УДК 517.949.22

С. Б. Норкин

Сингулярная одноточечная задача для нелинейной системы с запаздыванием

Изучается существование и асимптотика при $t \to +0$ решений нелинейной системы с запаздыванием

$$tX'(t) = A(t)X(\varphi(t)) + f(t, X(t), X(\psi(t))), \quad 0 < t < b \leqslant +\infty, \tag{1}$$

где:

a) $(n \times n)$-матрица $A(t)$ непрерывна на $(0, b)$ и представима в виде $A(t) = A + \alpha(t)$, $\|\alpha(t)\| = O(t^{\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, $t \to +0$;

b) вектор-функция $f(t, X, Y)$ непрерывна на $(0, b) \times R^n \times R^n$;

c) отклонения $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывны на $(0, b)$ и $0 < \varphi(t) \leqslant t$, $0 < \psi(t) \leqslant t$.

Пусть далее существует точка $c \in (0, b)$ такая, что:

d) $f(t, 0, 0) \equiv 0$, $0 < t < c$;

e) $\|f(t, X_1, Y_1) - f(t, X_2, Y_2)\| \leqslant q(t)\|X_1 - X_2\|$, $0 < t < c$, где функция $q(t)$ непрерывна на $0 < t < c$ и удовлетворяет условию $q(t) = O(t^{\varepsilon})$, $\varepsilon > 0$, $t \to +0$;

f) $\varphi(t) = \lambda t$, $0 < \lambda < 1$, $0 < t < c$;

g) при $t \geqslant c$ матрица $A(t)$, вектор-функция $f(t, X, Y)$ и отклонения $\varphi(t)$, $\psi(t)$ допускают существование, единственность и продолжимость на $c \leqslant t < b$ решения основной начальной задачи для уравнения (1) с произвольной непрерывной на $(0, c]$ начальной вектор-функцией.

Отметим сразу, что условие g) влечет за собой возможность доказывать существование решений уравнения (1) лишь в достаточно малой правой полуокрестности точки $t = 0$.

Сделаем замену переменной $t = e^x$ и положим $X(t) = X(e^x) = Y(x)$, $\tilde{\varphi}(x) = \ln\varphi(e^x)$, $\tilde{\psi}(x) = \ln\psi(e^x)$, $A(t) = A + \alpha(t) = A + \alpha(e^x) = A + \beta(x) = B(x)$, $f(t, X(t), X(\psi(t))) = f(e^x, X(e^x), X(e^{\tilde{\psi}(x)})) = f_*(x, Y(x), Y(\tilde{\psi}(x)))$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$Y'(x) = B(x)Y(\tilde{\varphi}(x)) + f_*(x, Y(x), Y(\tilde{\psi}(x))), \quad -\infty < x < \ln b \leqslant +\infty, \tag{2}$$

а задача о существовании на $(0, b)$ решений уравнения (1) сводится к задаче о существовании двусторонних решений уравнения (2).

Конечный результат работы о существовании и структуре бесконечномерного многообразия двусторонних решений уравнения вида (2) анонсирован в [1]. Линейное уравнение ($f \equiv 0$) изучалось в работах [2—5].

1. Линейная система с постоянной матрицей. Рассмотрим линейную систему

$$tZ'(t) = AZ(\lambda t), \quad 0 < t < +\infty, \tag{3}$$

где постоянная $(n \times n)$-матрица A и число λ, $0 < \lambda < 1$, фигурируют соответственно в условиях a) и f). Решения уравнения (3) будем искать в виде

$$Z(t) = t^{\rho}P_m(\ln t), \tag{4}$$

где ρ — постоянная, вообще говоря, комплексная, а

$$P_m(\ln t) = \frac{\ln^m t}{m!}V_0 + \frac{\ln^{m-1} t}{(m-1)!}V_1 + \ldots + V_m \tag{5}$$

— многочлен с векторными коэффициентами. Подставляя (4) в (3), после сокращения на t^{ρ} получаем

$$\rho P_m(\ln t) + t\frac{d}{dt}P_m(\ln t) = \lambda^{\rho}AP_m(\ln\lambda t). \tag{6}$$

Для $m = 0$ из (6), (5) будем иметь

$$(\lambda^{\rho}A - \rho E)V_0 = 0. \tag{7}$$

Для $m > 0$ получим рекуррентные соотношения

$$\rho P_m(\ln t) + P_{m-1}(\ln t) = \lambda^\rho A P_m(\ln \lambda t), \tag{8}$$

откуда в силу (5) и (7) последовательно для $m = 1, 2, \ldots$

$$(\lambda^\rho A - \rho E) V_m = (1 - \rho \ln \lambda) V_{m-1} - \lambda^\rho A \left(\frac{\ln^2 \lambda}{2!} V_{m-2} + \ldots + \frac{\ln^m \lambda}{m!} V_0 \right), \tag{9}$$

где $V_k = 0$ для $k < 0$, т. е. для $m = 1$ второе слагаемое в (9) исчезает.

Пусть матрица $\tilde{A}$, подобная A, имеет каноническую жорданову форму, содержащую $p_r \times p_r$ клетки, $r = 1, 2, \ldots, l$; $p_1 + p_2 + \ldots + p_l = n$, соответствующие собственным значениям s_r матрицы $\tilde{A}$, а значит и A. В силу (7) в (4) число ρ должно быть корнем $\rho_{r\nu}$ характеристического уравнения

$$\rho = s_r \lambda^\rho, \tag{10}$$

а V_0 — собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению s_r.

