УДК 519.21

А. Ю. Заиграев

Об оптимальном планировании для наилучшего прогноза линейной функции регрессии

В настоящей статье исследуется задача выбора оптимального плана для наилучшего ограниченного линейного несмещенного прогноза (НОЛНП) наблюдаемой с «шумом» линейной функции регрессии в фиксированной точке в гильбертовом пространстве. Ранее задача поиска наилучшего линейного несмещенного прогноза в линейной модели регрессии изучалась лишь в конечномерном случае (см., например, [1, 2], где имеется обширная библиография). Данная работа может рассматриваться как обобщение исследования, проведенного в [3], где оптимальные планы строятся для НОЛНП линейной функции регрессии в фиксированной точке в гильбертовом пространстве без учета «шума». Вопросам использования методов гильбертова пространства при прогнозе и планировании эксперимента посвящены также работы [4, 5].

Пусть B — действительное сепарабельное банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_B$; B^* — пространство, сопряженное к B. Предположим, что имеется наблюдение z случайной величины со значениями в B вида $z = \sum_{k=1}^{n} \theta_k x_k + \xi$, где $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)'$ — вектор неизвестных действительных параметров, $\{x_i\}_{i=1}^n$ — план-набор известных линейно независимых в B элементов, $n \in N$ фиксировано, ξ — случайный элемент со значениями в B, имеющий сильный второй порядок [6]. Будем также предполагать, что случайный элемент ξ имеет нулевое среднее и корреляционный оператор S.

Пусть H — действительное сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, нормой $\|\cdot\|_H$. На основе наблюдения z необходимо составить прогноз H-значного случайного элемента z_0 вида $z_0 = \sum_{k=1}^{n} \theta_k y_k + \xi_0$, где $\{y_i\}_{i=1}^n$ — фиксированные линейно независимые в H элементы, ξ_0 — H-значный случайный элемент с нулевым средним, имеющий сильный второй порядок.

Оценку случайного элемента z_0 естественно называть прогнозом [2]. Такое название объясняется тем, что задача оценивания не поддающегося наблюдению значения линейной функции регрессии в некоторой наперед заданной точке $\{y_i\}_{i=1}^n$ с учетом «шума» в известном смысле обобщает обычную задачу прогноза для случайного процесса [1].

В качестве прогноза элемента z_0 рассмотрим ограниченный линейный прогноз вида $\hat{z}_0 = Lz$, где $L : B \to H$ — линейный непрерывный оператор. Кроме того, потребуем, чтобы прогноз $\hat{z}_0$ был несмещенным, т. е. $M\hat{z}_0 = Mz_0$, или

$$Lx_k = y_k, \quad k = \overline{1, n}. \tag{1}$$

Будем интересоваться НОЛНП элемента z_0, т. е. таким ограниченным линейным несмещенным прогнозом, который доставляет наименьшее значение функционалу

$$M\|\hat{z}_0 - z_0\|_H^2. \tag{2}$$

Для решения задачи поиска НОЛНП элемента z_0 предположим известным линейный непрерывный оператор $A: B^* \to H$ взаимной корреляции случайных элементов ξ_0 и ξ, определяющийся равенством [6] $\forall f \in B^*$: : $Af = M\langle f, \xi\rangle \xi_0$. Здесь и далее символом $\langle f, x\rangle$ обозначаем значение линейного ограниченного функционала $f \in B^*$ на элементе $x \in B$.

Теорема 1. *Если $\{x_i\}_{i=1}^n \subset SB^*$, $A^*H \subset SB^*$, то НОЛНП для элемента z_0 существует, единствен и определяется соотношением*

$$\hat{z}_0 = L_0 z = Fz + \sum_{i=1}^n \langle S^{-1}u_i, z\rangle (y_i - AS^{-1}x_i), \tag{3}$$

где $u_i = \sum_{k=1}^n (G^{-1})_{ik} x_k$, $G = (\langle S^{-1}x_i, x_k\rangle)_{i,k=1}^n$, а оператор $F: B \to H$ таков, что $\forall x \in B \forall h \in H$: $(Fx, h) = \langle S^{-1}A^*h, x\rangle$.

