$$

Тогда дифференциальное уравнение (1) *в случае резонанса имеет формальное решение вида* (24), *где $\rho_1 = A_j$, $\rho_1 = 1$, функции $g_s(t)$, $s \geqslant 0$, последовательно определяются из дифференциальных уравнений первого порядка $u_2(t) g_s' + (u_1(t) + u_0(t)) g_s = h_{s-1}$, где h_{s-1} вычисляется по формулам* (11), (14) *с заменой в последних $F_{1s}[z]$ на $F_{2s}[z]$.*

(Функции $g_s(t)$, $s \geqslant 0$, легко можно получить в квадратурах.)

Отметим, что из теоремы 5, в частности, следуют результаты [7, с. 322; 8, с. 43].

Теорема 6. *Пусть $\theta'(t) \not\equiv 0$, $\alpha_2 = n_j = -1$ и выполнены условия*

$$u_2(t) \equiv 0, \quad u_1(t) + u_0(t) \neq 0, \quad t \in [0, T]. \tag{35}$$

Тогда дифференциальное уравнение (1) *в случае резонанса имеет формальное решение вида* (24), *где $\rho_1 = A_j$, $\rho_2 = 1$, $g_s(t) = h_{s-1}/(u_1(t) + u_0(t))$, $s \geqslant 0$, и h_{s-1} вычисляется по формулам* (11), (14) *с заменой в них $F_{1s}[z]$ на $F_{2s}[z]$.*

Теорема 7. *Пусть $\theta'(t) \not\equiv 0$, $\alpha_2 = n_j < 0$ и $\alpha_2 \neq -1$. Тогда при выполнении второго условия из* (35) *для дифференциального уравнения* (1) *в случае резонанса справедливо утверждение теоремы 6.*

Замечание 3. *Если* $\theta'(t) \equiv y_0(t)$ $\forall t \in [0, T]$, то $u_0(t) \equiv 0$ и в силу (30) $F_{10}[z] \equiv 0$. Поэтому такую ситуацию можно изучить без перехода от (12) к уравнению (31). При этом (34) и первое из условий (35) означают, что $y_0(t)$ является на $[0, T]$ соответственно простым или тождественно кратным корнем уравнения (29)

Замечание 4. Если функции $u_i(t)$, $i = \overline{0, 2}$, (см. (30), (33)) таковы, что $F_{21}[z] \equiv 0$, то $\rho_2 > 1$ и для уточнения его значения следует перейти к анализу выражения $F_{22}[z]$. И так далее.

5. Построение асимптотического решения. Введем функцию

$$\psi(t, \varepsilon) = \lambda(t, \varepsilon) \exp(\varepsilon^{\alpha_2}\theta(t)), \tag{36}$$

где

$$\lambda(t, \varepsilon) = \varepsilon^{\alpha_1-\rho_1-\rho_2}\xi(t, \varepsilon), \quad \xi(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m_1} \varepsilon^s g_s(t), \quad m_1 = \max(0, m - \alpha_1), \tag{37}$$

ρ_1, ρ_2, $g_s(t)$ для $s = \overline{0, m_1}$ найдены с помощью одной из теорем 1—7 и m — некоторое неотрицаельное целое число.

Теорема 8. *Функции $\psi(t, \varepsilon)$ и $\lambda(t, \varepsilon)$ являются m-асимптотическими решениями дифференциальных уравнений* (1) *и* (8) *соответственно. При этом справедливы представления*

$$M[\psi] = \varepsilon^{m+1} v(t, \varepsilon) \exp(\varepsilon^{\alpha_2}\theta(t)), \quad N[\lambda] = \varepsilon^{m+1} v(t, \varepsilon), \quad v \in E. \tag{38}$$

Доказательство. Подстановка $\lambda(t, \varepsilon)$ в выражение $N[g]$ приводит к равенству $N[\lambda] = \varepsilon^{\alpha_1} R[\xi]$, где $R[\xi] \equiv \sum_{\nu=0}^{n} \varepsilon^{p_\nu - \rho_1} a_\nu(t, \varepsilon) \xi^{(\nu)}(t, \varepsilon) -$

$$- f(t, \varepsilon) + \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{l=1}^{\nu} \varepsilon^{p_\nu + l\alpha_2 - \rho_1} a_\nu(t, \varepsilon) \sum_{i_1=l}^{\nu} \sum_{i_2=l-1}^{i_1-1} \cdots \sum_{i_l=1}^{i_{l-1}-1} r_{\nu+1, l+1} \prod_{c=1}^{l} (\theta^{(b_c)}(t)) \times$$

$\times\ \xi^{(\nu-i_1)}(t, \varepsilon)$.