Таким образом, если $\rho \ln \lambda \neq 1$, получаем систему решений уравнения (3)

$$Z_{rm\nu}(t) = t^{\rho_{r\nu}} P_{rm\nu}(\ln t), \tag{11}$$

где $r = 1, 2, \ldots, l$; $m = 0, 1, \ldots, p_r - 1$; $\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, если $s_r \neq 0$ (для $s_r = 0$ уравнение (10) имеет единственный корень $\rho_{r0} = 0$). Число $\rho = 1/\ln \lambda$ может быть корнем характеристического уравнения (10) лишь в случае, когда $s_r = 1/e \ln \lambda$. При этом $\rho = 1/\ln \lambda$ является двукратным корнем характеристического уравнения ($\rho_{r0} = \rho_{r1} = 1/\ln \lambda$) и ему соответствуют две цепочки решений уравнения (3):

$$Z_{rm0}(t) = t^{1/\ln \lambda} P_{rm0}(\ln t), \quad m = 0, 1, \ldots, p_r - 1, \tag{12}$$

$$Z_{rm1}(t) = t^{1/\ln \lambda} P_{rm1}(\ln t), \quad m = 0, 1, \ldots, p_r - 1. \tag{13}$$

В рассматриваемом случае в силу (9) векторы V_0 и V_1 линейно зависимы (положим $V_1 = V_0$), а клетке $p_r \times p_r$ матрицы $\tilde{A}$ соответствует $p_r - 1$ присоединенных векторов. Поэтому уравнение (9) для определения векторов V_m имеет решение для $m = 1, 2, \ldots, p_r$ и можно положить

$$P_{rm1}(\ln t) = P_{r(m+1)0}(\ln t) - P_{rm0}(\ln t), \quad m = 0, 1, \ldots, p_r - 1. \tag{14}$$

Решения вида (11) ((12), (13)) принято называть основными решениями уравнения (3).

Из теоремы 1.1, доказанной в [5], следует такое утверждение.

Теорема 1. *Всякое решение со степенным ростом при $t \to +0$ уравнения (3), определенное в правой полуокрестности точки $t = 0$, кроме, может быть, самой точки $t = 0$, представимо в виде линейной комбинации конечного числа основных решений этого уравнения.*

Пусть теперь $Z(t)$ — решение уравнения (3), определенное в правой полуокрестности точки $t = 0$, и $Z_{rm\nu}(t)$ — основное решение с максимальным ростом при $t \to +0$, фигурирующее в указанном в теореме 1 представлении для $Z(t)$. Тогда

$$Z(t) = t^{\rho_{r\nu}} \left(M_m(\ln t) + \int_0^t v(\xi)\, d\xi \right), \tag{15}$$

где $M_m(\ln t)$— многочлен степени m относительно $\ln t$ с векторными коэффициентами, а $v(t) \in L_{(n,1)}(0, c)$ — вектор-функция с компонентами, принадлежащими $L(0, c)$.

Будем говорить, что вектор-функция $X(t)$, определенная на $0 < t < b$, принадлежит классу A, если она представима в виде

$$X(t) = t^\rho \left(M_k(\ln t) + \int_0^t w(\xi)\, d\xi \right),$$

где ρ — постоянная, $M_k(\ln t)$ — многочлен степени k относительно $\ln t$ с векторными коэффициентами, $w(t) \in L_{(n,1)}(0, c)$.

Из (15) следует, что любое определенное в правой полуокрестности точки $t = 0$ решение со степенным ростом при $t \to +0$ уравнения (3) принадлежит классу A.

2. Решения основного уравнения в классе A. Необходимые условия. Будем искать решения уравнения (1) на интервале $(0, c)$ в виде

$$X(t) = t^\rho \left(M_m(\ln t) + \int_0^t v(\xi)\, d\xi \right), \tag{16}$$

где ρ — подлежащая определению постоянная, многочлен с подлежащими определению векторными коэффициентами

$$M_m(\ln t) = \frac{\ln^m t}{m!} W_0 + \frac{\ln^{m-1} t}{(m-1)!} W_1 + \ldots + W_m, \tag{17}$$

$v(t) \in L_{(n,1)}(0, c)$.

Подставив (16) в (1) и поделив обе части на t^ρ, получим

$$\rho \left(M_m(\ln t) + \int_0^t v(\xi)\, d\xi \right) + t \frac{d}{dt} M_m(\ln t) + tv(t) =$$

$$= \lambda^\rho (A + \alpha(t)) \left(M_m(\ln \lambda t) + \int_0^{\lambda t} v(\xi)\, d\xi \right) +$$

$$+ t^{-\rho} f\left(t,\, t^\rho \left(M_m(\ln t) + \int_0^t v(\xi)\, d\xi\right),\quad [\psi(t)]^\rho \left(M_m(\ln \psi(t)) + \int_0^{\psi(t)} v(\xi)\, d\xi \right)\right). \tag{18}$$

Из условий d) и e) следует

$$0 \leqslant |t^{-\rho}| \left\| f\left(t, t^\rho \left(M_m(\ln t) + \int_0^t v(\xi)\, d\xi\right),\ [\psi(t)]^\rho \left(M_m(\ln \psi(t)) + \int_0^{\psi(t)} v(\xi)\, d\xi\right)\right) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant |t^{-\rho} q(t)\, t^\rho| \left\| M_m(\ln t) + \int_0^t v(\xi)\, d\xi \right\| \to 0 \text{ при } t \to +0.$$

Здесь и в дальнейшем используются обозначения $o(\cdot)$ и $O(\cdot)$ для векторов и матриц, элементы которых при $t \to +0$ обладают соответствующим свойством. Таким образом, последнее слагаемое в правой части (18) есть $o(1)$, а также

$$\int_0^t v(\xi)\, d\xi = o(1), \quad \int_0^{\lambda t} v(\xi)\, d\xi = o(1), \quad \alpha(t) = O(t^\varepsilon).$$

