УДК 517.88

В. Л. Островский, Ю. С. Самойленко

Применение проекционной спектральной теоремы к некоммутирующим семействам операторов

Теория представлений групп и алгебр Ли традиционно связана с приложениями, в первую очередь в математической и теоретической физике. Задачи современной математической физики: построение точных решений нелинейных уравнений и изучение моделей квантованных систем с бесконечным числом степеней свободы служат источником и во многом определяют пути развития теории представлений. Один из таких путей — изучение (возможно, бесконечных) семейств, вообще говоря, неограниченных операторов, связанных между собой коммутационными (не обязательно лиевскими) соотношениями. Как правило, такие семейства операторов есть представления соответствующих алгебраических объектов — гиперкомплексных систем, гипергрупп, «цветных» и квантовых групп и алгебр Ли, алгебр с квадратичными соотношениями, колчанов с соотношениями и т. д.

Настоящая работа посвящена применению проекционной спектральной теоремы [1, 2] для семейств коммутирующих самосопряженных операторов $(A_x)_{x\in X}$ при изучении и построении моделей семейств операторов $(B_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ не коммутирующих, но связанных между собой теми или иными соотношениями.

Методика исследования таких семейств операторов восходит к классическим работам по теории представлений групп и алгебр Ли, исследования таких бесконечных семейств — к работам Гординга, Вайтмана [3, 4], Араки [5], И. М. Гельфанда, Н. Я. Виленкина [6], В. Я. Голодца [7], А. М. Вершика, И. М. Гельфанда, М. И. Граева [8, 9], Р. С. Исмагилова [10, 11], А. А. Кириллова [12, 13], Стратила, Войкулеску [14] и др. Первый этап исследования — выбор семейства коммутирующих самосопряженных операторов $(A_x)_{x\in X}$, правила коммутации которых с операторами B_α таковы, что B_α переводят совместные собственные подпространства $H_{\lambda(\cdot)}$ коммутативного семейства $(A_x)_{x\in X}$, отвечающие собственным значениям $\lambda(\cdot)\in\mathbb{R}^X$, в собственные $H_{\varphi_\alpha(\lambda(\cdot))}$, отвечающие собственным значениям $\varphi_\alpha(\lambda(\cdot))$ (здесь $\varphi_\alpha:\mathbb{R}^X\to\mathbb{R}^X$). Второй этап — задание операторов B_α в пространстве

Фурье-образов семейства $(A_x)_{x \in X}$ (построение коммутативной модели для операторов B_α). На каждом из этих этапов в настоящей работе существенно используется спектральная теорема для семейств коммутирующих самосопряженных операторов [1, 2]. Третий этап — учет соотношений, связывающих операторы $(B_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$.

При проведении этой схемы следует определять точный смысл алгебраических соотношений, связывающих неограниченные операторы $(A_x)_{x \in X}$ и B_α. В п. 1 вводятся и изучаются такие соотношения, для которых B_α: $: H_{\lambda(\cdot)} \to H_{\varphi_\alpha(\lambda(\cdot))}$ (п. 2) и которые позволят для операторов $(B_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ построить коммутативную модель (п. 3).

Отметим, что наряду с построением коммутативной модели для семейств операторов $(B_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ рассматривались вопросы описания этих семейств с точностью до унитарной эквивалентности. Эти вопросы приводят к изучению неприводимых или фактор-представлений различных соотношений и (если возможно) к доказательству соответствующих аналогов спектральной теоремы.

1. Определение алгебраических соотношений, связывающих неограниченные операторы. 1.1 При рассмотрении семейств операторов, связанных теми или иными (важными в приложениях) соотношениями с необходимостью возникают неограниченные операторы. Пусть, например, A — оператор, связанный с оператором B соотношением $[A, B] = AB - BA = \alpha B$, $\alpha \neq 0$ (такими соотношениями связаны в квантовой механике операторы числа частиц N и операторы рождения и уничтожения a^* и a: $[N, a^*] = a^*$, $[N, a] = -a$ или кососамосопряженные инфинитезимальные операторы A и B унитарного представления группы аффинных преобразований прямой $[A, B] = B$).

Предложение 1. *Если оператор $B^n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, то оператор A необходимо неограничен.*

Доказательство. Так как для ограниченных операторов A и B $AB^n = BAB^{n-1} + \alpha B^n = \ldots = B^n A + n\alpha B^n$, то $2\|A\|\|B^n\| \geqslant \|AB^n - B^n A\| = |\alpha|^n n \|B^n\|$, $\|A\| \geqslant |\alpha| \frac{n}{2}$, $n = 1, 2, \ldots$, и приходим к противоречию.

Но одни и те же соотношения, связывающие неограниченные операторы, могут быть определены различными неэквивалентными способами.

Если $A = \int_{\mathbb{R}^1} \lambda dE_1(\lambda)$ и $B = \int_{\mathbb{R}^1} \mu dE_2(\mu)$ — ограниченные самосопряженные операторы, то их коммутация $[A, B] = AB - BA = 0$ эквивалентна коммутации их спектральных проекторов $[E_1(\Delta), E_2(\Delta')] = 0$ для всех борелевских $\Delta, \Delta' \subset \mathbb{R}^1$. Для неограниченных самосопряженных операторов определение коммутации дается в терминах их спектральных проекторов. Это определение «правильно» в том смысле, что эквивалентно коммутации всех измеримых существенно ограниченных функций от A и B, в частности однопараметрических групп $U_t = e^{itA}$ и $V_s = e^{isB}$, $t, s \in \mathbb{R}^1$, и позволяет для пар коммутирующих самосопряженных операторов доказать спектральную теорему.

Но коммутируемость неограниченных самосопряженных операторов A и B на плотном инвариантном относительно операторов A и B множестве Φ не влечет, вообще говоря, коммутируемости их спектральных проекторов, даже если Φ — область существенной самосопряженности операторов A и B [15, 16].

Аналогично при изучении конечных наборов кососамосопряженных операторов, образующих представление базиса конечномерной вещественной алгебры Ли, для получения структурных теорем предполагают возможность продолжить это представление до унитарного представления соответствующей группы Ли. Однако не всякое представление алгебры Ли на плотном в пространстве представления H множестве Φ, инвариантном относительно операторов представления, продолжается до представления группы [15].

Подобным образом обстоит дело и для антикоммутирующих самосопряженных операторов [17].

1.2. Определение соотношений, связывающих неограниченные операторы, позволяющее строить модели для этих операторов, приводим и изучаем ниже для семейства коммутирующих самосопряженных операторов $\mathfrak{A} = (A_x)_{x \in X}$ и одного, вообще говоря, неограниченного оператора B таких, что

$$A_x B = B\varphi_x(\mathfrak{A}), \quad x \in X. \tag{1}$$

Здесь фиксированное отображение $\varphi\cdot : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R}^X$ взаимно однозначно и такое, что φ и φ^{-1} измеримы относительно σ-алгебры $C_\sigma(\mathbb{R}^X)$, порожденной цилиндрическими множествами с борелевскими основаниями, $E(\cdot)$ — совместное разложение единицы семейства $\mathfrak{A}$, операторы $\varphi_x(\mathfrak{A}) = \int\limits_{\mathbb{R}^X} \varphi(\lambda(\cdot))(x) dE(\lambda(\cdot))$, $\varphi(\mathfrak{A}) = (\varphi_x(\mathfrak{A}))_{x\in X}$.

П р и м е р ы. 1. При коммутации ограниченного оператора B с семейством $\mathfrak{A}$ $\varphi(\lambda(\cdot))(\cdot) = \lambda(\cdot)$, при антикоммутации ограниченного оператора B со всеми операторами семейства $\mathfrak{A}$ $\varphi(\lambda(\cdot))(\cdot) = -\lambda(\cdot)$.

2. Если $[A_x, B] = \alpha(x) B$ ($\alpha(\cdot)$ — фиксированная вещественнозначная функция на X), то $\varphi(\lambda(\cdot))(\cdot) = \lambda(\cdot) + \alpha(\cdot)$, если $A_x B - (-1)^{g(x)} BA_x = \alpha(x)B$ ($g(\cdot)$ — фиксированная функция на X, принимающая значения 0 или 1), то $\varphi(\lambda(\cdot))(\cdot) = (-1)^{g(\cdot)} \lambda(\cdot) + \alpha(\cdot)$.