Доказательство. Заметим сначала, что ввиду условия $A^*H \subset \subset SB^*$, оператор $S^{-1}A^*: H \to B^*$ является линейным непрерывным оператором. Следовательно, таков и оператор F.

Прогноз $\hat{z}_0$, определяемый соотношением (3), действительно несмещен, поскольку

$$L_0 x_k = Fx_k + \sum_{i=1}^n \langle S^{-1}u_i, x_k\rangle (y_i - AS^{-1}x_i) = AS^{-1}x_k + y_k -$$

$$- AS^{-1}x_k = y_k, \quad k = \overline{1, n}.$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что справедливо равенство

$$M(L\xi, L_0\xi) + M(L_0\xi, \xi_0) = M\|L_0\xi\|_H^2 + M(L\xi, \xi_0), \tag{4}$$

где $L: B \to H$ — произвольный линейный непрерывный оператор, удовлетворяющий условию (1).

Действительно, если равенство (4) справедливо, то выполняется соотношение

$$M\|\hat{z}_0 - z_0\|_H^2 = M\|L\xi - \xi_0\|_H^2 = M\|L\xi\|_H^2 + M\|\xi_0\|_H^2 - 2M(L\xi, \xi_0) =$$

$$= M\|L_0\xi\|_H^2 + M\|(L - L_0)\xi\|_H^2 + M\|\xi_0\|_H^2 - 2M(L_0\xi, \xi_0) \geqslant M\|L_0\xi - \xi_0\|_H^2,$$

т. е. оператор L_0 минимизирует функционал (2).

Докажем теперь равенство (4). Поскольку

$$M(L\xi, L_0\xi) = M(L\xi, F\xi) + \sum_{i=1}^n M\langle S^{-1}u_i, \xi\rangle (L\xi, y_i - AS^{-1}x_i) =$$

$$= M(L\xi, F\xi) + \sum_{i=1}^n \langle L^*y_i - L^*AS^{-1}x_i, u_i\rangle = M(L\xi, F\xi) +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n (G^{-1})_{ik} (y_i - AS^{-1}x_i, y_k),$$

то для доказательства равенства (4) достаточно показать, что справедливо равенство

$$M(L\xi, F\xi) + M(L_0\xi, \xi_0) = M(L_0\xi, F\xi) + M(L\xi, \xi_0).$$

Для этого покажем, что выполняется соотношение

$$M(L\xi, F\xi) = M(L\xi, \xi_0) = \operatorname{tr} AL^*. \tag{5}$$

Заметим, что величина (5) конечна, поскольку оператор A взаимной корреляции случайных элементов ξ_0 и ξ, имеющих сильные вторые порядки в H и B соответственно, является ядерным [6].

Пусть $\{e_q\}_{q=1}^{\infty}$ — некоторый ортонормированный базис H. Как следует из рассуждений, приведенных при доказательстве теоремы 2.1 в [7, с. 21—22], для любых двух H-значных случайных элементов ζ и η, имеющих сильные вторые порядки, справедливо соотношение $M(\zeta, \eta) = \sum_{q=1}^{\infty} M(\zeta, e_q) \times (\eta, e_q)$. Следовательно,

$$M(L\xi, F\xi) = \sum_{q=1}^{\infty} M(L\xi, e_q)(F\xi, e_q) = \sum_{q=1}^{\infty} M\langle L^*e_q, \xi\rangle \langle S^{-1}A^*e_q, \xi\rangle =$$

$$= \sum_{q=1}^{\infty} \langle S^{-1}A^*e_q, SL^*e_q\rangle = \operatorname{tr} AL^*,$$

$$M(L\xi, \xi_0) = \sum_{q=1}^{\infty} M(L\xi, e_q)(\xi_0, e_q) = \operatorname{tr} AL^*.$$

Значит, равенство (5), а вместе с ним и равенство (4) доказаны.