Тогда при $m = 0$ равенство (18) принимает вид

$$\rho(W_0 + o(1)) + tv(t) = \lambda^\rho (A + O(t^\varepsilon))(W_0 + o(1)) + o(1),$$

откуда, переходя к пределу при $t \to +0$, получаем

$$\lim_{t \to +0} tv(t) = (\lambda^\rho A - \rho E)\, W_0. \tag{19}$$

В силу (19) вектор-функция $tv(t)$ имеет предел при $t \to +0$. Однако, если этот предел отличен от 0, то $v(t) \notin L_{(n,1)}(0, c)$. Действительно, в этом случае можно указать компоненту $tv_k(t)$ вектор-функции $tv(t)$, для которой $\lim_{t \to +0} t|v_k(t)| = \alpha > 0$. Но тогда существует $\delta \in (0, c)$ такое, что $t|v_k(t)| >$ $> \alpha/2$, $0 < t < \delta$, откуда $\int_0^\delta |v_k(t)|\, dt > \frac{\alpha}{2} \int_0^\delta \frac{dt}{t} = +\infty$. Таким образом, из (19) следует

$$(\lambda^{\rho} A - \rho E) W_0 = 0. \tag{20}$$

Но (20) совпадает с (7). Следовательно, ρ должно быть корнем характеристического уравнения (9), связанного с собственным значением s_r (индекс r означает, что это собственное значение принадлежит $p_r \times p_r$ — жордановой клетке матрицы $\tilde{A}$, подобной A), а W_0 — собственный вектор матрицы A, соответствующий этому собственному значению. Из (20) и (7) следует теперь, что можно положить

$$W_0 = V_0. \tag{21}$$

Для $m > 0$ согласно (18) должно быть

$$\rho (M_m (\ln t) + o(1)) + M_{m-1} (\ln t) = \lambda^{\rho} (A + O(t^{\varepsilon})) (M_m (\ln \lambda t) + o(1)) + o(1). \tag{22}$$

Но из (17) и (20) для $m = 1, 2, \dots$ последовательно следует

$$\rho M_m (\ln t) + M_{m-1} (\ln t) - \lambda^{\rho} A M_m (\ln \lambda t) \equiv (\lambda^{\rho} A - \rho E) W_m -$$
$$- (1 - \rho \ln \lambda) W_{m-1} + \lambda^{\rho} A \left(\frac{\ln^2 \lambda}{2!} W_{m-2} + \dots + \frac{\ln^m \lambda}{m!} W_0 \right). \tag{23}$$

Переходя теперь в (22) к пределу при $t \to +0$, в силу (23) получим

$$(\lambda^{\rho} A - \rho E) W_m = (1 - \rho \ln \lambda) W_{m-1} - \lambda^{\rho} A \left(\frac{\ln^2 \lambda}{2!} W_{m-2} + \dots + \frac{\ln^m \lambda}{m!} W_0 \right). \tag{24}$$

Для $\rho = \rho_{r\nu}$ в силу (21) и (9) из (24) следует

$$W_m = V_m, \quad m = 1, 2, \dots, p_r - 1, \tag{25}$$

а если $s_r = 1/e \ln \lambda$ и $\rho = 1/\ln \lambda$, то и

$$W_{p_r} = V_{p_r}. \tag{25'}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Порядок роста при $t \to +0$ решений уравнения* (1), *принадлежащих классу A, не может отличаться от порядка роста при $t \to +0$ решений укороченного уравнения* (3).

3. Решения основного уравнения в классе A. Достаточные условия. Пусть $\rho_{r\nu}$ — корень характеристического уравнения (9), число $m \in 0, 1, \dots, p_r - 1$ (или если $\rho = 1/\ln \lambda$, $m = 0, 1, \dots, p_r$) и $P_m (\ln \lambda)$ — многочлен степени m относительно $\ln t$ вида (5) с векторными коэффициентами, удовлетворяющими (7) и (9) (для $m = p_r$ — — (15)). Тогда, как показано при доказательстве теоремы 2, принадлежащее классу A решение уравнения (1) следует искать в виде

$$X(t) = t^{\rho_{r\nu}} \left(P_m (\ln t) + \int_0^t v(\xi) \, d\xi \right), \quad 0 < t < c, \tag{26}$$

где вектор-функция $v(t) \in L_{(n,1)}(0, c)$ подлежит определению.

Подставив (26) в уравнение (1) и поделив обе части на $t^{\rho_{r\nu}}$, в силу (20) — (25) ((25')) получим уравнение для определения $v(t)$:

$$tv(t) = \lambda^{\rho} \alpha(t) P_m (\ln \lambda t) + F \left(t, \int_0^t v(\xi) \, d\xi \right) + \lambda^{\rho} \alpha(t) \int_0^{\lambda t} v(\xi) \, d\xi +$$
$$+ \lambda^{\rho} \left[(A - \rho \lambda^{-\rho} E) \int_0^{\lambda t} v(\xi) \, d\xi - \rho \lambda^{-\rho} \int_{\lambda t}^{t} v(\xi) \, d\xi \right]. \tag{27}$$

Для упрощения записи в (27) опущены индексы у ρ и обозначено

$$F\left(t, \int_0^t v(\xi)\,d\xi\right) =$$

$$= t^{-\rho} f\left(t, t^{\rho}\left(P_m(\ln t) + \int_0^t v(\xi)\,d\xi\right), [\psi(t)]^{\rho}\left(P_m(\ln \psi(t)) + \int_0^{\psi(t)} v(\xi)\,d\xi\right)\right). \quad (28)$$

Если в условии а) предельная матрица $A \neq 0$, то (27) — нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра с сингулярным ядром в главной линейной части.