Поясним, какой смысл имеют соотношения (1) для неограниченных операторов A_x и B.

Если операторы B, A_x, $\varphi_x(\mathfrak{A})$, $x \in X$, ограничены, то, используя равенство $A_x^n B = A_n^{n-1} B\varphi_x(\mathfrak{A}) = \ldots = B(\varphi_x(\mathfrak{A}))^n$ и функциональное исчисление для ограниченных операторов $(A_x)_{x\in X}$, получаем следующее утверждение.

У т в е р ж д е н и е 1. *Следующие условия эквивалентны:*

I) $A_x B = B\varphi_x(\mathfrak{A})$, $x \in X$;

II) $BE(\Delta) = E(\varphi(\Delta)) B$, $\Delta \in C_\sigma(\mathbb{R}^X)$;

III) $F(\mathfrak{A}) B = BF(\varphi(\mathfrak{A}))$, $F(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^X, d\rho(\cdot))$ (*ρ — спектральная мера семейства* $\mathfrak{A}$).

Если оператор B ограничен, но ограниченность операторов A_x и $\varphi_x(\mathfrak{A})$, $x \in X$ не предполагается, для определения соотношений вида (1) следует уточнять, на каких векторах $u \in H$ эти соотношения выполнены. Можно, например, потребовать существование плотного подмножества $\Phi \subset H$ (оснащения), на котором определены операторы A_x, $\varphi_x(\mathfrak{A})$, $x \in X$, инвариантного относительно операторов A_x, $\varphi_x(\mathfrak{A})$, $x \in X$, и B. Будем дополнительно предполагать, что Φ состоит из целых векторов для операторов A_x, $\varphi_x(\mathfrak{A})$, $x \in X$.

У т в е р ж д е н и е 2. *Следующие условия эквивалентны:*

I) $A_x Bu = B\varphi_x(\mathfrak{A}) u$, $u \in \Phi$, $x \in X$;

II) $BE(\Delta) = E(\varphi(\Delta)) B$, $\Delta \in C_\sigma(\mathbb{R}^X)$;

III) $F(\mathfrak{A}) B = BF(\varphi(\mathfrak{A}))$, $F(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^X, d\rho(\cdot))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эквивалентность II) $\Leftrightarrow$ III) устанавливается так же, как и для ограниченных операторов A_x, $\varphi_x(\mathfrak{A})$, $x \in X$.

II) $\Rightarrow$ I). Если $BE(\Delta) = E(\varphi(\Delta)) B$, то для $u \in \Phi$ $A_x Bu = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^X} \lambda(x)\, dE(\lambda(\cdot))\right) Bu = B\left(\int\limits_{\mathbb{R}^X} \lambda(x)\, dE(\varphi^{-1}(\lambda(\cdot)))\right) u = B\varphi(\mathfrak{A}) u$.

I) $\Rightarrow$ II). Пусть $A_x Bu = B\varphi_x(\mathfrak{A}) u$, $u \in \Phi$. Так как u — целый вектор, для любого $t \in \mathbb{R}^1$.

$$\exp\{itA_x\} u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} A_x^k u, \qquad \exp\{it\varphi_x(\mathfrak{A}) u = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} (\varphi_x(\mathfrak{A}))^k u.$$

При этом, так как $Bu \in \Phi$, то

$$\exp\{itA_x\} Bu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} A_x^k Bu = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it!)^k}{k!} B(\varphi_x(\mathfrak{A}))^k u = B\exp\{it\varphi_x(\mathfrak{A})\, u.$$

В силу единственности преобразования Фурье $BE(\Delta) = E(\varphi_x(\Delta)) B$ для всех $\Delta = \{\lambda(\cdot) \mid \lambda(x) \in \delta,\ \delta \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^1)\}$. Аналогично, $B\exp\{it_1\varphi_{x_1}(\mathfrak{A})\} \times \times \ldots \exp\{it_n\, \varphi_{x_n}(\mathfrak{A})\} = \exp\{it_1 A_{x_1}\} \ldots \exp\{it_n\, A_{x_n}\}\, B$, поэтому равенство $BE(\Delta) = E(\varphi(\Delta))\, B$ справедливо для любого цилиндрического $\Delta \in \in C_\sigma(\mathbb{R}^X)$. Пусть $\Delta = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_k$, Δ_k — цилиндрические множества. Тогда в силу непрерывности оператора B

$$BE(\Delta) = BE\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_k\Big) = B\prod_{k=1}^{\infty} E(\Delta_k) = \prod_{k=1}^{\infty} BE(\Delta_k) = \prod_{k=1}^{\infty} E(\varphi(\Delta_k))\, B =$$

$$= E\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty} \varphi(\Delta_k)\Big) B = E(\varphi(\Delta))\, B.$$

Аналогично устанавливается справедливость равенства II) при всех $\Delta \in \in C_\sigma(\mathbb{R}^X)$.

Таким образом, в случае ограниченного оператора B будем говорить, что имеют место соотношения $A_x B = B\varphi_x(\mathfrak{A})$, $x \in X$, если $BE(\Delta) = = E(\varphi(\Delta))\, B$ для всех $\Delta \in C_\sigma(\mathbb{R}^X)$.

Рассмотрим общий случай — семейство неограниченных самосопряженных операторов $(A_x)_{x\in X}$ и неограниченный замкнутый оператор B с областью определения $\mathscr{D}(B)$. Для придания смысла алгебраическим соотношениям между оператором B и операторами A_x, $x \in X$, потребуем еще, чтобы операторы A_x, $\varphi_x(\mathfrak{A})$, $x \in X$, B, B^* были определены на Φ и Φ было инвариантным относительно действия этих операторов.

Теорема 1. *Пусть оснащение Φ состоит из целых векторов операторов A_x, $\varphi_x(\mathfrak{A})$. $x \in X$, и является существенной областью для оператора B. Тогда следующие условия эквивалентны.*

I) $A_x Bu = B\varphi_x(\mathfrak{A})\, u$, $u \in \Phi$, $x \in X$;

II) $BE(\Delta)\, u = E(\varphi(\Delta))\, Bu$, $u \in \Phi$, $\Delta \in C_\sigma(\mathbb{R}^X)$;

III) $F(\mathfrak{A})\, Bu = BF(\varphi(\mathfrak{A}))\, u$, $u \in \Phi$, $F(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}^X, d\rho(\cdot))$. *При этом* $F(\varphi(\mathfrak{A}))\, u \in \mathscr{D}(B)$, $E(\Delta)\, u \in \mathscr{D}(B)$, если $u \in \Phi$.

Доказательство. II) $\Rightarrow$ I). Пусть $u, v \in \Phi$. Тогда

$$(A_x Bu, v) = \int_{\mathbb{R}^X} \lambda(x)\, d(E(\lambda(\cdot))\, Bu, v) = \int_{\mathbb{R}^X} \lambda(x)\, d(E(\varphi^{-1}(\lambda(\cdot)))\, u, B^*v) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^X} \varphi(\lambda(\cdot))(x)\, d(E(\lambda(\cdot))\, u, B^*v) = (\varphi_x(\mathfrak{A})\, u, B^*v) = (B\varphi_x(\mathfrak{A})\, u, v),$$

откуда $A_x Bu = B\varphi_x(\mathfrak{A})\, u$, $u \in \Phi$.

I) $\Rightarrow$ II). Так как Φ состоит из целых векторов для операторов $(A_x, \varphi_x(\mathfrak{A}))_{x\in X}$ то подобно утверждению 2 доказывается, что совпадают меры $(E(\Delta)\, u, B^*v)$ и $(E(\varphi(\Delta))\, Bu, v)$ для любых $u, v \in \Phi$, $\Delta \in C_\sigma(\mathbb{R}^X)$. При этом $E(\Delta)\, u \in \mathscr{D}(B)$ и $BE(\Delta)\, u = E(\varphi(\Delta))\, Bu$.

Эквивалентность II) $\Leftrightarrow$ III) устанавливается аналогично.