Осталось доказать, что НОЛНП $\hat{z}_0 = L_0 z$ единствен. Предположим, что существует ограниченный линейный несмещенный прогноз $L_1 z$ случайного элемента z_0 такой, что $M \| L_1 z - z_0 \|_H^2 = M \| L_0 z - z_0 \|_H^2$. Покажем, что в этом случае $L_0 z = L_1 z$ с вероятностью 1, или $M \| L_0 z - L_1 z \|_H^2 = 0$. Действительно,

$$M \| L_0 z - L_1 z \|_H^2 = M \| L_0\xi - L_1\xi \|_H^2 = M \| (L_0\xi - \xi_0) - (L_1\xi - \xi_0) \|_H^2 =$$

$$= 2M \| L_0\xi - \xi_0 \|_H^2 - 2M(L_0\xi - \xi_0, L_1\xi - \xi_0) = 2M \| L_0\xi \|_H^2 -$$

$$- 2M(L_0\xi, L_1\xi) + 2M(L_1\xi, \xi_0) - 2M(L_0\xi, \xi_0) = 0.$$

Последнее равенство справедливо ввиду соотношения (4), доказанного для произвольного линейного непрерывного оператора L, удовлетворяющего условию (1). Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 1 следует, что для НОЛНП элемента z_0 функционал (2) принимает вид

$$M \| \hat{z}_0 - z_0 \|_H^2 = M \| \xi_0 \|_H^2 + M \| L_0\xi \|_H^2 - 2M(L_0\xi, \xi_0) = M \| \xi_0 \|_H^2 +$$

$$+ \operatorname{tr} AL_0^* + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (G^{-1})_{ik} (y_i - AS^{-1}x_i, y_k) - 2 \operatorname{tr} AL_0^* = M \| \xi_0 \|_H^2 +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (G^{-1})_{ik} (y_i - AS^{-1}x_i, y_k) - \sum_{q=1}^{\infty} (FA^*e_q, e_q) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{q=1}^{\infty} \langle S^{-1}u_i, A^*e_q\rangle \times$$

$$\times (y_i - AS^{-1}x_i, e_q) = M \| \xi_0 \|_H^2 + - \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (G^{-1})_{ik} (y_i - AS^{-1}x_i, y_k) -$$

$$- \sum_{q=1}^{\infty} \langle S^{-1}A^*e_q, A^*e_q\rangle - \sum_{i=1}^{n} (y_i - AS^{-1}x_i, AS^{-1}u_i) = M \| \xi_0 \|_H^2 - \operatorname{tr} AS^{-1}A^* +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (G^{-1})_{ik} (y_i - AS^{-1}x_i, y_k - AS^{-1}x_k). \tag{6}$$

Назовем план $\{x_i^*\}_{i=1}^n \in X \subset B^n$ оптимальным на множестве X для прогноза $\hat{z}_0$, если этот план минимизирует функционал (2) на X.

Из соотношения (6) непосредственно следует такой результат.

Т е о р е м а 2. *Оптимальным планом на множестве $X \subset (SB^*)^n$ для НОЛНП элемента z_0 является план $\{x_i^*\}_{i=1}^n$, минимизирующий на множестве X функционал*

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(G^{-1})_{ik}(y_i - AS^{-1}x_i, y_k - AS^{-1}x_k).$$

В частности, если $\{y_i\}_{i=1}^n \subset AS^{-1}X$, то оптимальным будет план $\{x_i^*\}_{i=1}^n$ вида $x_i^* = SA^{-1}y_i$, $i = \overline{1, n}$.

П р и м е р 1. Рассмотрим простой случай, когда $B = H$, а случайные элементы ξ_0 и ξ независимы. Тогда, как несложно убедиться, $A=0$ [6]. Из теоремы 1 следует, что если $\{x_i\}_{i=1}^n \subset SH$, то НОЛНП для элемента z_0 имеет вид

$$\hat{z}_0 = \sum_{i=1}^{n}(S^- u_i, z)\, y_i, \quad u_i = \sum_{k=1}^{n}(G^{-1})_{ik}x_k, \quad G = ((S^{-1}x_i, x_k))_{i,k=1}^n.$$

Сравнивая полученный результат с приведенным в работе [3], можно сделать следующий вывод: НОЛНП элемента z_0 по наблюдению z при независимых случайных элементах ξ_0 и ξ совпадает с НОЛНП элемента z_0 без учета «шума» ξ_0, т. е. с НОЛНП элемента $\sum_{k=1}^{n}\theta_k y_k$. Решение задачи оптимального планирования в этом случае содержится в [3].

