УДК 517.946+517.43+519.55/56

Ю. А. Митропольский, А. К. Прикарпатский,
В. Гр. Самойленко

Алгебраическая схема дискретных аппроксимаций линейных и нелинейных динамических систем математической физики

Пусть $\mathcal{B} \subset C(\Lambda;\ \mathbb{R}^p)$, где $\Lambda \subset \mathbb{R}^q$ — замкнутая область в $\mathbb{R}^q$, $\mathbb{Z}_+ \ni p$ $q < \infty$,— действительное банаховое пространство. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{B}$ операции дифференцирования $\partial_{x_j} = \partial/\partial x_j$ и умножения на независимую переменную $x_k \in \mathbb{R}^1$, $j, k = \overline{1, q}$. Имеем

$$[x_j, x_k] = [x_j, \delta_{ks}] = [\delta_{ks}, \partial_{x_j}] = 0, \quad [\partial_{x_j}, x_k] = \delta_{kj}, \tag{1}$$

где $j, k, s = \overline{1, q}$ и $[\cdot,\cdot]$ — обыкновенный коммутатор операторов в $\mathcal{B}$. Отсюда следует, что множество операторов $\mathfrak{G} = \{x_j, \partial/\partial x_k, \delta_{sm}\colon j, k, m, s = \overline{1, q}\}$ образует замкнутую конечномерную алгебру Ли, причем, очевидно, $\mathfrak{G} = \bigoplus_{j=1}^{q} \mathfrak{G}_j$, где $\mathfrak{G}_j = \{x_j, \partial/\partial x_j, 1\}$, $j = \overline{1, q}$ — трехмерные алгебры Ли Гейзенберга — Вейля.

Если в пространстве $\mathcal{B}$ задана линейная динамическая система

$$u_t = \mathcal{K}(t; x, \partial)\, u + f(t; x), \tag{2}$$

где $x \in \Lambda$, $\mathcal{K}(\cdot;\ \cdot,\ \cdot) : \mathbb{R} \times \Lambda \to \mathrm{Mat}(\mathbb{R}^p)$ — непрерывное матричное отображение на $\mathbb{R} \times \Lambda$, полиномиальное по q-мерному аргументу $\partial = \partial_x$, $f : \mathbb{R} \times \Lambda \to \mathbb{R}^p$ — непрерывная вектор-функция, $t \in \mathbb{R}^1$ — эволюционная переменная, то в самом общем случае оператор $\mathcal{K}(t;\ x, \partial) \in \mathcal{U}(\mathfrak{G})$ — универсальной обертывающей алгебре алгебры Ли Гейзенберга — Вейля (1) [1]. Так как изучение орбит динамической системы (2) при $u|_{t=0} = \varphi \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B} = \{u \in C^{(\infty)}(\Lambda;\ \mathbb{R}^p) : u|_\Gamma = 0\}$, $\Gamma = \{x \in \Lambda : \psi(x) = 0\}$, $\psi : \Lambda \to \mathbb{R}^1$ — гладкое отображение, аналитическими методами в общем случае практически невозможно, то необходимо применять численные методы, используя специальные дискретные [2] аппроксимации изучаемых динамических систем. В данной работе рассматривается алгебраический подход к «точным» дискретным аппроксимациям заданной динамической системы, основанный на теории линейных представлений конечномерных алгебр Ли.