Замечание 1. Теорема 1 верна и для семейств ограниченных коммутирующих нормальных операторов $\mathfrak{A} = (A_x)_{x\in X}$. В случае неограниченных нормальных операторов теорема неверна.

В дальнейшем, говоря об алгебраических соотношениях вида (1), связывающих неограниченные операторы A_x, $x \in X$, и B, предполагаем, что на некотором плотном H оснащении Φ, инвариантном относительно A_x,

$\varphi_x(A)$, $x \in X$, B, B^* выполнены соотношения $BE(\Delta)u = E(\varphi(\Delta))Bu$, $u \in \Phi$, $\Delta \in C_\sigma(\mathbb{R}^X)$ (Φ предполагается существенной областью для B).

2. Коммутационные соотношения и обобщенные собственные векторы. 2.1. Если $e_{\lambda(\cdot)}$ — совместный собственный вектор семейства $\mathfrak{A} : A_x e_{\lambda(\cdot)} = \lambda(x) e_{\lambda(\cdot)}$ и $e_{\lambda(\cdot)} \in \Phi$, то $Be_{\lambda(\cdot)}$ — совместный собственный вектор $\mathfrak{A}$ с собственным значением $\varphi(\lambda(\cdot))(\cdot)$. Для формулировки аналога этого утверждения в случае произвольного совместного спектра $\mathfrak{A}$ необходимо использовать понятие обобщенных совместных собственных векторов.

В настоящем пункте предполагаем, что существует оснащение $\Phi' \supset \supset H \supset \Phi$, где Φ — плотное в H сепарабельное ядерное пространство, являющееся пересечением семейства гильбертовых пространств: $\Phi = \bigcap_{t \in T} H_t$ [1]. При этом предполагается, что операторы A_x, $\varphi_x(\mathfrak{A})$, $x \in X$, B, B^* определены на Φ и непрерывно переводят его в себя (в этом случае говорят, что оснащение стандартно связано с указанными операторами). Для простоты изложения будем предполагать также, что семейство $\mathfrak{A}$ не более, чем счетно.

В силу ядерности пространства Φ совместное разложение единицы $E(\cdot)$ семейства $\mathfrak{A}$ можно продифференцировать по спектральной мере $\rho(\cdot)$: : $dE(\lambda(\cdot)) = P(\lambda(\cdot))\, d\rho(\lambda(\cdot))$, где $P(\lambda(\cdot)) : \Phi \to \Phi'$ обобщенные проекторы. При сделанных предположениях для $\rho(\cdot)$ почти всюду (п. в.) $\lambda(\cdot) \in \in \mathbb{R}^X$ образ проектора $\mathfrak{R}(P(\lambda(\cdot))) \in \Phi$ состоит из обобщенных совместных собственных векторов семейства $\mathfrak{A}$ с собственным значением $\lambda(\cdot) \in \mathbb{R}^X$ (напомним, что $\alpha \in \Phi'$ — обобщенный совместный собственный вектор семейства $\mathfrak{A}$, если для $u \in \Phi$ $(\alpha, A_x u) = \lambda(x)(\alpha, u)$; $x \in X$) [1, 2].

Определим оператор $\tilde{B} : \Phi' \to \Phi'$, полагая для $\alpha \in \Phi'$, $u \in \Phi$ $(\tilde{B}\alpha, u) = = (\alpha, B^* u)$.

Теорема 2. *Пусть существует ядерное оснащение Φ пространства H с указанными выше свойствами и для всех $u, v \in \Phi$, $\Delta \in C_\sigma(\mathbb{R}^X)$ $\tilde{B}E(\Delta)u = = E(\varphi(\Delta))Bu$. Тогда существует множество $\tau \in C_\sigma(\mathbb{R}^X)$ полной меры $\rho(\cdot)$ такое, что для всех $\lambda(\cdot) \in \tau$ $\mathfrak{R}(P(\lambda(\cdot)))$ состоит из обобщенных совместных собственных векторов семейства $\mathfrak{A}$ с собственным значением $\lambda(\cdot)$, а $\tilde{B}(\mathfrak{R}(P(\lambda(\cdot))))$ — из обобщенных совместных собственных векторов семейства $\mathfrak{A}$ с собственным значением $\varphi(\lambda(\cdot))(\cdot)$.*

Доказательство. Установим предварительно лемму, имеющую самостоятельный интерес.

Лемма 1. *Существует множество $\tau \in C_\sigma(\mathbb{R}^X)$ полной меры $\rho(\cdot)$ такое, что для всех $\lambda(\cdot) \in \tau$ $\mathfrak{R}(P(\lambda(\cdot)))$ состоит из обобщенных совместных собственных векторов семейства $\mathfrak{A}$ с собственным значением $\lambda(\cdot)$, являющихся одновременно обобщенными совместными собственными векторами семейства $\varphi(\mathfrak{A})$ с собственным значением $\varphi(\lambda(\cdot))(\cdot)$.*

Доказательство. Зафиксируем $u, v \in \Phi$, $x \in X$. Для любого $\Delta \in C_\sigma(\mathbb{R}^X)$

$$\int_\Delta (P(\lambda(\cdot))u, \varphi_x(\mathfrak{A})v)\, d\rho(\lambda(\cdot)) = (E(\Delta)u, \varphi_x(\mathfrak{A})v) = (\varphi_x(\mathfrak{A})E(\Delta)u, v) =$$

$$= \int_\Delta \varphi(\lambda(\cdot))(x)(P(\lambda(\cdot))u, v)\, d\rho(\lambda(\cdot)),$$

поэтому существует такое множество полной меры $\Delta_{x:u,v}$, что для $\lambda(\cdot) \in \in \Delta_{x:u,v}$ $(P(\lambda(\cdot))u, \varphi_x(\mathfrak{A})v) = \varphi(\lambda(\cdot))(x)(P(\lambda(\cdot))u, v)$. Выберем в Φ счетное всюду плотное множество L и положим $\Delta_x = \bigcap_{u,v \in L} \Delta_{x:u,v}$. Так как X предполагается не более, чем счетным, множество $\tau_0 = \bigcap_{x \in X} \Delta_x$ имеет полную меру. Пусть τ_1 — построенное аналогичным образом множество для семейства $(A_x)_{x \in X}$. Пересечение $\tau = \tau_0 \cap \tau_1$ имеет полную меру и является искомым. ■

Доказательство теоремы 2. Для любых $u, v \in \Phi$, $x \in X$ в силу леммы имеем при $\lambda(\cdot) \in \tau$ $(\tilde{B} P(\lambda(\cdot)) u, A_x^* v) = (P(\lambda(\cdot)) u, B^* A_x^* v) = (P(\lambda(\cdot)) u, \varphi_x^*(\mathfrak{A}) B^* v) = \varphi(\lambda(\cdot))(x)(P(\lambda(\cdot)) u, B^* v) = \varphi(\lambda(\cdot))(x)(\tilde{B} P(\lambda(\cdot)) \times \times u, v)$.

Замечание 2. Результаты данного пункта справедливы и в случае, когда X имеет произвольную мощность. Множество τ, фигурирующее в формулировках теоремы 2 и леммы 1, вообще говоря, неизмеримо и имеет полную внешнюю меру $\rho(\cdot)$.

2.2. В случае счетных наборов ограниченных операторов $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ и $(B_l)_{l=1}^{\infty}$ ядерное оснащение всегда существует.

