УДК 517.9

А. М. Самойленко, Р. И. Петришин

Метод усреднения в многочастотных системах с медленно меняющимися параметрами

Одним из наиболее плодотворных методов исследования процессов, возникающих в теории нелинейной механики, физики, техники, является метод усреднения, строгое математическое обоснование которого заложено в основополагающих трудах Н. Н. Боголюбова [1, 2]. Дальнейшее развитие и обобщение этот метод получил в работах Ю. А. Митропольского [2, 3], а также в работах его учеников и последователей [4—7]. В случае колебательных систем с переменными частотами обоснование и применение метода усреднения в значительной мере усложняются в связи с появлением резонансных соотношений между компонентами вектора частот [8—10]. Для одночастотной системы с отличной от нуля частотой резонансные режимы отсутствуют, но если число частот $m \geqslant 2$, то явление резонанса в исследуемых системах типично.

В настоящей статье рассматривается метод усреднения для некоторых многочастотных систем, дается его обоснование как на конечном, так и на бесконечном временном интервале, а также изучается количественная зависимость оценок погрешности от величины малого параметра.

Пусть задана система обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$dx/dt = \varepsilon a(x, \varphi, \varepsilon t, \varepsilon), \quad d\varphi/dt = \omega(\varepsilon t) + \varepsilon b(x, \varphi, \varepsilon t, \varepsilon), \tag{1}$$

где $x=(x_1, \dots, x_n) \in D$, $\varphi=(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \in R^m$, $\omega(\tau)=(\omega_1(\tau), \dots, \omega_m(\tau)) \in C^p(R)$, $p \geqslant m-1$, $a(x, \varphi, \tau, \varepsilon)$ и $b(x, \varphi, \tau, \varepsilon)$ — 2π-периодические по φ_k, $k=\overline{1, m}$, и непрерывно дифференцируемые на множестве $D \times R^m \times R \times [0, \varepsilon_0] \equiv G$, $\tau = \varepsilon t$, $\varepsilon_0 \ll 1$.

Наряду с (1) будем рассматривать усредненную по угловым переменным φ систему первого приближения

$$d\bar{x}/d\tau = \bar{a}(\bar{x}, \tau), \ d\bar{\varphi}/d\tau = \omega(\tau)/\varepsilon + \bar{b}(\bar{x}, \tau), \ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \tag{2}$$

Здесь $[\bar{a}; \bar{b}] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^m \int\limits_0^{2\pi} \dots \int\limits_0^{2\pi} [a(\bar{x}, \varphi, \tau, 0); \ b(\bar{x}, \varphi, \tau, 0)]\, d\varphi_1 \dots d\varphi_m$.

Для получения эффективных оценок нормы разности решений исходных и усредненных уравнений потребуется равномерная оценка одномерного осцилляционного интеграла

$$\mathcal{I}_\lambda(t, \tau, \varepsilon) = \int\limits_t^{t+\tau} f(z) \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon}\int\limits_0^z (\lambda, \omega(y))\, dy\right\} dz, \qquad \tau \in [0, L], \ t \in R, \tag{3}$$

где i — мнимая единица, $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ — произвольный вектор m-мерной единичной сферы $S_m = \left\{\lambda : \|\lambda\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^m \lambda_k^2} = 1\right\}$, $f(t) \in C^1(R)$, $(\lambda, \omega) = \sum\limits_{k=1}^m \lambda_k \omega_k$ — скалярное произведение, L — некоторая положительная постоянная.

В работе [5] получена оценка $|\mathcal{I}_\lambda(0, \tau, \varepsilon)| \leqslant c\varepsilon^{1/m}$ с постоянной $c = c(\lambda)$, зависящей от λ, в предположении, что определитель Вронского функций $\omega_1(\tau), \dots, \omega_m(\tau)$ отличен от нуля $\forall \tau \in [0, L]$. Здесь мы другим способом получим равномерную оценку $\mathcal{I}_\lambda(t, \tau, \varepsilon)$.

Обозначим

$$W(t) = (\omega_k^{(l-1)}(t))_{k,l=1}^m, \ \omega_k^{(l-1)}(t) = \frac{d^{l-1}\omega_k(t)}{dt^{l-1}}, \qquad \Delta(t) = \det W(t).$$

Теорема 1. *Пусть* $|f(t)|$, $\left|\frac{d}{dt} f(t)\right|$ *и* $\|W^{-1}(t)\|$ *равномерно ограничены постоянной* σ_1, *а* $\omega_k^{(l-1)}(t)$, $k = \overline{1, m}$, $l = \overline{1, m}$, *равномерно непрерывны* $\forall t \in R$. *Тогда существуют постоянные* $\varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0$ *и не зависящая от* t, τ, λ *и* ε $\sigma_2 > 0$ *такие, что для всех* $t \in R$, $\tau \in [0, L]$, $\lambda \in S_m$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$ *справедлива оценка*

$$|\mathcal{I}_\lambda(t, \tau, \varepsilon)| \leqslant \sigma_2 \varepsilon^{1/m}. \tag{4}$$