Пусть имеется последовательность банаховых пространств $\mathcal{B}_{(n)}$ конечной размерности ($\dim \mathcal{B}_{(n)} = |(n)|$, $(n) \in \mathbb{Z}_+^q$) вместе с ассоциированной последовательностью линейных гомоморфизмов $\Phi_{(n)} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_{(n)}$. Говорят, что банаховы пространства $\mathcal{B}_{(n)}$, $(n) \in \mathbb{Z}_+^q$, аппроксимируют пространство $\mathcal{B}$, если: 1) $\|\Phi_{(n)}\| < \mathrm{const}$ $\forall (n) \in \mathbb{Z}_+^q$; 2) $\lim\limits_{|(n)| \to \infty} \|\Phi_{(n)} u\|_{(n)} = \|u\|$ $\forall u \in \mathcal{B}$. Соответственно, будем говорить [3], что последовательность $\{u_{(n)} \in \mathcal{B}_{(n)} : (n) \in \mathbb{Z}_+^q\}$ сходится к $u \in \mathcal{B}$, если $\lim\limits_{|(n)| \to \infty} \|u_{(n)} - \Phi_{(n)} u\|_{(n)} = 0$, и последовательность операторов $\{\mathcal{K}_{(n)} : \mathcal{B}_{(n)} \to \mathcal{B}_{(n)} : (n) \in \mathbb{Z}_+^q\}$ сходится к оператору $\mathcal{K} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$, если $\lim\limits_{|(n)| \to \infty} \|\mathcal{K}_{(n)} \Phi_{(n)} u - \Phi_{(n)} \mathcal{K} u\|_{(n)} = 0$ для любого $u \in \mathcal{B}$.

Записав оператор $\mathcal{K}_{(n)}(t) : \mathcal{B}_{(n)} \to \mathcal{B}_{(n)}$ и вектор $f_{(n)}(t) \in \mathcal{B}_{(n)}$ для всех $t \in \mathbb{R}^1$, $(n) \in \mathbb{Z}_+^q$ с помощью следующих формул: $\mathcal{K}_{(n)}(t) = \Phi_{(n)} \mathcal{K}(t;\ x, \partial)\, \Phi_{(n)}^{-1}$, $f_{(n)}(t) = \Phi_{(n)} f(t;\ x)$, для динамической системы (1) получим последовательность дискретных систем вида

$$du_{(n)}/dt = \mathcal{K}_{(n)}(t)\, u_{(n)} + f_{(n)}(t), \quad u_{(n)} \in \mathcal{B}_{(n)}, \quad (n) \in \mathbb{Z}_+^q, \tag{3}$$

решение которых при каждом (n) можно найти, например, численными методами. Так как отображение $\Phi_{(n)}^{-1} : \mathcal{B}_{(n)} \to \mathcal{B}$ определено *неоднозначно*, то критерием его выбора является следующее необходимое условие: отображение $\Phi_{(n)}:\Phi_{(n)}^{-1}\mathcal{B}_{(n)}\to\mathcal{B}_{(n)}$ является квазигомоморфизмом алгебры Ли Гейзенберга—Вейля $\mathfrak{G}$ (1) и ее матричного представления в пространстве $\mathcal{B}_{(n)}$, т. е. если $x_j\to X_j^{(n)}$, $\partial/\partial x_j\to Z_j^{(n)}$, $j=\overline{1,q}$,— квазипредставление алгебры Ли Гейзенберга — Вейля $\mathfrak{G}$ в пространстве $\mathcal{B}_{(n)}$, $(n)\in\mathbb{Z}_q^+$, то необходимо, чтобы на $\mathcal{B}_{(n)}$ тождественно выполнялось равенство $[Z_j^{(n)}, X_k^{(n)}]\,|_{\Phi_{(n)}\mathcal{B}}=\mathbf{1}^{(n)}\ \delta_{jk}$ для всех $j,\ k=\overline{1,q}$, $(n)\in\mathbb{Z}_q^+$. В дальнейшем будем считать это условие выполненным.

Для практического использования изложенного выше алгебраического алгоритма построения дискретного приближения (3) для динамической системы (1) рассмотрим одно из конкретных квазипредставлений алгебры Ли Гейзенберга—Вейля $\mathfrak{G}$ [4, 5]:

$$x_j\to X_j^{(n_j)}=\|\,x_j^{(k)}\delta_{sk}^{(n_j)}\,\|,\quad k,\ s=1,n_j,\quad j=\overline{1,q},\quad n_j\in\mathbb{Z}_+,$$
$$\frac{\partial}{\partial x_j}\to Z_j^{(n_j)}=\left\|\,\delta_{ks}^{(n_j)}\sum_{m\neq k}^{n_j}(x_j^{(k)}-x_j^{(m)})^{-1}+(1-\delta_{ks}^{(n_j)})\,(x_j^{(k)}-x_j^{(s)})^{-1}\right\|, \tag{4}$$