Утверждение 3. *Для любого счетного набора ограниченных операторов $C_1, \ldots, C_n, \ldots$ существует ядерное оснащение $\Phi' \supset H \supset \Phi$, стандартно связанное с операторами $C_1, \ldots, C_n, \ldots$.*

Доказательство. Выберем базис в H $e_1, e_2, \ldots$ и обозначим $H_n =$ л. о. $\{C_{i_1}^{\#} \ldots C_{i_n}^{\#} \Omega_1\}$ ($i_k \leqslant n$, $\#$ означает либо отсутствие $*$, либо ее наличие, $\Omega_1 = e_1$). Если $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} H_n$ плотно в H, то, наделяя его ядерной топологией индуктивного предела конечномерных пространств H_n (или совпадающей с ней топологией проективного предела гильбертовых пространств $H((p_k)_{k=1}^{\infty}) = \left\{f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k \Omega_k \,|\, \|f\|_{H((p_k)_{k=1}^{\infty})}^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k^2 p_k < \infty\right\}$ ($p_k \geqslant 1$, Ω_k — ортонормированный базис в H из векторов $\Omega_k \subset \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} H_n$, $k = 1, 2, \ldots$) по всевозможным весам $p = (p_k)_{k=1}^{\infty}$), строим требуемое оснащение $\Phi' = \lim\limits_{p} \operatorname{ind} H\left(\left(\dfrac{1}{p_k}\right)_{k=1}^{\infty}\right) \supset H \supset \Phi = \lim\limits_{p} \operatorname{pr} H((p_k)_{k=1}^{\infty})$. Если же $\Phi_1 = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} H_n$ не плотно в H, то, выбирая первый из басисных векторов $e_{m_1} \notin \overline{\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} H_n} = \mathfrak{H}_1$, полагая $\Omega_2 = e_{m_1} - P_{\mathfrak{H}_1} e_{m_1}$ ($P_{\mathfrak{H}_1}$ — ортопроектор на $\mathfrak{H}_1$), вводя соответствующее ядерное пространство Φ_2 и т. д., строим требуемое плотное в H линейное топологическое ядерное пространство $\Phi = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \Phi_k$, наделенное индуктивной (или, что то же, проективной) топологией.

Выделим две причины, по которым для (не связанных соотношениями) операторов $(C_k)_{k=1}^{\infty}$ всегда существует ядерное оснащение: их ограниченность и счетность семейства.

Пусть (A_k) и (B_j) — конечные или счетные наборы, но неограниченных операторов в H (не связанных соотношениями). Тогда несложно привести пример даже двух неограниченных операторов A и B таких, что их области определения $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(B) = \{0\}$, и, конечно, ни о каком оснащении не может быть речи. Соотношения между операторами могут здесь резко улучшить ситуацию: для счетного набора $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ коммутирующих самосопряженных операторов всегда существует ядерное оснащение [17].

Утверждение 4. *Если операторы $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ самосопряжены и попарно коммутируют или антикоммутируют между собой, то ядерное оснащение существует.*

Доказательство. Так как счетное семейство операторов $(A_j^2)_{j=1}^{\infty}$ коммутативно, то существует базис в H $e_1, \ldots, e_n, \ldots$, состоящий из ограниченных для операторов $(A_j)_{j=1}^{\infty}$ векторов. Далее конструкция оснащения Φ следует доказательству утверждения 3.

Существуют ядерные оснащения и для операторов представления образующих конечномерной алгебры Ли (продолжающегося до представления (соответствующей группы Ли) [18], и для некоторых счетномерных алгебр Ли [19—21]. Для конечных и счетных наборов неограниченных операторов (A_k) и (B_j), связанных соотношениями [1], в общей ситуации вопросы построения оснащения не изучались.

Для несчетных семейств коммутирующих неограниченных операторов $(A_x)_{x\in X}$ оснащение не всегда существует, так как они могут иметь $\bigcap_{x\in X}\mathcal{D}(A_x) = \{0\}$ [20]. Более того, и требование ограниченности операторов $(A_x)_{x\in X}$ не обеспечивает существование оснащения.

Пример 3. Для семейства ограниченных коммутирующих самосопряженных операторов $(Q_{f(\cdot)})_{f\in E}$ в $L_2([a, b], dx)$ умножения на всевозможные существенно ограниченные функции $f(\cdot)$ не существует ядерного оснащения.

Условия существования оснащения в терминах наличия достаточно хороших спектральных представлений для операторов несчетного коммутативного семейства операторов приведены в [23]. Вопросы существования оснащения изучались для самосопряженных представлений ядерных пространств, для некоторых «больших» алгебр Ли [24—27]. Однако даже для представлений важной в приложениях алгебры Ли векторных полей на окружности, алгебры Вирассоро (и близких к ней) вопросы существования оснащения, по-видимому, не изучены.

3. Коммутативные модели. В настоящем пункте для оператора B построена коммутативная модель — найдена реализация в пространстве Фурье-образов коммутативного семейства $(A_x)_{x\in X}$; приведены примеры.

3.1. Напомним предварительно конструкцию преобразования Фурье, связанного с семейством коммутирующих операторов $\mathfrak{A} = (A_x)_{x\in X}$ [1, 2].

Пусть $H_- \supset H \supset H_+$ — гильбертово оснащение пространства H, причем вложение $O : H_+ \subset\!\!\to H$ квазиядерно, $\rho(\Delta) = \mathrm{Tr}\, O^+ E(\Delta)\, O$ — спектральная мера, $P(\lambda(\cdot)) : H_- \to H_+$ — обобщенные проекторы $(dO^+ E \times \times (\lambda(\cdot))\ O = P(\lambda(\cdot))\ d\rho(\lambda(\cdot)))$. Для $\rho(\cdot)$ — п. в. $\lambda(\cdot)$ оператор $J^+ P(\lambda(\cdot))\, J : H \to H (J : H \to H_+,\ J^+ : H_- \to H$ — изометрии, построенные по оснащению) — оператор Гильберта—Шмидта в H, для которого норма Гильберта — Шмидта $\| J^+ P(\lambda(\cdot)) J \| = 1$. Пусть $\psi_\gamma(\lambda(\cdot))$, $\gamma = 1, \ldots \ldots, N_{\lambda(\cdot)} \leqslant \infty$,— набор нормированных собственных векторов оператора $J^+ P\, \lambda(\cdot))\, J$, соответствующих ненулевым собственным значениям $\nu_\gamma(\lambda(\cdot))$. Каждому вектору $u \in H_+$ ставится в соответствие его преобразование Фурье

$$\tilde{u}(\lambda(\cdot)) = (\tilde{u}_1(\lambda(\cdot)), \tilde{u}_2(\lambda(\cdot)), \ldots) \in l_2(N_{\lambda(\cdot)}),$$

$$\tilde{u}_\gamma(\lambda(\cdot)) = (\nu_\gamma(\lambda(\cdot)))^{-1/2} (u, P(\lambda(\cdot))\, J^{-1} \psi_\gamma(\lambda(\cdot))).$$

При этом пространство H изоморфно прямому интегралу

$$H = \int_{\mathbb{R}^X} l_2(N_{\lambda(\cdot)})\, d\rho(\lambda(\cdot))$$

и выполнено равенство Парсеваля

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^X} (\tilde{u}(\lambda(\cdot)), \tilde{v}(\lambda(\cdot)))_{l_2(N_{\lambda(\cdot)})}\, d\rho(\lambda(\cdot)), \quad u, v \in H_+.$$

Теорема 3 [22]. *Пусть существует ядерное оснащение $\Phi' \supset H \supset \Phi$, стандартно связанное с операторами $B, B^*, A_x, \varphi_x(\mathfrak{A})$, $x \in X$. Пусть для операторов $(A_x)_{x\in X}$, B выполнены соотношения $A_x B = B \varphi_x(\mathfrak{A})$ в смысле п. 1. Тогда в пространстве Фурье-образов семейства $\mathfrak{A}$ для $u \in \Phi$*

$$(Bu)^{\sim}(\lambda(\cdot)) = b(\lambda(\cdot))\, \chi_{\Delta_0}(\lambda(\cdot)) \left[\frac{d\rho(\varphi^{-1}(\lambda(\cdot)))}{d\rho(\lambda(\cdot))}\right]^{1/2} \tilde{u}(\varphi^{-1}(\lambda(\cdot))),$$

$$(B^* u)^{\sim}(\lambda(\cdot)) = b^*(\varphi(\lambda(\cdot))\, \chi_{\varphi(\Delta_0)}(\lambda(\cdot)) \left[\frac{d\rho(\varphi(\lambda(\cdot)))}{d\rho(\lambda(\cdot))}\right]^{1/2} \tilde{u}(\varphi(\lambda(\cdot))). \tag{2}$$

Здесь $\Delta_0 = \{\lambda(\cdot) \in \mathbb{R}^X \mid P(\lambda(\cdot)) B \neq 0\}$, *мера* $\chi_{\Delta_0}(\lambda(\cdot))\, d\rho(\varphi^{-1}(\lambda(\cdot)))$ *абсолютно непрерывна относительно* $d\rho(\lambda(\cdot))$, $b(\lambda(\cdot))$ — *слабо измеримая операторнозначная функция* $b(\lambda(\cdot)) : l_2(N_{\varphi^{-1}(\lambda(\cdot))}) \to l_2(N_{\lambda(\cdot)})$.