Доказательство. Рассмотрим произвольное $\lambda \in S_m$ и обозначим $\gamma(z) = (\gamma_1(z), \dots, \gamma_m(z))$, $\gamma_l(z) = (\omega^{(l-1)}(z), \lambda)$. Тогда из равенства $W(z)\lambda = \gamma(z)$ получаем оценку $\|\gamma(z)\| \geqslant \frac{1}{\|W^{-1}(z)\|} \geqslant \frac{1}{\sigma_1} \forall z \in R$. Отсюда следует, что для каждого $\bar{z} \in R$ и $\lambda \in S_m$ существует целое число $r = r(\bar{z}, \lambda)$, $0 \leqslant r \leqslant m-1$, для которого

$$|(\lambda, \omega^{(r)}(\bar{z})) = \max_{0 \leqslant j \leqslant m-1} |(\lambda, \omega^{(j)}(\bar{z}))| \geqslant \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{m}}. \tag{5}$$

В силу равномерной непрерывности функций $\omega_k^{(j)}(z)$, $0 \leqslant j \leqslant m-1$, $1 \leqslant k \leqslant m$, и условия $\|\lambda\| = 1$ можно утверждать существование постоянной δ, не зависящей от t, τ, z, λ и такой, что $\forall z \in [\bar{z} - \delta, \bar{z} + \delta] \cap [t, t + \tau] = T$ выполняются неравенства

$$|(\lambda, \omega^{(r)}(z))| \geqslant \frac{1}{2\sigma_1\sqrt{m}} \equiv \bar{\sigma}_1, \ |(\lambda, \omega^{(j)}(z))| \leqslant 4|(\lambda, \omega^{(r)}(z))|,$$

$$j = \overline{0, m-1}, \quad j \neq r. \tag{6}$$

Из (6) следует, что функция $(\lambda, \omega^{(r-1)}(z))$ может обращаться в нуль на отрезке T не более, чем в одной точке z_1, причем при $z \in T \setminus [z_1 - \mu, z_1 + \mu]$, $0 < \mu < \delta/2^m$ справедливо неравенство $|(\lambda, \omega^{(r-1)}(z))| \geqslant \bar{\sigma}_1 \mu$. Если же $(\lambda, \omega^{(r-1)}(z))$ сохраняет знак на T, то в качестве z_1 выберем соответственно левый или правый конец этого отрезка в зависимости от того, будет возрастающей или убывающей функция $|(\lambda, \omega^{(r-1)}(z))|$. Считаем, что $([z_1 - \mu, z_1 + \mu] \cap T) \subset A(\bar{z}, \mu)$. Проведем аналогичные рассуждения для функций $(\lambda, \omega^{(l)}(z))$, $l = \overline{0, r-1}$. В результате получим, что множество $A(\bar{z}, \mu)$ состоит из $d_1(\bar{z}, \mu) \leqslant 2^{m-1} - 1$ отрезков, длина каждого из которых не превышает 2μ, а множество $B(\bar{z}, \mu) = T \setminus A(\bar{z}, \mu)$ — из $d_2(\bar{z}, \mu) \leqslant 2^{m-1}$ отрезков, на каждом из которых выполняется неравенство

$$|(\lambda, \omega(z))| \geqslant \bar{\sigma}_1 \mu^{m-1}. \tag{7}$$

Отметим, что в случае $r(\bar{z}, \mu) \geqslant 1$ на каждом из отрезков множества $B(\bar{z}, \mu)$ функция $d/dz\,(\lambda, \omega(z))$ сохраняет знак. Обозначим через s целую часть числа $\tau/(2\delta)$, $s \leqslant L/(2\delta)$ и представим интеграл (3) в виде суммы

$$\mathcal{J}_\lambda(t, \tau, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{s-1} \int\limits_{t+2k\delta}^{t+2(k+1)\delta} F(z, \lambda, \varepsilon)\, dz + \int\limits_{t+2s\delta}^{t+\tau} F(z, \lambda, \varepsilon)\, dz, \tag{8}$$

где $F(z, \lambda, \varepsilon) = f(z) \exp\left\{\frac{i}{\varepsilon} \int\limits_0^z (\lambda, \omega(y))\, dy\right\}$. Оценим теперь каждый из интегралов в правой части (8) в отдельности. Имеем

$$\left| \int\limits_{t+2k\delta}^{t+2(k+1)\delta} F(z, \lambda, \varepsilon)\, dz \right| \leqslant \sup_z |f(z)| \cdot \operatorname{mes} A(t + (2k+1)\delta, \mu) +$$

$$+ \left| \int\limits_{B(t+(2k+1)\delta, \mu)} F(z, \lambda, \varepsilon)\, dz \right| \leqslant \sum_{p=1}^{d_2(t+(2k+1)\delta, \mu)} \left| \int\limits_{\alpha_p}^{\beta_p} F(z, \lambda, \varepsilon)\, dz \right| +$$

$$+ \sigma_1 (2^m - 2)\mu. \tag{9}$$

Здесь $[\alpha_p, \beta_p]$ — составной отрезок множества $B(t + (2k+1)\delta, \mu)$. Интегрируя далее по частям и учитывая (7), получаем