Умножим обе части уравнения (27) на $\lambda^{-\rho} t^{\delta}$, δ — действительный параметр, и сделаем замену переменных

$$t = ce^{-\nu}, \quad \xi = ce^{-\theta}, \quad (29)$$

положив при этом

$$t^{1+\delta} v(t) = (ce^{-\nu})^{1+\delta}\, v(ce^{-\nu}) = w(\nu). \quad (30)$$

Тогда уравнение (27) примет вид

$$\lambda^{-\rho} w(\nu) = (ce^{-\nu})^{\delta} \alpha(ce^{-\nu}) P_m(\ln \lambda c - \nu) + \lambda^{-\rho} (ce^{-\nu})^{\delta} F\left(ce^{-\nu}, \int_{\nu}^{+\infty} w(\theta)(ce^{-\theta})^{-\delta}\,d\theta\right) +$$

$$+ \alpha(ce^{-\nu}) \int_{\nu+\gamma}^{+\infty} e^{-\delta(\nu-\theta)} w(\theta)\,d\theta + (A - \rho\lambda^{-\rho} E) \int_{\nu+\gamma}^{+\infty} e^{-\delta(\nu-\theta)} w(\theta)\,d\theta -$$

$$- \rho\lambda^{-\rho} \int_{\nu}^{\nu+\gamma} e^{-\delta(\nu-\theta)} w(\theta)\,d\theta, \quad (31)$$

где $\gamma = -\ln \lambda$.

Обозначим

$$f_*(\nu) = (ce^{-\nu})^{\delta} \alpha(ce^{-\nu}) P_m(\ln \lambda c - \nu), \quad (32)$$

$$\Phi(\nu, w(\nu)) = \lambda^{-\rho} (ce^{-\nu})^{\delta} F\left(ce^{-\nu}, \int_{\nu}^{+\infty} w(\theta)(ce^{-\theta})^{-\delta}\,d\theta\right), \quad (33)$$

$$k_0(\nu - \theta) = \begin{cases} 0, & 0 < \theta \leqslant \nu, \\ -\rho\lambda^{-\rho} e^{-\delta(\nu-\theta)} E & \nu < \theta \leqslant \nu + \gamma, \\ e^{-\delta(\nu-\theta)} (A - \rho\lambda^{-\rho} E), & \nu + \gamma < \theta < +\infty, \end{cases} \quad (34)$$

$$k_1(\nu, \theta) = \begin{cases} 0, & 0 < \theta \leqslant \nu + \gamma, \\ c^{-\varepsilon} e^{-\delta(\nu-\theta)} \alpha(ce^{-\nu}), & \nu + \gamma < \theta < +\infty, \end{cases} \quad (35)$$

где $\varepsilon > 0$ — постоянная, фигурирующая в условии а). Тогда уравнение (31) примет вид

$$\lambda^{-\rho} w(\nu) = f_*(\nu) + \int_0^{+\infty} k_0(\nu - \theta) w(\theta)\,d\theta + c^{\varepsilon} \int_0^{+\infty} k_1(\nu, \theta) w(\theta)\,d\theta + \Phi(\nu, w(\nu)). \quad (36)$$

Рассмотрим пространство C_0^+ вектор-функций $f \in R^n$ с непрерывными на $[0, +\infty)$ компонентами $x_k(\nu)$ такими, что $\lim\limits_{\nu \to +\infty} x_k(\nu) = 0$.

Пусть

$$\delta \in (-\varepsilon/2, -\varepsilon/4), \quad (37)$$

где $\varepsilon > 0$ — константа из условия а). В силу (29) и условия а) $\|\alpha(ce^{-\nu})\| = O(c^{\varepsilon} e^{-\varepsilon\nu})$ при $\nu \to +\infty$, откуда

$$0 \leqslant \lim_{\nu \to +\infty} \|f_*(\nu)\| = c^{\varepsilon/2} \lim_{\nu \to +\infty} e^{-\varepsilon\nu/2} \|P_m(\ln \lambda c - \nu)\| = 0$$

и, следовательно, $f_*(\nu) \in C_0^+$.

Рассмотрим предварительно уравнение

$$\lambda^{-\rho}\omega(\nu) = f(\nu) + \int\limits_0^{+\infty} k_0(\nu-\theta)\,\omega(\theta)\,d\theta, \quad 0<\nu<+\infty, \tag{38}$$

с ядром (34) — уравнение типа Винера—Хопфа в векторной форме. С помощью методов, развитых в [6], в работе [2] показано, что можно указать удовлетворяющее (37) значение δ такое, что уравнение (38) будет разрешимо в C_0^+, и притом однозначно, для любой $f(\nu)\in C_0^+$.

Обозначим через K_0 и K_1 определенные на C_0^+ интегральные операторы с ядрами (34) и (35). Тогда уравнение (36) примет вид

$$(\lambda^\rho I - K_0)\,w = f_* + c^\varepsilon K_1 w + \Phi(\nu, w). \tag{36'}$$

В силу условия a) и (29)

$$L_c = \sup_{0<\nu<\infty} c^{-\varepsilon}\,\|\alpha(ce^{-\nu})\| = \sup_{0<\nu<\infty} e^{-\varepsilon\nu}\left\|\frac{\alpha(ce^{-\nu})}{(ce^{-\nu})^\varepsilon}\right\| < L < +\infty$$

и равномерно по c

$$\|K_1\|_{C_0^+} = \sup_{0<\nu<\infty}\int\limits_0^\infty \|k_1(\nu,\theta)\|\,d\theta \leqslant L\sup_{0<\nu<\infty}\int\limits_{\nu+\gamma}^\infty e^{-\delta(\nu-\theta)}d\theta = \frac{L}{|\delta|}\,e^{\delta\gamma} < +\infty.$$