Если B обратим как оператор $B : \Phi \to \Phi$, *то для* ρ-*п. в.* $\lambda(\cdot) \in \mathbb{R}^X$ $N_{\varphi^{-1}(\lambda(\cdot))} = N_{\lambda(\cdot)}$. *Если оператор B ограничен, то* (2) *справедливо для всех* $u \in H$, *при этом оператор-функция* $b(\cdot)$ *существенно ограничена; если B унитарен, то значения* $b(\lambda(\cdot))$ *при* ρ — *п. в.* $\lambda(\cdot)$ — *унитарные операторы.*

Доказательство проведем в несколько этапов.

а) Пусть $\Delta_0 = \{\lambda(\cdot) \in \mathbb{R}^X \mid P(\lambda(\cdot)) B \neq 0\}$.

Лемма 2. *Множество* Δ_0 *измеримо; мера* $\chi_{\Delta_0}(\lambda(\cdot))\, d\rho(\varphi^{-1}(\lambda(\cdot)))$ *абсолютно непрерывна относительно* $d\rho(\lambda(\cdot))$.

Доказательство. Измеримость Δ_0 следует из слабой измеримости $P(\cdot)$ и сепарабельности Φ.

Рассмотрим меру $\chi_{\varphi^{-1}(\Delta_0)}(\lambda(\cdot))\, d\rho(\varphi(\lambda(\cdot)))$ и покажем, что она абсолютно непрерывна относительно $d\rho(\lambda(\cdot))$. Для любых $\Delta \in C_\sigma(\mathbb{R}^X)$, $u, v \in \Phi$

$$\int_\Delta (P(\lambda(\cdot))u, B^*v)\, d\rho(\lambda(\cdot)) = (E(\Delta)u, B^*v) = (E(\varphi(\Delta))Bu, v) =$$

$$= \int_{\varphi(\Delta)} (P(\lambda(\cdot))Bu, v)\, d\rho(\lambda(\cdot)) = \int_\Delta (P(\varphi(\lambda(\cdot)))Bu, v)\, d\rho(\varphi(\lambda(\cdot))),$$

откуда заключаем, что $(P(\lambda(\cdot))u, B^*v)\, d\rho(\lambda(\cdot)) = P(\varphi(\lambda(\cdot)))Bu, v)\, d\rho(\varphi(\lambda(\cdot)))$ и для $\lambda(\cdot) \in \varphi^{-1}(\Delta_0)$

$$d\rho(\varphi(\lambda(\cdot))) = \frac{(P(\lambda(\cdot))u, B^*v)}{(P(\varphi(\lambda(\cdot)))Bu, v)}\, d\rho(\lambda(\cdot)). \tag{3}$$

Пусть для некоторого $\Delta \in C_\sigma(\mathbb{R}^X)$ $\rho(\Delta) = 0$. Разобьем Δ в объединение непересекающихся множеств: $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$, где $\Delta_1 = \Delta \cap \varphi^{-1}(\Delta_0)$. Тогда

$$\int_\Delta \chi_{\varphi^{-1}(\Delta_0)}(\lambda(\cdot))\, d\rho(\varphi(\lambda(\cdot))) = \rho(\varphi(\Delta_1)) + \int_{\Delta_2} \chi_{\varphi^{-1}(\Delta_0)}(\lambda(\cdot))\, d\rho(\varphi(\lambda(\cdot))) = 0.$$

Здесь первое слагаемое равно нулю в силу (3), второе — в силу дизъюнктности Δ_2 и $\varphi^{-1}(\Delta_0)$. Таким образом, $\chi_{\varphi^{-1}(\Delta_0)}(\lambda(\cdot))\, d\rho(\varphi(\lambda(\cdot))) \ll \ll d\rho(\lambda(\cdot))$.

Аналогично, множество $\Delta^0 = \{\lambda(\cdot) \mid P(\lambda(\cdot)) B^* \neq 0\}$ измеримо и $\chi_{\varphi(\Delta^0)}(\lambda(\cdot))\, d\rho(\varphi^{-1}(\lambda(\cdot))) \ll d\rho(\lambda(\cdot))$. Для доказательства леммы остается заметить, что $\Delta_0 = \varphi(\Delta^0)$.

б). Для любых $u, v \in \Phi$ и ρ-п. в. $\lambda(\cdot) \in \mathbb{R}^X$

$$(P(\lambda(\cdot))u, Bv) = \chi_{\Delta_0}(\lambda(\cdot)) \frac{d\rho(\varphi^{-1}(\lambda(\cdot)))}{d\rho(\lambda(\cdot))} (P(\varphi^{-1}(\lambda(\cdot)))B^*u, v),$$

$$(P(\lambda(\cdot))u, B^*v) = \chi_{\varphi^{-1}(\Delta_0)}(\lambda(\cdot)) \frac{dp(\varphi(\lambda(\cdot)))}{dp(\lambda(\cdot))} (P(\varphi(\lambda(\cdot)))Bu, v). \tag{4}$$

Для доказательства нужно воспользоваться формулами $(E(\Delta)u, Bv) = (E(\varphi^{-1}(\Delta))B^*u, v)$, $(E(\Delta)u, B^*v) = (E(\varphi(\Delta))Bu, v)$ и полученными результатами об абсолютной непрерывности мер.

в). Для дальнейших построений нам понадобится цепочка плотно вложенных гильбертовых пространств $H_{--} \supset H_- \supset H \supset H_+ \supset H_{++} \supset \supset \Phi$, где $H_{--} = H'_{++}$, $H_- = H'_+$, причем вложение $O_1 : H_+ \subset\!\!\to H$ квазиядерно, вложения $O_2 : H_{++} \subset\!\!\to H_+$, $O : \Phi \subset\!\!\to H_{++}$ непрерывны и оператор B действует непрерывно из H_{++} в H_+.

Каждое из пространств H_+, H_{++} квазиядерно вложено в H, что позволяет построить по каждому из них преобразование Фурье. Пусть $\rho_+(\Delta) = = \operatorname{Tr} O_1^+ E(\Delta) O_1$, $\rho_{++}(\Delta) = \operatorname{Tr} O_2^+ O_1^+ E(\Delta) O_1 O_2$— эквивалентные спектральные меры, $dO_1^+ E(\lambda(\cdot)) O_1 = P_+(\lambda(\cdot))\, d\rho_+(\lambda(\cdot))$, $dO_2^+ O_1^+ E(\lambda(\cdot)) \times$

$\times O_1O_2 = P_{++}(\lambda(\cdot))\, d\rho_{++}(\lambda(\cdot))$; при этом для ρ-п. в. $\lambda(\cdot)$ $P_{++}(\lambda(\cdot)) = \frac{d\rho_+(\lambda(\cdot))}{d\rho_{++}(\lambda(\cdot))} O_2^+ P_+(\lambda(\cdot))\, O_2$. Преобразование Фурье вектора $u \in \Phi$, соответствующее цепочке $H_- \supset H \supset H_+$, будем обозначать $\tilde{u}_+(\lambda(\cdot))$, цепочке $H_{--} \supset H \supset H_{++}$ — $\tilde{u}_{++}(\lambda(\cdot))$.