Заметим, что согласно (37) функции $\xi^{(\nu)}(t, \varepsilon)$ для $\nu = \overline{0, n}$ непрерывны в прямоугольнике $[0, T] \times [0, \varepsilon_0]$. Поэтому с учетом (10) и предположений б), в) аналогичным свойством обладает функция $R[\xi]$. Более того, из (13) и (15) следует справедливость представления $R[\xi] = \varepsilon^{m_1+1} v(t, \varepsilon)$, где $v \in E$.

Таким образом, воспользовавшись формулой $M[\psi] = N[\lambda]\exp(\varepsilon^{\alpha_2}\theta(t))$, получаем равенства (38), что и доказывает теорему 8.

Отметим, что представление $M[\psi] = \varepsilon^{m+1} u(t, \varepsilon)$, где $u \in E$, возможно в следующих двух случаях: $\alpha_2 \geqslant 0$ и $\theta(t)$ — любая или $\alpha_2 < 0$ и

$$\operatorname{Re} \theta(t) < 0 \quad \forall t \in [0, T]. \tag{39}$$

6. Оценка погрешности. Пользуясь традиционными приемами (см., например, [6]) и знанием асимптотики фундаментальной системы решений уравнения (3) (см. [11]), можно доказать существование такого частного решения $x_1(t, \varepsilon)$ дифференциального уравнения (1), что для всех $t \in [0, T]$ и $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$ сраведливы оценки

$$\| x_1^{(\nu)}(t, \varepsilon) - \psi^{(\nu)}(t, \varepsilon) \| \leqslant \varepsilon^{m+1+q_\nu} B \| \exp(\varepsilon^{\alpha_2}\theta(t)) \|, \quad \nu = \overline{0, n-1}, \tag{40}$$

где $B > 0$ не зависит от t, ε, ν; $\| w(t, \varepsilon) \| = \max_{t \in [0, T]} | w(t, \varepsilon) |$ и числа q_ν, $\nu = \overline{0, n-1}$, вычисляются по формуле $q_\nu = 0$, $\nu = \overline{0, l_0 - 1}$, $q_\nu = \sum_{l=l_0+1}^{\nu+1} k_l$, $\nu = \overline{l_0, n-1}$. При этом $k_l = n_i$ для всех $l = \overline{s_i + 1, s_{i+1}}$, $i = \overline{1, r}$.

Заметим, что в случае (39) неравенства (40) принимают вид $\| x_1^{(\nu)}(t, \varepsilon) - \psi^{(\nu)}(t, \varepsilon) \| \leqslant \varepsilon^{m+1+q_\nu} B$, $\nu = \overline{0, n-1}$. Это позволяет, в частности, сделать следующие выводы:

1) формальное разложение (24) является асимптотическим представлением при $\varepsilon \to +0$ некоторого частного решения $x_1(t, \varepsilon)$ уравнения (1);

2) формальные ряды, полученные почленным дифференцированием по t разложения (24) ν раз, $1 \leqslant \nu \leqslant n - 1$, являются асимптотическими представлениями при $\varepsilon \to +0$ для соответствующих функций $x_1^{(\nu)}(t, \varepsilon)$;

3) функция $\psi(t, \varepsilon)$ вида (36) может быть приближенно, с погрешностью порядка $O(\varepsilon^{m+1+q_0})$, принята за частное решение уравнения (1).

1. *Fowler R., Lock C.* Approximate solutions of linear differential equations // Proc. London Math. Soc.— 1921.— **20**, N 2.— p. 127—147.
2. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— Киев: Наук. думка, 1966.— 248 с.
3. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Мир, 1968.— 464 с.
4. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук.— 1957.— **12**, вып. 5.— С. 3—122.
5. *Разумейко Б. Г.* Об асимптотическом поведении решения краевой задачи для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с малым параметром // Дифференц. уравнения.— 1971.— **7**, № 11.— С. 1998—2006.
6. *Шабат А. Б.* Краевые задачи с малым параметром для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук.— 1962.— **17**, вып. 1.— С. 235—241.
7. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики.— М. : Наука, 1969.— 377 с.
8. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях.— К. : Вища шк., 1971.— 225 с.
9. *Жукова Г. С., Черных Н. П.* Структура формальных решений сингулярно возмущенных

дифференциальных уравнений n-го порядка // Укр. мат. журн.— 1985.— **37**, № 6.— С. 695—702.
10. *Вайнберг М. М., Треногин В. А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений.— М. : Наука, 1969.— 527 с.
11. *Жукова Г. С.* Построение асимптотики фундаментальной системы решений для линейного сингулярно возмущенного дифференциального уравнения n-го порядка // Асимптотическое интегрирование дифференц. уравнений.— Киев : Ин-т матеметики АН УССР, 1985.— С. 56—64.

Воронеж. ун-т

Получено 04.01.87,
после доработки — 02.04.87