С другой стороны, равномерно по c для $w\in C_0^+$ в силу a)

$$0\leqslant\lim_{\nu\to\infty}\|K_1 w\| = \lim_{\nu\to\infty}\left\|c^{-\varepsilon}\alpha(ce^{-\nu})\int\limits_{\nu+\gamma}^\infty e^{-\delta(\nu-\theta)}w(\theta)\,d\theta\right\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{0<\nu<\infty}\|w(\nu)\|\lim_{\nu\to\infty} e^{-\varepsilon\nu}\int\limits_{\nu+\gamma}^\infty e^{-\delta(\nu-\theta)}d\theta = \sup_{0<\nu<\infty}\|w(\nu)\|\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{|\delta|}\exp(\delta\gamma-\varepsilon\nu) = 0$$

и, следовательно, оператор K_1 отображает C_0^+ в себя. Наконец, из (28) — (30) и (33) в силу условий d) и e)

$$0\leqslant\|\Phi(\nu, w(\nu))\| = |\lambda^{-\rho}|\,(ce^{-\nu})^\delta\left\|F\left(ce^{-\nu}, \int\limits_\nu^\infty (ce^{-\theta})^{-\delta}w(\theta)\,d\theta\right)\right\| =$$

$$= |\lambda^{-\rho}t^{\delta-\rho}|\left\|f\left(t, t^\rho\left(P_m(\ln t) + \int\limits_0^t v(\xi)\,d\xi\right), \; [\psi(t)]^\rho\left(P_m(\ln\psi(t)) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+\int\limits_0^{\psi(t)} v(\xi)\,d\xi\right)\right)\right\| \leqslant |\lambda^{-\rho}|\,t^\delta q(t)\left\|P_m(\ln t) + \int\limits_0^t v(\xi)\,d\xi\right\|. \tag{39}$$

При $\nu\to+\infty$ в силу (29) $t\to+0$. С другой стороны, в силу условия d) и (37) имеем

$$t^\delta q(t) = O(t^{\varepsilon/2}) \quad \text{при } t\to+0. \tag{40}$$

Из (39) и (40) следует

$$\lim_{\nu\to\infty}\|\Phi(\nu, w(\nu)\| = 0,$$

т. е. для $w\in C_0^+$ и $\Phi(\nu, w(\nu))\in C_0^+$.

В силу (34)

$$\|K_0\|_{C_0^+} = \|k_0\|_L = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\|k_0(x)\|\,dx \leqslant \|A-\rho\lambda^{-\rho}E\|\int\limits_{-\infty}^{-\gamma} e^{-\delta x}dx +$$

$$+|\rho|\,|\lambda^{-\rho}|\,n\int\limits_{-\gamma}^0 e^{-\delta x}dx = \frac{1}{|\delta|}\left(\|A-\rho\lambda^{-\rho}E\|\,e^{\delta\gamma} + |\rho|\,|\lambda^{-\rho}|\,n\,(1-e^{\delta\gamma})\right) < +\infty,$$

откуда для определенного на C_0^+ оператора $B = \lambda^{-\rho} I - K_0$

$$\| B \|_{C_0^+} \leqslant | \lambda^{-\rho} | + \| K_0 \| < + \infty$$

и, следовательно, аддитивный на C_0^+ оператор B ограничен на C_0^+.

Пусть теперь $v \in C_0^+$ и $f = Bv$. Тогда $0 \leqslant \| f(\nu) \| \leqslant \| B \| \| v(\nu) \| \to 0$ при $\nu \to +\infty$, т. е. оператор B отображает C_0^+ в себя. Но тогда из однозначной разрешимости в C_0^+ уравнения (38) для любой $f(\nu) \in C_0^+$ следует, что оператор B осуществляет взаимно однозначное отображение всего пространства C_0^+ на себя и в силу теоремы Банаха обратный оператор B^{-1} существует, аддитивен и ограничен на C_0^+. Из (36′) имеем

$$w = B^{-1} f_* + c^\varepsilon B^{-1} K_1 w + B^{-1} \Phi(\nu, w(\nu)). \tag{41}$$

Рассмотрим на C_0^+ оператор

$$Hw = B^{-1} f_* + c^\varepsilon B^{-1} K_1 w + B^{-1} \Phi(\nu, w(\nu)). \tag{42}$$

При этом по доказанному $Hw \in C_0^+$ для любого $w \in C_0^+$. Тогда для любых $w_1, w_2 \in C_0^+$

$$\| Hw_1 - Hw_2 \| \leqslant c^\varepsilon \| B^{-1} \| \| K_1 \| \| w_1 - w_2 \| +$$
$$+ \| B^{-1} \| \| \Phi(\nu, w_1(\nu)) - \Phi(\nu, w_2(\nu)) \|. \tag{43}$$

С учетом того, что в (26) ρ и $P_m(\ln t)$ фиксированы, из (28) — (30) и (33) в силу условия e) получим

$$\| \Phi(\nu, w_1(\nu)) - \Phi(\nu, w_2(\nu)) \| = | \lambda^{-\rho} | (ce^{-\nu}) \Big\| F\Big(ce^{-\nu}, \int_\nu^\infty (ce^{-\theta})^{-\delta} w_1(\theta)\, d\theta\Big) -$$

$$- F\Big(ce^{-\nu}, \int_\nu^\infty (ce^{-\theta})^{-\delta} w_2(\theta)\, d\theta\Big) \Big\| \leqslant | \lambda^{-\rho} | t^\delta q(t) \Big\| \int_0^t (v_1(\xi) - v_2(\xi))\, d\xi \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant | \lambda^{-\rho} | q(t) t^{1+\delta} \| v_1(t) - v_2(t) \| = | \lambda^{-\rho} | q(ce^{-\nu}) \| w_1 - w_2 \|.$$