$$\left| \int\limits_{\alpha_p}^{\beta_p} F(z, \lambda, \varepsilon)\, dz \right| = \left| \int\limits_{\alpha_p}^{\beta_p} \frac{\varepsilon f(z)}{(\lambda, \omega(z))}\, d\left(\exp\left\{\frac{i}{\varepsilon} \int\limits_0^z (\lambda, \omega(y))\, dy\right\}\right) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1} \varepsilon \mu^{1-m} + \varepsilon \int\limits_{\alpha_p}^{\beta_p} \left[\frac{\sigma_1}{|(\lambda, \omega(z))|} + \left| \frac{\frac{d}{dz}(\lambda, \omega(z))}{(\lambda, \omega(z))^2} \right| \right] dz \leqslant$$

$$\leqslant \sigma_1 \varepsilon \int\limits_{\alpha_p}^{\beta_p} (\lambda, \omega(z))^{-2} \left| \frac{d}{dz}(\lambda, \omega(z)) \right| dz + \frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1}(1 + 2\delta)\, \varepsilon \mu^{1-m}. \tag{10}$$

Для оценки интеграла в правой части (10) рассмотрим два случая. Если $r(t + (2k+1)\delta, \mu) \geqslant 1$, то

$$\varepsilon \int\limits_{\alpha_p}^{\beta_p} (\lambda, \omega(z))^{-2} \left| \frac{d}{dz}(\lambda, \omega(z)) \right| dz = \varepsilon \left| \int\limits_{\alpha_p}^{\beta_p} \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{(\lambda, \omega(z))}\right) dz \right| \leqslant \frac{2}{\bar{\sigma}_1} \varepsilon \mu^{1-m}. \tag{11}$$

Если же $r(t + (2k+1)\delta, \mu) = 0$, то в силу (6) имеем

$$\varepsilon \int\limits_{\alpha_p}^{\beta_p} (\lambda, \omega(z))^{-2} \left| \frac{d}{dz}(\lambda, \omega(z)) \right| dz \leqslant \varepsilon \frac{4}{\bar{\sigma}_1} (\beta_p - \alpha_p) \leqslant \varepsilon \frac{4}{\bar{\sigma}_1} \delta. \tag{12}$$

Объединяя неравенства (9) — (12) и используя (8), получаем

$$|\mathcal{I}_\lambda(t, \tau, \varepsilon)| < \left(\frac{L}{2\delta} + 1\right)\sigma_1(2^m - 2)\mu +$$

$$+ \left(\frac{L}{2\delta} + 1\right)2^{m-1}\left(3\,\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1} + \frac{2\delta\sigma_1 + 4\delta}{\bar{\sigma}_1}\right)\varepsilon\mu^{1-m}. \qquad (13)$$

Так как $\varepsilon > 0$ — малый параметр, то последняя оценка будет наилучшей в том случае, если $\mu^m = \varepsilon$. Полагая $\varepsilon_1 = \min\left\{\varepsilon_0;\ \left(\frac{\delta}{2^m}\right)^m\right\}$, $\sigma_2 = \left(\frac{L}{2\delta} + 1\right)\times$ $\times\left[\sigma_1(2^m - 2) + 2^{m-1}\left(3\,\frac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1} + \frac{2\delta\sigma_1 + 4\delta}{\bar{\sigma}_1}\right)\right]$, завершаем доказательство теоремы.

Предположим, что

$$[a(x, \varphi, \tau, \varepsilon);\ b(x, \varphi, \tau, \varepsilon)] \in C^1_\varepsilon(G, \sigma_3) \cap C^{l_1}_\varphi(G, \sigma_3),$$

$$\left[\frac{\partial a(x, \varphi, \tau, 0)}{\partial x};\ \frac{\partial b(x, \varphi, \tau, 0)}{dx}\right] \in C^{l_2}_\varphi(G, \sigma_3),$$

$$\left[\frac{\partial a(x, \varphi, \tau, 0)}{\partial \tau};\ \frac{\partial b(x, \varphi, \tau, 0)}{\partial \tau}\right] \in C^{l_3}_\varphi(G, \sigma_3), \qquad (14)$$

$$\min\{l_1;\ l_2;\ l_3\} \geqslant m + 1, \quad \sigma_3 = \text{const} > 0.$$

Здесь через $C^l_y(G, \sigma)$ обозначено множество вектор-функций $g(y)$, $y \in G$, каждая компонента которых непрерывна в G вместе со всеми своими частными производными по y до порядка l включительно и ограниченных в G постоянной σ.