где $x_j^{(k)}\neq x_j^{(s)}$ при $k\neq s$, причем $\mathcal{B}_{(n)}=\bigoplus_p\bigotimes_{j=1}^q\mathbb{R}^{n_j}$, $\dim\mathcal{B}_{(n)}=p\prod_{j=1}^q n_j$. В этом случае оператор $\mathcal{K}_{(n)}(t):\mathcal{B}_{(n)}\to\mathcal{B}_{(n)}$ как элемент универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли $\mathfrak{G}_{(n)}$ (4) представляется в виде тензорного произведения представлений операторов в исходном выражении для $\mathcal{K}$ (t; x, ∂) в пространстве $\mathcal{B}$. Соответственно, вектор $f_{(n)}(t)\in\mathcal{B}_{(n)}$ представим в виде $f_{(n)}(t)=(f_n^{(1)}(t), f_n^{(2)}(t),\ldots,f_{(n)}^{(p)}(t))^\tau$, ($\tau$ обозначает транспонирование), причем для всех $k=\overline{1,p}$

$$f_{(n)}^{(k)}(t)=f^{(k)}(t,X^{(n)})\,Q_{(n)}^{-1}\overline{u}_{(n)}\in\bigotimes_{j=1}^q\mathbb{R}^{n_j}, \tag{5}$$

где

$$Q_{(n)}=\bigotimes_{j=1}^q\left\|\,\delta_{ks}^{(n_j)}\prod_{m\neq k}^{n_j}(x_j^{(k)}-x_j^{(m)})\right\|,\quad \overline{u}_{(n)}=\bigotimes_{j=1}^q\overline{u}_j, \tag{6}$$

$\overline{u}_j=(1,1,\ldots,1)\in\mathbb{R}^{n_j}$ $\forall j=\overline{1,q}$. Убедимся еще, что выполнено условие согласованности, т. е. $[Z_j^{(n)}, X_k^{(n)}]\,|_{\Phi_{(n)}\mathcal{B}}=\mathbf{1}^{(n)}\delta_{jk}$ $\forall\,(n)\in\mathbb{Z}_+^q$. Из (4) имеем

$$[Z_j^{(n_j)}, X_j^{(n_j)}]=\|\,\delta_{ks}^{(n_j)}\,\|-\|\,J_{ks}^{(n_j)}\,\|, \tag{7}$$

где $J_{ks}^{(n_j)}=1$ $\forall k,\ s=\overline{1,n_j}$. Так как $J^{(n_j)}Z_j^{(n_j)}=0$ и $J^{(n_j)}(X_j^{(n)})^{m_j}Q_{n_j}^{-1}\overline{u}_j=0$ $\forall j=\overline{1,q}$, $m=\overline{0,n_j-2}$, то из (7) следует, что отображение (4) является согласованным квазигомоморфизмом алгебр Ли $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}_{(n)}$ при всех $(n)\in\mathbb{Z}_+^q$ и упомянутое выше при построении дискретной аппроксимации (3) необходимое условие выполнено.

В качестве примера рассмотрим линейную динамическую систему вида

$$u_t=u_{xx}+u_{yy}+t^2\sin(x+y), \tag{8}$$

где $u\in\mathcal{B}=\{u\in C^2([0,1];\mathbb{R}^1):u|_\Gamma=0,\ u|_{t=0}=\varphi(x,y)\}$, $\Gamma=\{x,y\in[0,1]:x^2+y^2=1\}$, причем выполнено условие $\varphi|_\Gamma=0$. Чтобы применить изложенную выше схему алгебраической дискретной аппроксимации, разобьем квадрат $[0,1]^2\subset\mathbb{R}^2$ сеткой $\{x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(n_x)}\}$ и $\{y^{(1)},y^{(2)},\ldots,y^{(n_y)}\}$, где $\mathbb{Z}_+\ni n_x,\ n_y<\infty$, на $n=(n_x+1)(n_y+1)$ квадратиков, и выполним замену переменных $u=(1-x^2-y^2)\,v$, которая автоматически обеспечивает выполнение граничного условия $u|_\Gamma=0$. Тогда при отображении $\Phi_{(n)}:\mathcal{B}\to\mathcal{B}_{(n)}$ динамической системе (8) ставится в соответствие ее следующая дискретная аппроксимация:

$$(\tilde{\mathbf{1}}-\tilde{X}^2-\tilde{Y}^2)\,v_{(n),t}=-4\tilde{\mathbf{1}}v_{(n)}-2\,(\tilde{X}\tilde{Z}_x+\tilde{Y}\tilde{Z}_y)\,v_{(n)}-(\tilde{\mathbf{1}}-\tilde{X}^2-\tilde{Y}^2)\,(\tilde{Z}_x^2+\tilde{Z}_y^2)\,v_{(n)}+$$
$$+t^2\sin(\tilde{X}+\tilde{Y})\,Q_{(n)}^{-1}\overline{u}_{(n)}, \tag{9}$$

где

$$\tilde{1} = 1^{(n_x)} \otimes 1^{(n_y)},\ \tilde{X} = X^{(n_x)} \otimes 1^{(n_y)},\ \tilde{Z}_x = Z_x^{(n_x)} \otimes 1^{(n_y)},\ \tilde{Z}_y = 1^{(n_x)} \otimes Z_y^{(n_y)},$$
$$\tilde{Y} = 1^{(n_x)} \otimes Y^{(n_y)}, \tag{10}$$

а матрицы $Q_{(n)}$, $X^{(n_x)}$, $Y^{(n_y)}$, $Z_x^{(n_x)}$, $Z_y^{(n_y)}$, согласно (4) имеют вид

$$X^{(n_x)} = \| \delta_{jk}^{(n_x)} x^{(j)} \|,\ 1^{(n_x)} = \| \delta_{jk}^{(n_x)} \|,\quad j, k = \overline{1, n_x},\ Y^{(n_y)} = \| \delta_{jk}^{(n_y)}\ y^{(j)} \|,$$
$$1^{(n_y)} = \| \delta_{jk}^{(n_y)} \|,\quad j, k = \overline{1, n_y}, \tag{11}$$

$$Z_x^{(n_x)} = \left\| \delta_{jk}^{(n_x)} \sum_{s \neq j}^{n_x} (x^{(j)} - x^{(s)})^{-1} + (1 - \delta_{jk}^{(n_x)}) (x^{(j)} - x^{(k)})^{-1} \right\|,$$

$$Z_y^{(n_y)} = \left\| \delta_{jk}^{(n_y)} \sum_{s \neq j}^{n_y} (y^{(j)} - y^{(s)})^{-1} + (1 - \delta_{jk}^{(n_y)}) (y^{(j)} - y^{(k)})^{-1} \right\|, \tag{12}$$

$$Q_{(n)} = \left\| \delta_{ks}^{(n_x)} \prod_{m \neq k}^{n_x} (x^{(k)} - x^{(m)}) \right\| \otimes \left\| \delta_{ks}^{(n_y)} \sum_{m \neq k}^{n_y} (y^{(k)} - y^{(m)}) \right\|.$$

Данные Коши для дискретной динамической системы (9) примут соответственно вид $v_{(n)}|_{t=0} = \varphi(\tilde{X}, \tilde{Y}) (\tilde{1} - \tilde{X}^2 - \tilde{Y}^2)^{-1} Q_{(n)}^{-1} \bar{u}_{(n)}$. Таким образом, разрешая дискретную динамическую систему (9) численными методами, находим приближенное решение системы (8): $u_{(n)}(t) = (\tilde{1} - \tilde{X}^2 - \tilde{Y}^2)\, v_{(n)}(t)$, $n \in \mathbb{Z}_+$. По набору $u_{(n)}(t) \in \mathscr{B}_{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, с помощью отображения $\Phi_{(n)}^{-1} : \mathscr{B}_{(n)} \to \mathscr{B}$ вычисляем значения решения $u_{(n)}(t; x, y) \in \mathscr{B}$ в узлах дискретной схемы:

$$u_{(n)}(t; x, y) = \langle q_{(n)}(x) \otimes q_{(n)}(y), u_{(n)}(t) \rangle,$$
$$q_{(n)}(x) = \Big(\prod_{k \neq j}^{n_x} (x - x_k) : j = \overline{1, n_x} \Big)^{\tau},\quad q_{(n)}(y) = \Big(\prod_{k \neq j}^{n_y} (y - y_k) : j = \overline{1, n_y} \Big)^{\tau}, \tag{13}$$