Обозначим $q_c = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant c} q(t)$. В силу условия e) $q_c \to 0$ при $c \to 0$ и из (43) следует

$$\| Hw_1 - Hw_2 \| \leqslant \alpha_c \| w_1 - w_2 \|, \tag{44}$$

где для достаточно малого $c > 0$

$$\alpha_c = c^\varepsilon \| B^{-1} \| \| K_1 \| + | \lambda^{-\rho} | q_c \| B^{-1} \| \leqslant \alpha < 1.$$

Из (44) следует, что уравнение (41), а вместе с ним и (31), имеет, и притом единственное, решение $w_*(\nu) \in C_0^+$. Обозначим $p = \sup\limits_{0<\nu<\infty} \| w_*(\nu) \|$ и в соответствии с (29), (30) для фиксированного допустимого значения δ рассмотрим определенную на интервале $(0, c)$ вектор-функцию $v_*(t) = v_*(ce^{-\nu}) = (ce^{-\nu})^{-(1+\delta)} w_*(\nu)$, являющуюся единственным решением уравнения (27). Полагая $c < 1$, в силу (36) получаем

$$\| v_*(t) \|_{L_{(n,1)}(0,c)} = \int_0^c \| v_*(t) \|\, dt \leqslant p \int_0^b t^{-(1+\delta)} dt < \frac{4p}{\varepsilon} c^{\varepsilon/4}$$

и, следовательно, вектор-функция $v_*(t) \in L_{(n,1)}(0, c)$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть для уравнения* (1) *имеют место условия* a)— g), *фигурирующая в условии* a) $(n \times n)$*-матрица* $A \neq 0$ *и матрица* $\tilde{A}$, *подобная* A, *имеет каноническую жорданову форму, содержащую* $p_r \times p_r$ *клетки*, $r = 1, 2, \ldots, l$; $p_1 + p_2 + \ldots + p_l = n$, *соответствующие собственным* *значениям* s_r *матрицы* A. *Тогда каждому собственному значению* s_r, $s_r \neq \neq 0$, $s_r \neq 1/e \ln \lambda$, *матрицы* A *на интервале* $0 < t < b$ *соответствует бесконечная последовательность решений уравнения* (1)

$$X_{rm\nu}(t) = t^{\rho_{r\nu}}\left(P_{rm\nu}(\ln t) + \int_0^t v_{rm\nu}(\xi)\, d\xi\right), \quad m = 0, 1, \ldots, p_r - 1;$$

$$\nu = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{45}$$

где $\rho_{r\nu}$ — *корни характеристического уравнения* (10), *соответствующие им многочлены* $P_{rm\nu}(\ln t)$ *имеют вид* (5) *с векторными коэффициентами, определяемыми уравнениями* (7), (9), *вектор-функции* $v_{rm\nu}(t) \in L_{(n,1)}(0, c)$. *В тех же обозначениях собственному значению* $s_r = 0$ *соответствует конечная последовательность решений уравнения* (1)

$$X_{rm0}(t) = P_{rm0}(\ln t) + \int_0^t v_{rm0}(\xi)\, d\xi, \quad m = 0, 1, \ldots, p_r - 1. \tag{46}$$

Собственному значению $s_r = 1/e \ln \lambda$ *соответствует бесконечная последовательность решений уравнения* (1) *вида* (45), *где* $\nu = -1, \pm 2, \pm 3, \ldots$, *и две конечные последовательности решений*

$$X_{rm0}(t) = t^{1/\ln\lambda}\left(P_{rm0}(\ln t) + \int_0^t v_{rm0}(\xi)\, d\xi\right), \quad m = 0, 1, \ldots, p_r - 1,$$

$$X_{rm1}(t) = t^{1/\ln\lambda}\left(P_{r(m+1)0}(\ln t) - P_{rm0}(\ln t) + \int_0^t v_{rm1}(\xi)\, d\xi\right), \tag{47}$$

$$m = 0, 1, \ldots, p_r - 1.$$

Если в уравнении (1) предельная матрица $A = 0$, то соответствующее линейное уравнение (3) принимает вид

$$tZ'(t) = 0. \tag{3'}$$

Его основными решениями является произвольная система линейно независимых векторов

$$V_1, V_2, \ldots, V_n. \tag{48}$$

Для матрицы $A = 0$: $l = n$, $p_r \equiv 1$, $s_r \equiv 0$, $r = 1, 2, \ldots, n$, и уравнение (27) имеет ядро с ослабленной особенностью. Отсюда следует такая теорема.

Теорема 4. *Пусть для уравнения* (1) *имеют место условия* a)—g) *и фигурирующая в условии* a) *предельная матрица* $A = 0$. *Тогда уравнение* (1) *имеет в классе* A *конечную последовательность решений*

$$X_r(t) = V_r + \int_0^t v_r(\xi)\, d\xi, \quad r = 1, 2, \ldots, n, \tag{49}$$

где V_r — *постоянный вектор из* (48), *а* $v_r(t) \in L_{(n,1)}(0, c)$.

Будем говорить, что вектор-функции X и Y асимптотически эквивалентны при $t \to \alpha + 0$, если $\lim\limits_{t \to \alpha + 0} \| X - Y \| / \| X \| = 0$, или $\lim\limits_{t \to \alpha + 0} \| Y \| / \| X \| = 1$.

Следствие 1. *В условиях теорем* 3, 4 *для каждого определенного на интервале* $(0, b)$ *решения уравнения* (3), (3′) *существует на* $(0, b)$ *решение уравнения* (1), *асимптотически эквивалентное ему при* $t \to +0$.