г). Найдем действие оператора B в пространстве Фурье-образов. Для $u \in \Phi$, ρ-п. в. $\lambda(\cdot) \in \mathbb{R}^X$

$$(\widetilde{Bu})_{++,j} = (\nu_{++,j}(\lambda(\cdot)))^{-1/2} (Bu, P_{++}(\lambda(\cdot))\, J_{++}^{-1}\psi_{++,j}(\lambda(\cdot))) =$$

$$= (\nu_{++,j}(\lambda(\cdot)))^{-1/2} (u, B^* P_{++}(\lambda(\cdot))\, J_{++}^{-1}\psi_{++,j}(\lambda(\cdot))) = (\nu_{++,j}(\lambda(\cdot)))^{-1/2} \times$$

$$\times \frac{d\rho_+(\lambda(\cdot))}{d\rho_{++}(\lambda(\cdot))} \chi_{\Delta_0}(\lambda(\cdot)) \frac{d\rho_+(\varphi^{-1}(\lambda(\cdot)))}{d\rho_+(\lambda(\cdot))} (u, O_2^+ P_+(\varphi^{-1}(\lambda(\cdot)))\, B^* J_{++}^{-1}\psi_{++,j} \times$$

$$\times (\lambda(\cdot))) = \sum_{k=1}^{N_{\varphi^{-1}(\lambda(\cdot))}} \beta_{jk}(\lambda(\cdot))\, \chi_{\Delta_0}(\lambda(\cdot)) \left(\frac{d\rho_+(\varphi^{-1}(\lambda(\cdot)))}{d\rho_+(\lambda(\cdot))}\right)^{1/2} \tilde{u}_{+,k}(\varphi^{-1}(\lambda(\cdot))),$$

где

$$\beta_{jk}(\lambda(\cdot)) = \left(\frac{\nu_{+,k}(\varphi^{-1}(\lambda(\cdot)))}{\nu_{++,j}(\lambda(\cdot))}\right)^{1/2} \frac{d\rho_+(\lambda(\cdot))}{d\rho_{++}(\lambda(\cdot))} \chi_{\Delta_0}(\lambda(\cdot)) \times$$

$$\times \frac{d\rho_+(\varphi^{-1}(\lambda(\cdot)))}{d\rho_+(\lambda(\cdot))}\Bigg)^{1/2} (J_+^{-1}\psi_{+,k}(\varphi^{-1}(\lambda(\cdot))),\, B^* J_{++}\psi_{++,j}(\lambda(\cdot)))_{H_+}.$$

Таким образом, полагая $\beta(\lambda(\cdot)) = \beta_{jk}(\lambda(\cdot)) : l_2(N_{\varphi^{-1}(\lambda(\cdot))}) \to l_2(N_{\lambda(\cdot)})$, получаем

$$(\widetilde{Bu})_{++}(\lambda(\cdot)) = \chi_{\Delta_0}(\lambda(\cdot)) \left(\frac{d\rho_+(\varphi^{-1}(\lambda(\cdot)))}{d\rho_+(\lambda(\cdot))}\right)^{1/2} \beta(\lambda(\cdot))\, \tilde{u}_+(\varphi^{-1}(\lambda(\cdot))).$$

Рассмотрим при ρ-п. в. $\lambda(\cdot)$ оператор $c(\lambda(\cdot)) : l_2(N_{\lambda(\cdot)}) \to l_2(N_{\lambda(\cdot)})$ такой, что $c(\lambda(\cdot))\, \tilde{u}_{++}(\lambda(\cdot)) = \tilde{u}_+(\lambda(\cdot))$. Полагая $b(\lambda(\cdot)) = c(\lambda(\cdot)) \times \beta(\lambda(\cdot))$, находим

$$(\widetilde{Bu})_+(\lambda(\cdot)) = b(\lambda(\cdot))\, \chi_{\Delta_0} \left(\frac{d\rho_+(\varphi^{-1}(\lambda(\cdot)))}{d\rho_+(\lambda(\cdot))}\right)^{1/2} \tilde{u}_+(\varphi^{-1}(\lambda(\cdot)).$$

Аналогично может быть получена формула для $(\widetilde{B^* u})(\lambda(\cdot))$,

д) Если оператор $B : \Phi \to \Phi$ обратим, из (4) следует, что $l_2(N_{\lambda(\cdot)})$ и $l_2(N_{\varphi^{-1}(\lambda(\cdot))})$ изоморфны и $N_{\lambda(\cdot)} = N_{\varphi^{-1}(\lambda(\cdot))}$.

Остальные утверждения теоремы могут быть легко получены из доказанного представления (2).

З а м е ч а н и е 3. Преобразование Фурье при построении коммутативной модели производится с использованием пространства H_+, которое можно выбрать независимо от B (по оператору B выбирается H_{++}). Это позволяет получить коммутативную модель не только для одного оператора B, а для произвольного семейства операторов $(B_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$, связанных с операторами $(A_x)_{x \in X}$ соотношениями $A_x B_\alpha = B_\alpha \varphi_{\alpha,x}(\mathfrak{A})$ в смысле п. 1. При этом следует потребовать, чтобы операторы $(B_\alpha, B_\alpha^*)_{\alpha \in \Lambda}$ были стандартно связаны с оснащением Φ.

З а м е ч а н и е 4. Теорема 3 остается в силе, если требование самосопряженности коммутирующих операторов $(A_x)_{x \in X}$ заменить требованием их нормальности.

3.2. Приведем некоторые примеры семейств операторов, для которых построены коммутативные модели (к. м.).

П р и м е р 4. Унитарные представления T_g топологических групп $G = N \otimes K$ (полупрямых произведений коммутативной нормальной подгруппы N на подгруппу ее автоморфизмов K).

Пусть существует ядерное оснащение $\Phi' \supset H \supset \Phi$, стандартно связанное с операторами $(T_g)_{g\in G}$. Тогда [2] в спектральном представлении для коммутативного семейства операторов $(T_n)_{n\in N}$ можно перейти к интегрированию по множеству $\hat{N}$ непрерывных характеров группы $N: T_n = \int_{\hat{N}} \chi(n)\, dE(\chi(\cdot))$ и, так как $T_g^* E(\Delta) = E(g^{-1}\Delta g)\, T_g^*$, $g \in G$, $\Delta \in C_\sigma(\hat{N})$, $g^{-1}\chi(n)\, g = \chi(g^{-1}ng)$, то для унитарных операторов $(T_g)_{g\in G}$ справедливо представление в пространстве Фурье-образов семейства $(T_n)_{n\in N}$: : для $\tilde{f}(\cdot) \in \oplus L_2(\hat{N}, d\rho_k\, (\chi(\cdot))$

$$(\widetilde{T_n f})(\chi(\cdot)) = \chi(n)\tilde{f}(\chi(\cdot)), \quad n \in N;$$

$$(\widetilde{T}_k f)(\chi(\cdot)) = U(k, \chi(\cdot)) \left(\frac{d\rho(k^{-1}\chi(\cdot)\, k)}{d\rho(\chi(\cdot))}\right)^{1/2} \tilde{f}(k^{-1}\chi(\cdot)\, k), \quad k \in K.$$

Соотношения $T_{g_1g_2} = T_{g_1}T_{g_2}$ влекут для унитарной измеримой оператор-функции $U(\cdot, \cdot)$ соотношения $U(k_1k_2, \chi(\cdot)) = U(k_1, \chi(\cdot)\, U(k_2, k_1^{-1}\chi(\cdot)\, k_1)$ для всех $k_1, k_2 \in K$ и ρ-п. в. $\chi(\cdot)$.

Представления локально компактных групп $G = N \otimes K$ изучал Макки [28, 29], к. м. для представлений канонических коммутационных соотношений (ККС) в форме Вейля для систем с бесконечным числом степеней свободы получены в [6], для унитарных представлений группы $SL(2, \mathbb{R})^X$ — в [8, 9], важной в физических приложениях группы $S(\mathbb{R}^d) \times \mathrm{Diff}(\mathbb{R}^d)$— в [30—32], для ядерных нильпотентных групп Ли токов — в [27, 33] и т. д.

П р и м е р 5. $*$-представления C^*-алгебр.