Замечание 1. Оценка (4) позволяет обосновать метод усреднения для системы (1) [5]. Пусть решение $(\bar{x}(\tau);\ \bar{\varphi}(\tau, \varepsilon))$ усредненной системы (2) лежит в $D \times R^m$ вместе со своей ρ-окрестностью для всех $\tau \in [\bar{\tau}, \bar{\tau} + L]$ и для указанных значений τ $\Delta(\tau) \neq 0$. Если, кроме того, выполняются условия (14), то можно указать такие постоянные ε_2 и σ_4, что $\forall\varepsilon \in (0, \varepsilon_2]$ и $\forall\tau \in$ $\in [\bar{\tau}, \bar{\tau} + L]$ имеет место неравенство

$$u(\tau, \varepsilon) \equiv \|x(\tau, \varepsilon) - \bar{x}(\tau)\| + \|\varphi(\tau, \varepsilon) - \bar{\varphi}(\tau, \varepsilon)\| \leqslant \sigma_4\varepsilon^{1/m}, \qquad (15)$$

где $(x(\tau, \varepsilon);\ \varphi(\tau, \varepsilon))$ — решение системы (1), для которого $\bar{x}(\bar{\tau}) = x(\bar{\tau}, \varepsilon)$, $\bar{\varphi}(\bar{\tau}, \varepsilon) = \varphi(\bar{\tau}, \varepsilon)$.

Замечание 2. Для установления оценки (15) существенно используется условие $\Delta(\tau) \neq 0$, гарантирующее ограниченность нормы $\|W^{-1}(\tau)\|$ $\forall\tau \in [\bar{\tau}, \bar{\tau} + L]$. Эффективную оценку погрешности метода усреднения можно получить и в случае, если $\Delta(\tau)$ имеет на $[\bar{\tau}, \bar{\tau} + L]$ конечное число нулей конечной кратности. Так, если $\Delta(\tau) = d(\tau)\prod_{k=1}^{s}(\tau - \tau_k)^{r_k}$, $d(\tau) \neq 0$, $\tau_i < \tau_{i+1}$, $i = \overline{1, s-1}$, то оценка (15) примет вид $u(\tau, \varepsilon) \leqslant \sigma_5\varepsilon^{1/m+r}$, где $r = \max_{1 \leqslant k \leqslant s} r_k$.

Дадим обоснование метода усреднения на бесконечном интервале времени. Рассмотрим уравнения (2) для медленных переменных

$$d\bar{x}/d\tau = \bar{a}(\bar{x}, \tau), \qquad \tau \geqslant 0, \qquad (16)$$

и предположим, что $\bar{a}(x, \tau) \in C^2_x(D \times [0, \infty), \sigma_6)$.

Теорема 2. *Пусть:*

а) $\|W^{-1}(\tau)\|$ *равномерно ограничена, а* $\omega_k^{(l-1)}(\tau)$, $k = \overline{1, m}$, $l = \overline{1, m}$, *равномерно непрерывны на полуоси* $\tau \geqslant 0$;

б) *существует ограниченное решение* $\bar{x} = \bar{x}(\tau)$, $\tau \geqslant 0$, *уравнения* (16), *содержащееся в* D *вместе со своей* ρ_1*-окрестностью;*

в) *фундаментальная матрица* $\Omega(\tau, t)$, $\Omega(\tau, \tau) = E$ *решений уравнения в вариациях* $\dfrac{dz}{d\tau} = \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{a}(\bar{x}(\tau), \tau) z$ *удовлетворяет оценке*

$$\|\Omega(\tau, t)\| \leqslant M e^{-\gamma(\tau - t)}, \quad \tau \geqslant t \geqslant 0, \ \gamma = \mathrm{const} > 0, \ M = \mathrm{const} \geqslant 1; \quad (17)$$

г) *выполняются условия* (14) *при* $\tau \geqslant 0$.

Тогда существуют такие постоянные $\sigma_7 > 0$, $\varepsilon_3 > 0$ *и* $\rho_2 < \rho_1$, *что:*

1) *при* $\tau \geqslant 0$ *и* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3]$ *справедлива оценка*

$$\|x(\tau, \varepsilon) - \bar{x}(\tau)\| \leqslant \sigma_7 \varepsilon^{1/m}, \quad (18)$$

где $(x(\tau, \varepsilon); \varphi(\tau, \varepsilon))$ — *решение системы* (1), *для которого* $x(0, \varepsilon) = \bar{x}(0)$, $\varphi(0, \varepsilon) \in R^m$;

2) *медленные переменные* $x(\tau, \varepsilon)$ *каждого решения* $(x(\tau, \varepsilon); \varphi(\tau, \varepsilon))$, *проходящего при* $\tau = 0$ *через область* $D_{\rho_2}(\bar{x}(0)) \times R^m$, $D_{\rho_2}(\bar{x}(0)) = \{x : x \in R^n, \|x - \bar{x}(0)\| < \rho_2\}$, *равномерно ограничены при* $\tau \geqslant 0$.