Замечание. Аналогично тому, как это сделано в [4] для линейной системы, возможно обобщение на случай, когда условие f) заменено условием f^*) $\varphi(t) \in C^1(0, c)$ и представимо в виде $\varphi(t) = \lambda t (1 + t\delta(t))$, $0 < t < c$, $0 < \lambda < 1$, $t\delta(t) = O(t^2)$, $\delta'(t) = O(1)$, $t \to +0$.

4. Одноточечная задача. В терминах уравнения (1) точку $\alpha \in [0, b)$ будем называть особой для функций запаздывания, если при всех $t > \alpha$ имеет место $\varphi(t) > \alpha$, $\psi(t) > \alpha$. В силу условия c) точка $t = 0$

является особой для функций запаздывания уравнения (1). Определенное на интервале (α, b) решение $\tilde{X}(t)$ уравнения (1) будем называть решением одноточечной задачи. Если существует конечный предел

$$\lim_{t\to\alpha+0} \tilde{X}(t) = \tilde{X}_\alpha \neq 0, \tag{50}$$

то решение $\tilde{X}(t)$ будем называть регулярным решением одноточечной задачи, или решением одноточечной начальной задачи с начальным условием

$$\tilde{X}(\alpha) = \tilde{X}_\alpha. \tag{51}$$

Решения (45) уравнения (1) будут регулярными лишь для $\operatorname{Re}\rho_{r\nu} = 0$, $m = 0$, для (46) — при $m = 0$. Если в условии а) предельная матрица $A = 0$, то все определенные на $(0, b)$ решения уравнения (1) будут регулярными решениями одноточечной задачи.

5. Двусторонние решения. Изучим решения нелинейной системы с запаздывающим аргументом

$$X'(t) = A(t)\,X(\varphi(t)) + f(t, X(t), X(\psi(t))), \quad -\infty < t < b \leqslant +\infty, \tag{52}$$

где: A) $(n \times n)$-матрица $A(t)$ непрерывна на $(-\infty, b)$ и представима в виде $A(t) = A + \alpha(t)$, $\|\alpha(t)\| = O(e^{\varepsilon t})$, $\varepsilon > 0$, $t \to -\infty$;

B) вектор-функция $f(t, X, Y)$ непрерывна на $(-\infty, b) \times R^n \times R^n$;

C) отклонения $\varphi(t)$, $\psi(t)$ непрерывны на $(-\infty, b)$ и $\varphi(t) \leqslant t$, $\psi(t) \leqslant t$.

Пусть далее существует точка $c \leqslant b$ такая, что

D) $f(t, 0, 0) \equiv 0$, $-\infty < t < c$;

E) $\| f(t, X_1, Y_1) - f(t, X_2, Y_2) \| \leqslant q(t)\,\|X_1 - X_2\|$, $-\infty < t < c$, где функция $q(t)$ непрерывна на $-\infty < t < c$ и удовлетворяет условию $q(t) = O(e^{\varepsilon t})$, $\varepsilon > 0$, $t \to -\infty$;

F) $\varphi(t) = t - \tau$, $-\infty < t < c$, где постоянная $\tau > 0$;

G) при $t \geqslant c$ матрица $A(t) = A + \alpha(t)$, вектор-функция $f(t, X, Y)$ и отклонения $\varphi(t)$, $\psi(t)$ допускают существование, единственность и продолжимость на $c \leqslant t < b$ решения основной начальной задачи для уравнения (52) с произвольной непрерывной на $(-\infty, c]$ начальной вектор-функцией.

Пусть α_0 — особая точка для функций запаздывания уравнения (52) (если уравнение (52) не имеет таких точек, то $\alpha_0 = -\infty$). Решение уравнения (52), определенное на интервале (α_0, b), будем называть двусторонним решением этого уравнения (см. с [7]).

При решении прикладных задач крайне редко оказывается нужным знать всю предысторию процесса и систему (52) естественно изучать лишь на участке $[t_0, b)$, где t_0 — фиксированная начальная точка. Тогда на связанном с точкой t_0 начальном множестве задают непрерывную начальную вектор-функцию $\sigma(t)$ и рассматривают основную начальную задачу с начальными условиями $X(t_0) = X_0 = \sigma(t_0)$; $X(\varphi(t)) \equiv \sigma(\varphi(t))$, если $\varphi(t) < t_0$; $X(\psi(t)) \equiv \sigma(\psi(t))$, если $\psi(t) < t_0$. Произвол выбора начальной функции очень удобен при решении многих задач: проблемы существования и единственности решений, продолжимости, при исследовании устойчивости в качестве возмущенных решений естественно рассматривать решения основной начальной задачи, связанной с произвольной начальной точкой. Однако для многих прикладных задач чужеродная начальная функция, не связанная с системой (52), моделирующей процесс, может оказаться серьезной помехой при построении модели, а требование, чтобы начальная функция удовлетворяла системе (52), приводит к двустороннему решению.

Традиционно для непосредственного доказательства существования двусторонних решений используется метод последовательных приближений. При этом (см., например, [7—11]) в той или иной форме фигурирует известная оценка $1/e$, практически делающая результат применимым лишь для достаточно малых отклонений. В терминах линейной стационарной системы

$$Z'(t) = AZ(t - \tau), \quad -\infty < t < +\infty, \tag{53}$$

это ограничение имеет вид $\tau \| A \| < 1/e$. Однако, как известно, каждому отличному от нуля собственному значению матрицы A соответствует бесконечномерное пространство двусторонних решений уравнения (53) (нулевому собственному значению — n-мерное пространство) без всяких ограничений на величины $\|A\|$ и τ. Это свидетельствует о том, что упомянутое ограничение связано не с существом задачи, а лишь с методом ее решения. Но и для достаточно малых запаздываний этот подход позволяет получить лишь конечномерное многообразие решений. Задача, рассмотренная в пп. 2, 3, позволяет подойти к изучению многообразия двусторонних решений уравнения (52) в целом.