а). К. м. для представлений C^*-алгебры квазилокальных наблюдаемых одномерной квантовой спиновой системы со счетным числом степеней свободы получены в [17, 34]. Выделим в этой C^*-алгебре образующие $(Z_k, X_k)_{k=1}^\infty$ и соответствующие операторы $(Z_k, X_k)_{k=1}^\infty$ представления этих образующих, удовлетворяющие соотношениям

$$Z_k^* = Z_k,\ X_k^* = X_k,\ Z_k^2 = X_k^2 = I, \quad k = 1, 2, \ldots,$$
$$[Z_k, Z_j] = [X_k, X_j] = 0, \quad k, j = 1, 2, \ldots,$$
$$[Z_k, X_j] = 0, \quad k \neq j,$$
$$\{Z_k, X_k\} = Z_kX_k + X_kZ_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

В качестве семейства коммутирующих самосопряженных операторов выберем операторы $(Z_k)_{k=1}^\infty$. Их совместный спектр $-\mathbb{Z}_2^\infty = \prod_1^\infty \mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}^\infty$ — коммутативная группа последовательностей $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots)$, $\lambda_k = \pm 1$, $\mathbb{Z}_{2,0}^\infty = \sum_1^\infty \mathbb{Z}_2 \subset \mathbb{Z}_2^\infty$ — подгруппа последовательностей, имеющих конечное число $\lambda_k = -1$, $e_j = (1, \ldots, \underbrace{1, -1, 1, \ldots}_{j\text{-е место}})$. Так как $[Z_j, X_k] = 0$, $j \neq k$, и $\{Z_k, X_k\} = 0$, то $\varphi_k(\lambda) = \varphi_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, -\lambda_k, \lambda_{k+1} \ldots) = e_k\lambda$. Поскольку для счетного семейства ограниченных операторов оснащение всегда существует, то для операторов $(Z_k, X_k)_{k=1}^\infty$ выполнены условия теоремы 3.

б). Классические результаты Гординга, Вайтмана [3] (см. также [7]) связаны с построением к. м. для представлений другого набора образующих в этой же C^*-алгебре: набора $(a_k)_{k=1}^\infty$ ограниченных операторов, удовлетворяющих каноническим антикоммутационным соотношениям систем с бесконечным числом степеней свободы $\{a_j, a_k\} = 0$, $\{a_j, a_k^*\} = \delta_{jk}I$, $j, k = 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим самосопряженные операторы $A_k = (a_k + a_k^*)$, $B_k = i^{-1}(a_k - a_k^*)$, $k = 1, 2, \ldots$, удовлетворяющие соотношениям $\{A_k, A_j\} = \{B_k, B_j\} = 0$, $k \neq j$, $\{A_k, B_j\} = 0$, $k, j = 1, 2, \ldots$. В качестве набора коммутирующих самосопряженных операторов выберем проекторы $(N_k = a_k^* a_k)_{k=1}^{\infty}$. Совместный спектр коммутативного семейства — коммутативная группа $\mathbb{Z}_2^{\infty} = \prod_1^{\infty} \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}_{k=1}^{\infty}$ последовательностей $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots)$ из нулей и единиц, $\mathbb{Z}_{2,0}^{\infty} = \sum_1^{\infty} \mathbb{Z}_2$ — подгруппа последовательностей $\lambda \in \mathbb{Z}_2^{\infty}$, имеющих лишь конечное число $\lambda_k = 1$, $e_j = (0, \ldots, \underbrace{0, 1, 0, \ldots}_{k\text{-е место}})$. Так как $[A_k, N_j] = 0$, $k \neq j$, и $\{A_k, N_k\} = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, то $\varphi_k(\lambda) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}, \lambda_k + 1 \pmod 2, \lambda_{k+1}, \ldots)$. Поскольку для счетного набора ограниченных операторов оснащение всегда существует, то по теореме 3 для операторов $(A_k, B_k)_{k=1}^{\infty}$ может быть построена к. м.

в). В работе [35] доказано, что в любой AK — C^*-алгебре можно выбрать набор образующих ее ортопроекторов, связанный с коммутативным поднабором ортопроекторов соотношениями вида (1), и построены к. м. для ее *-представлений.

г). Пусть $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ — сепарабельные C^*-алгебры типа I. Тогда для циклических фактор-представлений C^*-алгебры $\mathfrak{A} = \lim \operatorname{ind} \mathfrak{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathfrak{A}_n$ к. м. приведены в [17] (§ 8).

Пример 6. К. м. для представлений счетномерных алгебр Ли.

В примерах соотношения, связывающие операторы набора, не всегда имеют вид (1), однако их изучение может быть проведено с помощью построения моделей для других образующих этого набора.

а). Пусть $(P_k, Q_j)_{k,j=1}^{\infty}$ — существенно самосопряженные на инвариантном плотном в H множестве Φ совместных целых векторов операторы такие, что

$$(P_k Q_j - Q_j P_k) u = -i\delta_{jk} u, \quad u \in \Phi, \quad [Q_k, Q_j] u = [P_k, P_j] u = 0.$$

При этом канонические коммутационные соотношения имеют место в форме Г. Вейля, т. е. продолжаются до унитарного представления бесконечномерной группы Гейзенберга: $G \ni (t, s, \alpha) \mapsto U_{(t,s,\alpha)} = e^{i\Sigma t_k P_k} \times e^{i\Sigma s_k Q_k} e^{i\alpha}$, $t, s \in \mathbb{R}_0^{\infty}$, $\alpha \in \mathbb{R}^1$. Верно и обратное [25] т. е. если задано унитарное представление канонических коммутационных соотношений в форме Г. Вейля, то существует ядерное инвариантное относительно обертывающей алгебры, порожденной операторами $(P_k, Q_j)_{k,j=1}^{\infty}$ множество совместных целых векторов Φ. Операторы $N_k = \frac{1}{2}(P_k^2 + Q_k^2 - I)$ существенно самосопряжены на Φ, коммутируют и имеют дискретный спектр $0, 1, \ldots, n, \ldots \in \mathbb{Z}_+$. Совместный спектр семейства $(N_k)_{k=1}^{\infty}$ — $\mathbb{Z}_+^{\infty} \ni (n_1, n_2, \ldots)$, $n_k \geqslant 0$, наделим естественной σ-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами в $\mathbb{Z}_+^{\infty}$. Операторы рождения $a_k^* = P_k + iQ_k$ и уничтожения $a_k = P_k - iQ_k$ удовлетворяют соотношениям $[N_k, a_k^*] u = a_k^* u$, $[N_k, a_k] u = -au$, $k = 1, 2, \ldots$; $u \in \Phi$.

Пользуясь теоремой 3, получим представление ККС систем со счетным числом степеней свободы в форме Гординга, Вайтмана [4].

Заметим, что в работе [21] представление Гординга, Вайтмана для ККС систем со счетным числом степеней свободы применялось для построения области Гординга — плотного инвариантного множества аналитических векторов.

б). Пусть операторы $(A_1^{(k)}, A_2^{(k)}, A_3^{(k)})$ (представления базиса в $su(2)_0^{\infty}$) ограничены в H, кососамосопряжены и удовлетворяют соотношениям

$$[A_1^{(k)}, A_2^{(j)}] = \delta_{kj} A_3^{(k)}, \ [A_2^{(k)}, A_3^{(j)}] = \delta_{kj} A_1^{(k)}, [A_3^{(k)}, A_1^{(j)}] = \delta_{jk} A_2^{(k)} \quad k, j = 1, 2, \ldots.$$

Вводя операторы $E_0^{(k)} = iA_3^{(k)}$, $E_+^{(k)} = i(A_1^{(k)} + iA_2^{(k)})$, $E_-^{(k)} = i(A_1^{(k)} - iA_2^{(k)})$, получаем следующие условия коммутации

$$[E_0^{(k)}, E_+^{(j)}] = \delta_{k,j}E_+^{(k)},\ [E_0^{(k)}, E_-^{(j)}] = -\delta_{kj}E_-^{(k)},\ [E_+^{(k)}, E_-^{(j)}] = 2\delta_{kj}E_0^{(k)},\ k,j = 1,2,\ldots,$$

и сопряжения $(E_0^{(k)})^* = E_0^{(k)}$, $(E_+^{(k)})^* = E_-^{(k)}$.