где $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает свертку векторов в $\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_y}$. При этом очевидно, что если «истинное» решение $u(t; x, y) \in \Phi_{(n)}^{-1} \mathscr{B}_{(n)} \subset \mathscr{B}$ при некотором наборе (n_x, n_y), то при любом выборе узлов разбиения квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ формула (13) будет давать точные значения решения $u(t; x, y) \in \mathscr{B}$ в этих узлах (по модулю точности конкретного численного метода решения задачи Коши для дискретной системы (9)). Это свойство является общим и весьма важным при построении приближенных решений произвольных динамических систем вида (2) в банаховом пространстве $\mathscr{B}$.

Остановимся теперь более детально на одном важном для практики аспекте предложенной алгебраической схемы дискретной аппроксимации динамических систем вида (2) — на выборе типа квазипредставлений базисной алгебры Ли Гейзенберга — Вейля. Для большей ясности, не снижая общности рассуждений, проведем рассуждения на конкретном примере (8). Пусть необходимо найти решение системы (8) в области $\mathscr{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$ (при тех же начальных и граничных условиях). Продолжая регулярно решение на единичный квадрат $[0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2$, а далее периодически по каждой переменной на всю плоскость $\mathbb{R}^2$, можно воспользоваться новым, отличным от (10)—(12), квазипредставлением алгебры Ли Гейзенберга — Вейля $\mathfrak{G}$ в пространстве $C^{(2)}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^1)$ периодических функций. Итак, пусть $C^{(2)}_{(l_x, l_y)}(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^1)$ — пространство дважды непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^2$, l_x-периодических по переменной x и l_y-периодических по переменной y. Соответствующее квазипредставление алгебры Ли Гейзенберга — Вейля в банаховом пространстве $\mathscr{B}_{(n)} \supset \Phi_{(n)} \mathscr{B}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, дается формулами (10), (11) и выражениями

$$Z_x^{(n_x)} = \left\| \frac{\pi}{l_x} \sum_{m \neq j}^{n_x} \delta_{jk}^{(n_x)} \operatorname{ctg} \frac{\pi (x^{(j)} - x^{(m)})}{l_x} + \frac{(1 - \delta_{jk}^{(n_x)}) \pi}{l_x \sin[\pi (x^{(j)} - x^{(k)})/l_x]} \right\|,$$

$$Z_y^{(n_y)} = \left\| \frac{\pi}{l_y} \sum_{m \neq j}^{n_y} \delta_{jk}^{(n_y)} \operatorname{ctg} \frac{\pi (y^{(j)} - y^{(m)})}{l_y} + \frac{(1 - \delta_{jk}^{(n_y)}) \pi}{l_y \sin [\pi (y^{(j)} - y^{(k)})/l_y]} \right\|,$$

$$Q_{(n)} = Q_{n_x} \otimes Q_{n_y}, \quad n = n_x n_y,$$

$$Q_{n_x} = \left\| \delta_{jk}^{(n_x)} \prod_{m \neq k}^{n_x} \frac{l_x}{\pi} \sin [\pi (x^{(j)} - x^{(k)})/l_x] \right\|, \quad j, \ k = \overline{1, n_x},$$

$$Q_{n_y} = \left\| \delta_{jk}^{(n_y)} \prod_{m \neq k}^{n_y} \frac{l_y}{\pi} \sin [\pi (y^{(j)} - y^{(k)})/l_y] \right\|, \quad j, k = \overline{1, n_y}. \tag{14}$$

Разрешая теперь дискретную динамическую систему (9)—(11), (14) численными методами, находим решение $u_{(n)}(t) \in \mathcal{B}_{(n)}$, по которому с помощью обратного отображения $\Phi_{(n)}^{-1} : \mathcal{B}_{(n)} \to \mathcal{B}$, согласованного с представлением в $\mathcal{B}_{(n)}$ алгебры Ли $\mathfrak{G}$ Гейзенберга — Вейля, находим точные значения решения в узлах дискретной схемы:

$$u_{(n)}(t; x, y) = \langle q_{n_x}(x) \otimes q_{n_y}(y), \ u_{(n)}(t) \rangle, \tag{15}$$