Случай 1. $\alpha_0 > -\infty$. Замена переменных $t = x + \alpha_0$, $X(t) = X(x + \alpha_0) = Y(x)$ приводит уравнение (52) к уравнению вида (1)

$$xY'(x) = xA(x + \alpha_0) Y(\Phi(x)) + xf(x + \alpha_0, Y(x), Y(\Psi(x))),$$
$$0 < x < b - \alpha_0, \tag{54}$$

где $\Phi(x) = \varphi(x + \alpha_0) - \alpha_0$, $\Psi(x) = \psi(x + \alpha_0) - \alpha_0$. В силу A)—G) для уравнения (54) выполнены условия a)—g), кроме, может быть, условия f). Но в рассматриваемом случае $\lim\limits_{x \to +0} xA(x + \alpha_0) = 0$ и последнее несущественно (укороченное уравнение (3′) не зависит от отклонения). Уравнение (27) для определения возмущений решений укороченного уравнения имеет регулярное ядро. Таким образом, структура многообразия двусторонних решений уравнения (52) на участке $-\infty < \alpha_0 < t < b$ определяется теоремой 4: двусторонние решения являются регулярными решениями одноточечной задачи с начальной точкой $t = \alpha_0$.

Случай 2. $\alpha_0 = -\infty$. Будем говорить, что вектор-функция $X(t)$, определенная на $-\infty < t < b$, принадлежит классу B, если она представима в виде

$$X(t) = e^{\rho t}\left(P_k(t) + \int\limits_{-\infty}^{t} w(\xi)\, d\xi\right),$$

где ρ — постоянная, $P_k(t)$ — многочлен степени k с векторными коэффициентами, $w(t) \in L_{(n,1)}(-\infty, c)$.

Замена переменных $t = \ln x$, $X(t) = X(\ln x) = Y(x)$ приводит уравнение (52) к уравнению вида (1)

$$xY'(x) = A(\ln x) Y(\Phi(x)) + f(\ln x, Y(x), Y(\Psi(x))), \qquad 0 < x < e^b, \tag{55}$$

где $\Phi(x) = \exp \varphi(\ln x)$, $\Psi(x) = \exp \psi(\ln x)$. В силу A)—G) уравнение (55) удовлетворяет на $(0, e^b)$ условиям a)—g) (в условии f) $\lambda = e^{-\tau}$) и, следовательно, структура многообразия принадлежащих классу B двусторонних решений уравнения (52) на интервале $(-\infty, b)$ определяется теоремой 3, если предельная матрица A в условии A) отлична от нулевой, и теоремой 4 — в противном случае. Следствие 1 позволяет утверждать, что справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть для уравнения* (52) *выполнены условия* A)—G). *Тогда каждому определенному на интервале* $(-\infty, b)$ *решению стационарного уравнения* (53), *где* A — *фигурирующая в условии* A) *предельная матрица* (*случай* $A = 0$ *не исключается*), *соответствует определенное на* $(-\infty, b)$ *решение уравнения* (52), *асимптотически эквивалентное ему при* $t \to -\infty$.

1. *Норкин С. Б.* О бесконечномерном многообразии двусторонних решений нелинейной системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Tenth Int. Conf. Nonlinear Oscillations. (Varna, September, 1984). Abstracts.— Sofia, 1984.— P. 146.
2. *Норкин С. Б.* Структура решений системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в окрестности особой точки // Práce a študie vysokej školy dopravy a spojov v Žiline, mat.- fyz.— 1980.— **3.**— P. 27—46.
3. *Норкин С. Б.* Структура решений трехчленного дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом в окрестности особой точки // Там же.— 1980.— **3.**— P. 47—54.

4. *Норкин С. Б.* О двусторонних решениях линейной системы с асимптотически постоянными коэффициентами и запаздыванием // Czech. Math. J.— 1983.— **33**, № 108.— P. 58—69.
5. *Норкин С. Б.* Пространство двусторонних решений с экспоненциальным ростом при $t \to \to -\infty$ линейной системы с асимптотически постоянными матрицей и запаздыванием // Исслед. по теории дифференц. уравнений.— М. : Моск. автомоб.-дор. ин-т, 1986. — С. 27—34.
6. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов // Успехи мат. наук.— 1958.— **13**, вып. 2.— С. 3—72.
7. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— М. : Наука, 1971.— 296 с.
8. *Dantinne N.* Application de la methode des approximations successive á l'intégration d'une équation differentielle aux differences, I, II, III // Bull. Soc. Roy. sci. Liège.— 1949.— **18**, N 8—10.— P. 363—374.— **18**, N 11.— P. 445—461.— 1950.— **19**, N 2.— P. 119—130.
9. *Рябов Ю. А.* Применение метода малого параметра Ляпунова — Пуанкаре в теории систем с запаздыванием // Инжен. журн.— 1961.— **1**, N 2.— С. 3—15.
10. *Турдиев Т.* Аналитические решения некоторых классов линейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Тр. семинара по теории дифференц. уравнений с отклоняющимся аргументом.— 1967.— **4**.— С. 85—95.
11. *Šmitalová K.* Exsistence of complete solutions of linear differential equations with delays // Acta Math. Univ. Comen.— 1982.— **41**.— P. 189—193.

Моск. автомоб.-дор. ин-т

Получено 21.10.85,
после доработки — 19.02.86