Доказательство. Рассмотрим задачу Коши

$$dx/d\tau = a(x, \varphi, \tau, \varepsilon), \ d\varphi/d\tau = \omega(\tau)/\varepsilon + b(x, \varphi, \tau, \varepsilon),$$
$$x|_{\tau=0} = x^0, \ \varphi|_{\tau=0} = \varphi^0. \quad (19)$$

Из условий гладкости (14) следует, что задача (19) при $\|x^0 - \bar{x}(0)\| < \rho_2 \leqslant \leqslant \dfrac{1}{2M}\rho_1$ имеет решение $(x(\tau, \varepsilon); \varphi(\tau, \varepsilon))$, содержащееся в области $D_{2M\rho_2}(\bar{x}(0)) \times \times R^m$ для всех τ из некоторого временного отрезка $[0, T(\varepsilon)]$. Для таких τ рассмотрим функцию $y(\tau, \varepsilon) = x(\tau, \varepsilon) - \bar{x}(\tau)$. Тогда

$$\begin{cases} y(\tau, \varepsilon) = \Omega(\tau, 0) y(0, \varepsilon) + \int\limits_0^\tau \Omega(\tau, t)[F(y, t) + \tilde{a}(x, \varphi, t, 0) + \\ + \varepsilon A(x, \varphi, t, \varepsilon)] \, dt, \\ d\varphi/d\tau = \omega(\tau)/\varepsilon + b(\bar{x}(\tau) + y, \varphi, \tau, \varepsilon), \end{cases} \quad (20)$$

где $F(y, \tau) = \bar{a}(y + \bar{x}(\tau), \tau) - \bar{a}(\bar{x}(\tau), \tau) - \dfrac{\partial}{\partial \bar{x}} \bar{a}(\bar{x}(\tau), \tau) y$; $\tilde{a}(x, \varphi, \tau, 0) = = a(x, \varphi, \tau, 0) - \bar{a}(x, \tau)$; $\varepsilon A(x, \varphi, \tau, \varepsilon) = a(x, \varphi, \tau, \varepsilon) - a(x, \varphi, \tau, 0)$; $\|F\| \leqslant \leqslant n^3 \sigma_6 \|y\|^2$; $\|A\| \leqslant n\sigma_3$; $\|y(\tau, \varepsilon)\| \leqslant 2M\rho_2$, $\tau \in [0, T(\varepsilon)]$.

Воспользовавшись оценкой (17), из (20) получаем неравенство

$$\max_{[0, T(\varepsilon)]} \|y(\tau, \varepsilon)\| \leqslant M \|y(0, \varepsilon)\| + n^3 \sigma_6 \frac{M^2}{\gamma} 2\rho_2 \max_{[0, T(\varepsilon)]} \|y(\tau, \varepsilon)\| +$$
$$+ \max_{[0, T(\varepsilon)]} \left\| \int\limits_0^\tau \Omega(\tau, t) \tilde{a}(x, \varphi, t, 0) \, dt \right\| + \varepsilon n \sigma_3 \frac{M}{\gamma}, \quad (21)$$

откуда при $\rho_2 = \min\left\{\dfrac{1}{2M}\rho_1; \ \dfrac{\gamma}{6n^3\sigma_6 M^2}\right\}$ выводим

$$\max_{[0, T(\varepsilon)]} \|y(\tau, \varepsilon)\| \leqslant \frac{3}{2} M\rho_2 + \frac{3}{2} \varepsilon n \frac{M}{\gamma} + \frac{3}{2} \max_{[0, T(\varepsilon)]} \left\| \int\limits_0^\tau \Omega \tilde{a} dt \right\|. \quad (22)$$

Рассмотрим теперь

$$\left\| \int\limits_0^\tau \Omega(\tau, t) \tilde{a}(x, \varphi, t, 0) \, dt \right\| \leqslant \sum_{\|k\| > 0} \Big[\sum_{r=0}^{s-1} \Big\| \int\limits_r^{r+1} \Omega(\tau, t) a_k(x, t) e^{i(k, \theta)} \times$$

$$\times e^{i\left(\frac{k}{\varepsilon},\ \int\limits_0^t \omega(\eta)d\eta\right)} dt \Big\| + \Big\| \int\limits_s^\tau \Omega(\tau,\ t)\, a_k(x,\ t)\, e^{i(k,\theta)} e^{i\left(\frac{k}{\varepsilon},\ \int\limits_0^t \omega(\eta)d\eta\right)} dt \Big\| \Big], \qquad (23)$$

где s — целая часть числа τ, $a_k(x, t)$ — коэффициенты Фурье функции $a(x, \varphi, t, 0)$, а θ удовлетворяет уравнению

$$d\theta/d\tau = b\left(\bar{x}(\tau) + y,\ \theta + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \omega(\eta)\, d\eta, \tau, \varepsilon\right).$$

В силу теоремы 1 и неравенства (17) существуют такие постоянные $\bar{\sigma}_7$ и $\bar{\varepsilon}_3$, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_3$

$$\Big\| \int\limits_r^{r+1} \Omega(\tau, t)\, a_k(x, t)\, e^{i(k,\theta)} e^{\frac{i}{\varepsilon}\left(k,\ \int\limits_0^t \omega(\eta)d\eta\right)} dt \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \bar{\sigma}_7 \left(\sup_G \| a_k \| + \sup_G \left\| \frac{\partial a_k}{\partial x} \right\| + \sup_G \left\| \frac{\partial a_k}{\partial \tau} \right\|\right) e^{-\gamma(\tau - r - 1)} \varepsilon^{1/m}.$$