где

$$q_{n_x}^{(x)} = \left(\prod_{j \neq m} \frac{\pi}{l_x} \sin \frac{\pi (x - x^{(m)})}{l_x} : j = \overline{1, n_x} \right)^{\tau} \in \mathbb{R}^{n_x},$$

$$q_{n_y}(y) = \left(\prod_{j \neq m}^{n_y} \frac{\pi}{l_y} \sin \frac{\pi (y - y^{(m)})}{l_y} : j = \overline{1, n_y} \right)^{\tau} \in \mathbb{R}^{n_y},$$

причем отсюда, очевидно, при $l_x, l_y \to \infty$ немедленно следует (13). Отметим также, что представление (14) при $l_x, \ l_y \to \infty$ переходит в (4).

Важным фактом, следующим из приведенных общих соотношений, является высокая скорость ν сходимости при $n \to \infty$ решений дискретных приближений $u_{(n)}(t) \in \mathcal{B}_{(n)}$ к решению $u(t; x, y) \in \mathcal{B}$ исходной динамической системы: $\nu \sim (c/n)^{n-2}$, где c — некоторая положительная постоянная.

Перейдем теперь к анализу других аспектов общей алгебраической схемы дискретного приближения линейных динамических систем вида (2). Одно из основных наших исходных положений состояло в том, что линейный дифференциальный оператор $\mathcal{K}(t;, x, \partial): \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ принадлежит в общем случае универсальной обертывающей алгебре $\mathcal{U}(\mathfrak{G})$ базисной (конечномерной) алгебры Ли $\mathfrak{G}$ Гейзенберга—Вейля. Очевидно, что оператор $\mathcal{K}(t; x, \partial)$ может принадлежать и более «грубой» универсальной обертывающей алгебре $\mathcal{U}(\mathfrak{G}_{\mathcal{K}})$ некоторой специальной конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{G}_{\mathcal{K}} \in \mathcal{U}(\mathfrak{G}_{\mathcal{K}})$. Учитывая важное значение алгебры Ли токов [6] в теории вполне интегрируемых динамических систем [7], естественно рассмотреть также алгебраическую схему дикретного приближения, основанную на алгебре Ли токов $\mathfrak{G}_{\mathcal{K}}$, для которой $\mathcal{K}(t; x, \partial) \in \mathcal{U}(\mathfrak{G}_{\mathcal{K}})$. Изучая конкретные квазипредставления базисной алгебры Ли токов в банаховых пространствах $\mathcal{B}_{(n)}$, $(n) \in \mathbb{Z}_+^q$, аппроксимирующих (согласованным с представлением $\mathfrak{G}_{\mathcal{K}}$ образом) исходное банахово пространство $\mathcal{B}$, можно аналогично описанному выше построить новую схему дискретного приближения для динамической системы (2).

В качестве примера рассмотрим линейную динамическую систему вида

$$u_t = u_{xx} - x^2 u, \tag{16}$$

где $u \in \mathcal{B} = C^{(2)}(\mathbb{R}^1; \mathbb{R}^1) \cap L_2(\mathbb{R}^1; \mathbb{R}^1)$, $u|_{t=0} = \varphi(x) \in \mathcal{B}$. Тогда, записывая уравнение (16) в виде

$$u_t = -(a^+ a + 1) u, \tag{17}$$

где $a^+ = -\partial + x$, $a = \partial + x$, и учитывая соотношения

$$[a, a] = [a^+, a^+] = 0, \quad [a, a^+] = 2, \tag{18}$$

находим, что в уравнении (16) оператор $\mathscr{K} = (\partial^2 - x^2) \in \mathscr{U}(\mathfrak{G}_{\mathscr{K}})$, где $\mathfrak{G}_{\mathscr{K}}$ — алгебра Ли (18) Гейзенберга — Вейля . Действительно, пусть $\pi : a^+ \to \xi$, $\pi : a \to 2\partial_\xi$, где $\xi \in \mathbb{R}^1$ — некоторая переменная. Отображение π индуцирует отображение банахового пространства $\mathscr{B}$ в пространство $\tilde{\mathscr{B}}$, которому принадлежит решение уравнения (17). Каждый элемент $\tilde{u} \in \tilde{\mathscr{B}}$ имеет ξ-представление [6] в виде

$$\tilde{u} = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} c_n \xi^n w, \tag{19}$$