Если мы предположим, что соответствующее унитарное представление группы $SU(2)_0^\infty$ неприводимо, то операторы Казимира $\Delta_k = \frac{1}{2}(E_-^{(k)}E_+^{(k)} + E_+^{(k)}E_-^{(k)}) + E_0^{(k)^2} = l_k(l_k+1)I$, где l_k — целое или полуцелое число. При этом спектр оператора $E_0^{(k)}$ равен $T_{l_k} = \{-l_k, -l_k+1, \ldots, l_k\}$. Так как семейство коммутирующих операторов $(E_0^{(k)})_{k=1}^\infty$ и операторы $(E_+^{(k)})_{k=1}^\infty$, ограничены, то по теореме 3, учитывая соотношения $[E_+^{(k)}, E_-^{(j)}] = 2\delta_{jk}E_0^{(k)}$, получаем к. м. для операторов $(E_0^{(k)}, E_+^{(k)}, E_-^{(k)})_{k=1}^\infty$ [17].

в). Рассмотрим набор операторов $(E_0^{(k)}, E_+^{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$, заданных на плотном в H инвариантном ядерном пространстве Φ целых векторов для эрмитовых на Φ операторов $(E_0^{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$ таких, что

$$[E_0^{(k)}, E_0^{(j)}]u = [E_+^{(k)}, E_+^{(j)}]u = 0,\ [E_0^{(k)}, E_+^{(j)}]u = E_+^{(k+j)}u, \quad u\in\Phi;\ k, j\in\mathbb{Z}.$$

Если дополнительно ввести те или иные связи операторов набора с операторами $(E_-^{(k)})_{k\in\mathbb{Z}}$, то эти операторы порождают кососамосопряженное представление счетномерной алгебры Ли $\hat{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}\otimes T(S^1)$ тригонометрических отображений окружности $S^1 \ni \theta$ в соответствующую алгебру Ли $\mathfrak{G}$, равной л. о. $\{E_0^{(k)} = E_0\otimes e^{ik\theta}, E_\pm^{(k)} = E_\pm\otimes e^{ik\theta}\}$.

Пусть операторы набора таковы что на Φ имеют смысл операторы $E_+(\delta_\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\theta}E_+^{(k)}$, $\theta\in S^1$. Тогда соотношения

$$[E_0^{(j)}, E_+(\delta_\theta)]u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\theta}[E_0^{(j)}, E_+^{(k)}]u = \sum_{k\in\mathbb{Z}} e^{ik\theta}E_+^{(k+j)}u = e^{-ij\theta}E_+(\delta_\theta)u$$

имеют вид (1) и позволяют для этих операторов строить к. м. [22].

1. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев : Наук. думка, 1978.— 360 с.
2. *Березанский Ю. М.* Проекционная спектральная теорема // Успехи мат. наук.— 1984.— **39**, вып. 4.— С 3—52.
3. *Gårding L., Wightman A.* Representations of the anticommutation relations // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1954.— **40**, N 9.— P. 617—622.
4. *Gårding L., Wightman A.* Representations of the commutation relations // Ibid.— P. 623—626.
5. *Araki H.* Hamiltonian formalism and canonical relations in quantum field theory // J. Math. Phys.— 1960.— **1**, N 4.— P. 492—504.
6. *Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я.* Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства.— М. : Физматгиз 1961.— 472 с.
7. *Голодец В. Я.* Описание представлений антикоммутационных соотношений // Успехи мат. наук.— 1969.— **24**, вып. 4.— С. 3—64.
8. *Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И.* Представления группы $SL(2, R)$, где R — кольцо функций // Там же.— 1973.— **28**, вып. 5.— С. 83—128.
9. *Вершик А. М., Гельфанд И. М., Граев М. И.* Коммутативная модель представления группы токов $SL(2, \mathbb{R})^X$, связанная с унипотентной подгруппой // Функцион. анализ и его прил.— 1983.— **17**, вып. 2.— С. 70—72.
10. *Исмагилов Р. С.* Об унитарных представлениях группы диффеоморфизмов гладкого многообразия // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1972.— **36**, № 1.— С. 180—208.
11. *Исмагилов Р. С.* Об унитарных представлениях группы $C_0^\infty(X, G)$, $G = SU_2$ // Мат. сб.— 1976.— **100**, № 1.— С. 117—131.
12. *Кириллов А. А.* Динамические системы, факторы и представления групп // Успехи мат. наук.— 1967.— **22**, вып. 5.— С. 67—80.
13. *Кириллов А. А.* Представления некоторых бесконечных групп Ли// Вестн. Моск. ун-та — 1974.— № 1.— С. 75—83.
14. *Stratila S., Voiculescu D.* Representations of AF-algebras and of the group $U(\infty)$ // Lect. Notes Math.— 1975.— **486**.— 169 p.
15. *Nelson E.* Analytic vectors // Ann. Math.— 1959.— **70**, N 3.— P. 572—615.

16. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики· В 4-х т. Функциональный анализ.— М. : Мир, 1977.— Т. 1.— 357 с.
17. *Самойленко Ю. С.* Спектральная теория наборов самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1984.— 232 с.
18. *Кац Г. И.* Обобщенные функции на локально компактной группе и разложения унитарных представлений // Тр. Моск. мат. о-ва.— 1960.— **10**.— С. 3—40.
19. *Косяк А. В., Самойленко Ю. С.* О семействах коммутирующих самосопряженных операторов // Укр. мат. журн.— 1979.— **31**, № 5.— С. 555—558.
20. *Косяк А. В., Самойленко Ю. С.* Область Гординга и целые векторы для индуктивных пределов коммутативных локально компактных групп // Там же.— 1982.— **35**, № 4.— С. 427—434.
21. *Reed M.* A Gårding domain for quantum fields// Communs. Math. Phys.— 1969.— **14**, N 4.— P. 336—346.
22. *Березанский Ю. М., Островский В. Л,, Самойленко Ю. С.* Разложение по собственным функциям семейств коммутирующих операторов и представления коммутационных соотношений // Укр. мат. журн.— 1988.— **40**, № 1.— С. 106—109.
23. *Березанский Ю. М.* О проекционной спектральной теореме // Тем же.— 1985.— **37**. № 2.— С. 146—154.
24. *Hegerfeldt G. C.* Gårding domain and analytic vectors for quantum fields // J. Math. Phys.— 1972.— **13**, N 6.— P. 821—827.
25. *Косяк А. В.* Область Гординга для представлений канонических коммутационных соотношений // Укр. мат. журн.— 1984.— **36**, № 6.— С. 709—715.
26. *Косяк А. В.* Область Гординга и продолжение унитарных представлений бесконечномерных групп : Автореф. дис. ... канд физ.- мат. наук.— Киев, 1985.— 19 с.
27. *Островский В. Л.* Аналог теоремы Нельсона для ядерных нильпотентных алгебр Ли токов // Спектральная теория операторов и бесконечномерный анализ.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 120—131.
28. *Mackey G.* Imprimitivity for representations of locally compact groups. I // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1949.— **35**.— P. 537—545.
29. *Mackey G.* Induced representations of locally compact groups. I. // Ann. Math.— 1952.— **55**, N 2.— P. 101—139.
30. *Menikoff R., Sharp D. H.* Representations of a local current algebra : their dynamical determination // J. Math. Phys.— 1975.— **16**, N 12.— P. 2341—2360.
31. *Боголюбов Н. Н. (мл.). Прикарпатский А. К.* Квантовый метод производящих функционалов Н. Н. Боголюбова в статистической физике: алгебра Ли токов, ее представления и функциональные уравнения // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 3.— С. 284—289.
32. *Интегрируемые* динамические системы: спектральные и дифференциально-геометрические аспекты / Ю. А. Митропольский, Н. Н. Боголюбов (мл.), А. К. Прикарпатский, В. Г. Самойленко.— Киев : Наук. думка, 1987.— 296 с.
33. *Островский В. Л.* Неприводимые представления группы бесконечных верхнетреугольных матриц // Укр. мат. журн.— 1986.— **38**, № 2.— С. 255—259.
34. *Коломыцев В. И., Самойленко Ю. С.* О счетном наборе коммутирующих самосопряженных операторов и алгебре локальных наблюдаемых // Там же.— 1979.— **31**, № 4.— С. 365—371.
35. *Жолткевич Г. Н.* Представления простых *АК*-алгебр // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1984.— № 4.— С. 9—11.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 09.06.87