Тогда, учитывая условия гладкости (14) и оценку

$$\sum_{r=0}^{s} e^{-\gamma(\tau - r - 1)} \leqslant \frac{e^{\gamma(s+2)} - 1}{e^\gamma - 1}\, e^{-\gamma\tau} < \frac{e^{2\gamma}}{e^\gamma - 1},$$

из (23) получаем

$$\Big\| \int\limits_0^\tau \Omega(\tau, t)\, \tilde{a}(x, \varphi, t, 0)\, dt \Big\| < 3\bar{\sigma}_7 \frac{e^{2\gamma}}{e^\gamma - 1}\, 2^m (n + m)\left(1 + \frac{1}{\bar{l} - m}\right) \times$$

$$\times n\sigma_3 m^l e^{1/m} \equiv \sigma_8 \varepsilon^{1/m}, \qquad \mathbf{(24)}$$

где $l = \max\{l_1;\ l_2;\ l_3\}$, $\bar{l} = \min\{l_2;\ l_2;\ l_3\}$.

С учетом (24) неравенство (22) можно представить в виде

$$\max_{[0, T(\varepsilon)]} \| y(\tau, \varepsilon) \| < \frac{3}{2} M\rho_2 + \frac{3}{2}\left(\sigma_8 + \varepsilon_0^{1-1/m} n \frac{M}{\gamma}\right) \varepsilon^{1/m}.$$

Положим теперь $\frac{3}{2}\left(\sigma_8 + \varepsilon_0^{1-1/m} n \frac{M}{\gamma}\right) = \sigma_7$; $\varepsilon_3 = \min\left\{\varepsilon_0;\ \bar{\varepsilon}_3;\ \left[\frac{1}{4\sigma_7} M\rho_2\right]^m\right\}$. Тогда $\forall \tau \in [0, T(\varepsilon)]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_3]$

$$\| y(\tau, \varepsilon) \| < \frac{7}{4} M\rho_2 < 2M\rho_2, \qquad (25)$$

т. е. кривая $x = x(\tau, \varepsilon)$ не выходит для указанных τ из области $D_{7/4 M\rho_2}(\bar{x}(\tau))$. Из (25) и условий гладкости (14) следует, что решение $(x(\tau, \varepsilon);\ \varphi(\tau, \varepsilon))$ задачи Коши (19) можно продолжить для всех $\tau \geqslant 0$, причем (25) остается без изменений. Таким образом, имеем равномерную оценку $\|x(\tau, \varepsilon)\| < 2M\rho_2 + \sup_{[0,\infty)} \|\bar{x}(\tau)\|$ $\forall \tau \in [0, \infty)$ при условии $x(0, \varepsilon (\in D_{\rho_2}(\bar{x}(0))$.

Неравенство (18) получается из (21) и (24) при $y(0, \varepsilon) = 0$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. *Предположим, что:* $\bar{x} = \bar{x}(\tau)$ — *ограниченное решение уравнения* (16), *содержащееся в* D *вместе со своей* ρ_3-*окрестностью для всех* $\tau \in R$; *выполняются условия* а), в), г) *теоремы* 2 *при* $\tau \in R$. *Тогда можно указать такие постоянные* $\varepsilon_4 > 0$ *и* $\sigma_9 > 0$, *что при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_4$ *для каждого* $\varphi^0 \in R^m$ *существует определенное на всей числовой оси решение* $(x(\tau, y^0, \varphi^0, \varepsilon);\ \varphi(\tau, y^0, \varphi^0, \varepsilon))$ *системы* (1), $x(0, y^0, \varphi^0, \varepsilon) = y^0$, $\varphi(0, y^0, \varphi^0, \varepsilon) = \varphi^0$, *медленные переменные* $x(\tau, y^0, \varphi^0, \varepsilon)$ *которого лежат в* $\sigma_9 \varepsilon^{1/m}$-*окрестности* $\bar{x} = \bar{x}(\tau)$ $\forall \tau \in R$.

Доказательство. Так как $\bar{x} = \bar{x}(\tau)$ — асимптотически устойчивое решение системы (16), и фундаментальная матрица $\Omega(\tau, t)$ удовлетворяет неравенству (17), то известно [11], что из условия $\|\bar{x}(\tau^*, \tau^*, x) - \bar{x}(\tau^*)\| < \delta/M$ следует $\|\bar{x}(\tau, \tau^*, x) - \bar{x}(\tau)\| < \delta$ при $\tau > \tau^*$. Кроме того, можно так выбрать постоянную $L > 0$, чтобы $\|\bar{x}(\tau, \tau^*, x) - \bar{x}(\tau)\| < \delta/2M$ при $\tau > \tau^* + L$. Здесь $\bar{x}(\tau, \tau^*, x)$ — решение системы (16), для которого $\bar{x}(\tau^*, \tau^*, x) = x$, а x выбирается из области асимптотической устойчивости решения $\bar{x}(\tau)$, содержащей в себе шар $S_{\tau^*}(\delta/M) = \{x : x \in R^n, \|x - \bar{x}(\tau^*)\| < \delta/M\}$ [11].