где $c_n \in \mathbb{R}^1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, и $\omega \in \tilde{\mathscr{B}}$ —решение уравнения $aw = 0$. Переходя в (19) к исходному x-представлению, получаем

$$u = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} c_n (x - \partial/\partial x)^n \exp(-x^2/2) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} c_n H_n(x) \exp(-x^2/2), \tag{20}$$

где $H_n(x)$, $n \in \mathbb{Z}_+$,—полиномы Эрмита. Подставляя (20) в (16) и учитывая линейную независимость полиномов Эрмита, находим коэффициенты $c_n = c_n(t)$, $n \in \mathbb{Z}_+$: $c_n(t) = \bar{c}_n \exp \times \times [-(n+1)t]$, где числа $\bar{c}_n \in \mathbb{R}^1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, определяются по данным Коши $\varphi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}_+} \bar{c}_n H_n(x) \exp(-x^2/2)$.

Используя свойство ортогональности полиномов Эрмита, окончательно получаем

$$\bar{c}_n = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) H_n(x) \exp(-x^2/2)\, dx. \tag{21}$$

Тем самым формулы (20), (21) дают решение задачи приближенного построения решения уравнения (16).

Приведенные выше вычисления полностью алгебраизируются следующим стандартным образом: поставив в соответствие оператору умножения на независимую переменную $x \in \mathbb{R}^1$ матрицу $X^{(N)} : \mathscr{B}_{(N)} \to \mathscr{B}_{(N)}$, где $X^{(N)} = \left\| \frac{n}{2} \delta_{m,n-1} + \frac{1}{2} \delta_{m,n+1} \right\|$, $m, n = \overline{0, N}$, $\mathbb{Z}_+ \ni N < \infty$, а операции дифференцирования $\partial/\partial x$ — матрицу $Z_x^{(N)} : \mathscr{B}_{(N)} \to \mathscr{B}_{(N)}$, где $Z_x^{(N)} = \left\| \frac{n}{2} \delta_{m,n-1} - \frac{1}{2} \delta_{m,n+1} \right\|$, $m, n = \overline{0, N}$, получим в конечномерном пространстве $\mathscr{B}_{(N)}$, аппроксимирующем $\mathscr{B}$, согласованное квазипредставление исходной алгебры Ли $\mathfrak{G}$ Гейзенберга—Вейля. При этом уравнение (17) в пространстве $\mathscr{B}_{(N)}$ примет вид

$$\frac{d}{dt} u_{(N)} = \mathscr{K}_{(N)} u_{(N)}, \tag{22}$$

где $\mathscr{K}_{(N)} = -\| m\delta_{m,n} + \delta_{m,n} \|$, $m, n = \overline{1, N}$, — представление оператора $\mathscr{K} : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ в пространстве $\mathscr{B}_{(N)}$, причем $\dim \mathscr{B}_{(N)} = N + 1$. Данные Коши для уравнения (22), заданного в $\mathscr{B}_{(N)}$, вычисляются по формуле $\varphi_{(N)} = \Phi_{(N)} \times \times \varphi(x) = \varphi(X^{(N)}) Q_{(N)} \bar{u}_{(N)}$. Тем самым задача алгебраической дискретной аппроксимации для динамической системы (1) решена полностью. Переход от дискретного решения $u_{(N)} \in \mathscr{B}_{(N)}$ к решению $\Phi_{(N)}^{-1} u_{(N)} \in \mathscr{B}$ аналогичен описанному выше.