П р и м е р 2. Пусть $B = H = L_2([0, 1])$. Предположим, что на основе наблюдения реализации случайного процесса $z(t) = \sum_{k=1}^{n}\theta_k x_k(t) + w(t)$, $t \in [0, 1]$, где $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)'$ — вектор неизвестных действительных параметров, $\{x_j\}_{i=1}^n$ — план-набор известных линейно независимых в $L_2([0, 1])$ функций, $\{w(t), t \geqslant 0\}$ — стандартный винеровский случайный процесс, необходимо составить прогноз для реализации случайного процесса $z_0(t) = \sum_{k=1}^{n}\theta_k y_k(t) + \xi_0(t)$, $t \in [0, 1]$, где $\{y_i\}_{i=1}^n$ — фиксированные линейно независимые в $L_2([0, 1])$ функции, $\{\xi_0(t), t \in [0, 1]\}$ — случайный процесс с нулевым средним, причем $M\int_0^1 \xi_0^2(t)\,dt < \infty$. Предположим, что известна взаимная корреляционная функция $A(t, s)$, $t, s \in [0, 1]$ случайных процессов $\{\xi_0(t), t \in [0, 1]\}$ и $\{w(t), t \geqslant 0\}$.

Пусть A — интегральный оператор с ядром $A(t, s)$, $t, s \in [0, 1]$; S — корреляционный оператор стандартного винеровского случайного процесса. Из теоремы 2 следует, что оптимальным планом на $(SL_2([0, 1]))^n$ для НОЛНП случайного процесса $\{z_0(t), t \in [0, 1]\}$ в случае, когда $\{y_i\}_{i=1}^n \subset AL_2([0, 1])$, является план $\{x_i^*\}_{i=1}^n$ вида

$$x_i^*(t) = 2\pi^{-2}\sum_{q=1}^{\infty}(q - 2^{-1})^{-2}\int_0^1 f_i(u)\sin\pi(q - 2^{-1})u\,du\,\sin\pi(q - 2^{-1})t,$$

$$i = \overline{1, n}; \qquad t \in [0, 1],$$

где $\{f_i\}_{i=1}^n \subset \overline{AL_2([0, 1])}$ таковы, что

$$\int_0^1 A(t, s) f_i(s)\,ds = y_i(t), \quad i = \overline{1, n}; \qquad t \in [0, 1].$$

Например, если $A(t, s) = \exp\{-|t-s|\}$, $t, s \in [0, 1]$, то оптимальным планом на $(SL_2([0, 1]))^n$ для НОЛНП случайного процесса $\{z_0(t), t \in [0, 1]\}$ при $\{y_i''\}_{i=1}^n \subset L_2([0, 1])$ является план $\{x_i^*\}_{i=1}^n$ вида

$$x_i^*(t) = \pi^{-2} \sum_{q=1}^{\infty} (q - 2^{-1})^{-2} \int_0^1 [y_i(u) - y_i''(u)] \sin \pi (q - 2^{-1}) u du \times$$

$$\times \sin \pi (q - 2^{-1}) t, \quad i = \overline{1, n}; \qquad t \in [0, 1].$$

1. *Näther W.* Effective observation of random fields // Teubner-Texte Math.— 1985.— **72**.— 184 p.
2. *Bibby J., Toutenburg H.* Prediction and improved estimation in linear models.— New York : Wiley, 1977.— 188 p.
3. *Заиграев А. Ю.* Об одной задаче планирования регрессионного эксперимента в гильбертовом пространстве // Применение аналитических методов в вероятностных задачах.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1986.— С. 56—61.
4. *Pazman A.* Hilbert-space methods in experimental design // Kybernetica.— 1978.— **14**, N 2.— P. 73—84.
5. *Pazman A.* Hilbert-space methods in estimation, prediction and in the design of experiments // Proc. Second Prague Symp. Asympt. Stat. — North-Holland, 1979. — P. 53 — 66.
6. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах.— М. : Наука, 1985.— 368 с.
7. *Го Х.-С.* Гауссовские меры в банаховых пространствах.— М. : Мир, 1979.— 176 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 27.02.86