Положим

$$\delta = 2\sigma_4 M\varepsilon^{1/m},\ \varepsilon_4 = \min\left\{\varepsilon_2;\ \varepsilon_3;\ \left[\frac{1}{\rho_3} 2\sigma_4(1 + 2M)\right]^{-m};\right.$$

$$\left.\left[\frac{1}{\gamma} 2\sigma_4(1 + 2M) M \sup_{D\times R}\left\|\frac{\partial^2 \bar{a}(x, \tau)}{\partial x^2}\right\|\right]^{-m}\right\},$$

где ε_2, ε_3 и σ_4 — постоянные, которые определены в замечании 1 и теореме 2. Обозначим далее через $(\tilde{x}_\tau(t, x, \psi);\ \tilde{\varphi}_\tau(t, x, \psi))$ решение системы (1), проходящее при $\tau = t$ через точку $(x; \psi)$. Тогда, используя неравенство (15), $\forall\psi \in R^m$ и $\forall x \in S_{-L}(2\sigma_4\varepsilon^{1/m})$ имеем

$$\|\tilde{x}_\tau(-L, x, \psi - \bar{x}(\tau)\| \leqslant \|\tilde{x}_\tau(-L, x, \psi) - \bar{x}(\tau, -L, x)\| + \|\bar{x}(\tau, -L, x) - \bar{x}(\tau)\| \leqslant \sigma_4\varepsilon^{1/m} + 2\sigma_4 M\varepsilon^{1/m} = (1 + 2M)\sigma_4\varepsilon^{1/m} \tag{26}$$

при $\tau \in [-L, 0)$ и

$$\|\tilde{x}_0(-L, x, \psi) - \bar{x}(0)\| < 2\sigma_4\varepsilon^{1/m} \tag{27}$$

при $\tau = 0$, т. е. $\tilde{x}_0(-L, x, \psi) \in S_0(2\sigma_4\varepsilon^{1/m})$.

Зафиксируем теперь произвольное $x \in S_{-L}(2\sigma_4\varepsilon^{1/m})$ и выберем такое значение ψ, чтобы $\tilde{\varphi}_0(-L, x, \psi) = \varphi^0$. Покажем, что указанное уравнение имеет решение $\psi = \psi(x)$. В самом деле, используя условия гладкости (14) и предположения на вектор частот $\omega(\tau)$, получаем оценку, аналогичную (15):

$$\|\partial U/\partial x\| + \|\partial U/\partial\psi\| \leqslant \bar{\sigma}_4\varepsilon^{1/m}, \quad \bar{\sigma}_4 = \text{const}, \quad \tau \in [\bar{\tau}, \bar{\tau} + L], \tag{28}$$

где $U = (\tilde{x}_\tau(\bar{\tau}, x, \psi) - \bar{x}(\tau, \bar{\tau}, x);\ \tilde{\varphi}_\tau(\bar{\tau}, x, \psi) - \bar{\varphi}_\tau(\bar{\tau}, x, \psi))$. Из (28) и (17) вытекает существование решения $(x_\tau(\bar{\tau}, x);\ \varphi_\tau(\bar{\tau}, x))$ системы (1), удовлетворяющего краевым условиям $x_{\bar{\tau}}(\bar{\tau}, x) = x$, $\varphi_{\bar{\tau}+L}(\bar{\tau}, x) = g(x_{\bar{\tau}+L}(\bar{\tau}, x))$, где $g(y)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая по $y \in \bar{D}$ функция, для которой $\sup_D \|\partial g/\partial y\| \leqslant c = \text{const}$.

Таким образом, для каждого $x \in S_{-L}(2\sigma_4\varepsilon^{1/m})$ можно указать такое $\psi = \psi(x) \in R^m$, что быстрые переменные решения $(\tilde{x}_\tau(-L, x, \psi(x));\ \tilde{\varphi}_\tau(-L, x, \psi(x))) \equiv (x_\tau(-L, x, \psi);\ \varphi_\tau(-L, x, \psi))$ при $\tau = 0$ переходят через точку φ^0.

Рассмотрим далее произвольные $x \in S_{-2L}(2\sigma_4\varepsilon^{1/m})$ и $\psi \in R^m$. Как и выше, получаем неравенства

$$\|\tilde{x}_\tau(-2L, x, \psi) - \bar{x}(\tau)\| \leqslant (2M + 1)\sigma_4\varepsilon^{1/m} \qquad \forall\tau \in [-2L, -L),$$

$$\|\tilde{x}_{-L}(-2L, x, \psi) - \bar{x}(-L)\| < 2\sigma_4\varepsilon^{1/m},$$

которые вместе с (26) и (27) приводят к оценкам

$$\begin{gathered}\|\tilde{x}_\tau(-2L, x, \psi) - \bar{x}(\tau)\| \leqslant (2M + 1)\sigma_4\varepsilon^{1/m} \qquad \forall\tau \in [-2L, 0), \\ \|\tilde{x}_0(-2L, x, \psi) - \bar{x}(0)\| < 2\sigma_4\varepsilon^{1/m},\end{gathered} \tag{29}$$

причем для каждого $x \in S_{-2L}(2\sigma_4\varepsilon^{1/m})$ можно указать такое $\psi = \psi(x)$, что решение $(x_\tau(-2L, x, \psi);\ \varphi_\tau(-2L, x, \psi))$ системы (1) удовлетворяет условию $\varphi_0(-2L, x, \psi) = \varphi^0$.