Предложенная в данной работе общая алгебраическая схема дискретной аппроксимации для линейных динамических систем с помощью небольшой модификации легко переносится также и на нелинейные системы. С этой целью рассмотрим в качестве примера нелинейной динамической системы уравнение Кортевега—де Фриза:

$$u_t = u_{xxx} + 6\ u u_x, \tag{23}$$

где $u \in C^{(3)}([0,\ 1];\ \mathbb{R}^1)$, $u(0) = u(1) = 0$, $u/_{t=0} = \varphi(x)$, причем, очевидно, выполнено $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Выполним в (23) «граничное» преобразование $u = x(1-x)v$, где $v \in C^{(3)}([0,\ 1];\ \mathbb{R}^1)$, $|v(0)| < \infty$, $|v(1)| < \infty$. Тогда получим $v \in \mathcal{B}$,

$$v_t = v_{xxx} + \frac{3(1-2x)}{x(1-x)} v_{xx} - \frac{6v_x}{x(1-x)} + 6\alpha(t,\ x)v, \tag{24}$$

где $\alpha(t;\ x) = (1-2x)v + x(1-x)v_x \in \mathcal{B}$. Переходя к дискретной аппроксимации $\Phi_{(n)} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}_{(n)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, находим

$$\frac{d}{dt} v_{(n)} = [Z_x^3 + 3(1-2X)[X(1-X)]^{-1} Z_x^2 + \alpha(t;\ X) - 6[X(1-X)]^{-1} Z_x] v_{(n)}, \tag{25}$$

где $v_{(n)} \in \mathcal{B}_{(n)}$. В предположении, что функция $\alpha(t;\ x) \in \mathcal{B}$ известна, из дискретной динамической системы (25) определяем $v_{(n)}(t;\ x) \in \mathcal{B}_{(n)}$, причем $v_{(n)}(0;\ x) = [X(1-X)]^{-1} \varphi(X) Q_{(n)}^{-1} \bar{u}_{(u)}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Тем самым для функции $\alpha(t;\ x) \in \mathcal{B}$ согласно (15) находим ее «дискретное» представление:

$$\alpha(t;\ x) = (1-2x)\langle q_n(x),\ v_{(n)}(t)\rangle + x(1-x)\frac{d}{dx}\langle q_n(x),\ v_{(n)}(t)\rangle, \tag{26}$$

откуда матрица $\alpha(t;\ X) : \mathcal{B}_{(n)} \to \mathcal{B}_{(n)}$ в (25) имеет вид

$$\alpha(t;\ X) = \langle q_n(X),\ v_{(n)}(t)\rangle(1-2X) + X(1-X) Z_x \langle q_n(X),\ v_{(n)}(t)\rangle. \tag{27}$$

Подставляя матрицу (27) в соотношение (25), получаем нелинейную самосогласованную дискретную аппроксимацию исходной нелинейной динамической системы (24). Решая (25) численными методами, с помощью обратного отображения $\Phi_{(n)}^{-1} : \mathcal{B}_{(n)} \to \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, вида (15) получаем приближенное решение уравнения Кортевега — де Фриза. В заключение отметим, что изложенная «нелинейная» схема алгебраической дискретной аппроксимации может быть развита для широкого класса нелинейных динамических систем $u_t = \mathcal{K}(t;\ x,\ u)$, оператор $\mathcal{K}$ которых обладает в пространстве $\mathcal{B}$ регулярной производной Фреше.

1. *Глимм Дж., Джаффе А.* Математические методы квантовой физики.— М. : Мир, 1984.— 445 с.
2. *Трибель X.* Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы.— М. : Мир, 1980.— 664 с.
3. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач.— М. : Мир, 1972.— 418 с.
4. *Calogero* F. Isospectral matrices and classical polynomials // Linear Algebra and Its Appl.— 1982.— **44**, N 1.— P. 55—60.
5. *Calogero F.* Integrable dynamical systems and related mathematical result // Lect. Notes Phys.— 1983.— N 189.— P. 46—109.
6. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К.* Квантовый метод производящий функционалов Боголюбова в статистической физике: алгебра Ли токов, ее представления и функциональные уравнения // Физика ЭЧАЯ.— 1986.— **17**, № 4.— С. 789—827.
7. *Интегрируемые* динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты / Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К Прикарпатский, В. Г. Самойленко.— Киев : Наук. думка, 1987.— 297 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 18.03.88