Методом индукции $\forall x \in S_{-Ll}(2\sigma_4\varepsilon^{1/m})$ и $\forall \psi \in R^m$ получаем неравенства

$$\|\tilde{x}_\tau(-Ll, x, \psi) - \bar{x}(\tau)\| \leqslant (2M+1)\sigma_4\varepsilon^{1/m} \qquad \forall \tau \in [-Ll, 0),$$
$$\|\tilde{x}_0(-Ll, x, \psi) - \bar{x}(0)\| < 2\sigma_4\varepsilon^{1/m} \qquad l = 1, 2, 3, \ldots, \tag{30}$$

а также устанавливаем существование решения $(x_\tau(-Ll, x, \psi);\ \varphi_\tau(-Ll, x, \psi))$, для которого $\varphi_0(-Ll, x, \psi) = \varphi^0$.

Выберем из произвольной последовательности точек $y_l = x_0(-Ll, x_l, \psi_l) \in S_0(2\sigma_4\varepsilon^{1/m})$, $x_l \in S_{-Ll}(2\sigma_4\varepsilon^{1/m})$, $l = 1, 2, 3 \ldots$ сходящуюся подпоследовательность $\lim\limits_{j\to\infty} y_{l_j} = y^0$. Рассмотрим теперь решение $(x(\tau, y^0, \varphi^0, \varepsilon);\ \varphi(\tau, y^0, \varphi^0, \varepsilon))$ системы (1), $x(0, y^0, \varphi^0, \varepsilon) = y^0$, $\varphi(0, y^0, \varphi^0, \varepsilon) = \varphi^0$ и покажем, что оно определено для всех $\tau \leqslant 0$, причем $\|x(\tau, y^0, \varphi^0, \varepsilon) - \bar{x}(\tau)\| \leqslant \sigma_4(1+2M)\varepsilon^{1/m}$. Предположим, что

$$\|x(\tau, y^0, \varphi^0, \varepsilon) - \bar{x}(\tau)\| > \sigma_4(1+2M)\varepsilon^{1/m} \tag{31}$$

при некотором $\tau = \tau_0 < 0$. Так как решение $(x(\tau, y_{l_j}, \varphi^0, \varepsilon);\ \varphi(\tau, y_{l_j}, \varphi^0, \varepsilon))$ совпадает с решением $(x_\tau(-Ll_j, x_{l_j}, \psi_{l_j});\ \varphi_\tau(-Ll_j, x_{l_j}, \psi_{l_j}))$ при $\tau \in [-Ll_j, 0]$, то при достаточно больших j выполняется неравенство

$$\|x(\tau_0, y_{l_j}, \varphi^0, \varepsilon) - \bar{x}(\tau_0)\| \leqslant \sigma_4(1+2M)\varepsilon^{1/m}. \tag{32}$$

Используя непрерывную зависимость решения от начальных данных и переходя к пределу в (32) при $j \to \infty$, получаем

$$\|x(\tau_0, y^0, \varphi^0, \varepsilon) - \bar{x}(\tau_0)\| \leqslant \sigma_4(1+2M)\varepsilon^{1/m}. \tag{33}$$

Но (33) противоречит (31). Отсюда следует доказательство теоремы при $\tau \leqslant 0$. При $\tau > 0$ утверждение теоремы 3 вытекает из теоремы 2.

1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике.— Киев : Изд-во АН УССР, 1945.— 139 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1974.— 504 с.
3. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.— Киев : Наук. думка, 1971.— 440 с.
4. *Самойленко А. М.* Метод усреднения в системах с толчками/ /Мат. физика.— 1971.— Вып. 9.— С. 101—107.
5. *Самойленко А. М.* К вопросу обоснования метода усреднения для многочастотных колебательных систем // Дифференц. уравнения.— 1987.— **23**, № 2.— С. 276—278.
6. *Филатов А. Н., Шарова Л. В.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний.— М. : Наука, 1976.— 152 с.
7. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод усреднения в теории нелинейных колебательных систем.— М. : Изд-во Моск. ун-та, 1971.— 508 с.
8. *Арнольд В. И.* Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений.— М. : Наука, 1979.— 304 с.
9. *Нейштадт А. И.* О прохождении через резонансы в двухчастотной задаче // Докл. АН СССР.— 1975.— **221**, № 2.— С. 301—304.
10. *Бахтин В. И.* Об усреднении в многочастотных системах // Функц. анализ.— 1986.— **20**, № 2.— С. 1—7.
11. *Курс* обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин, И. З. Штокало, П. С. Бондаренко и др.— Киев: Вища шк., 1974.— 472 с.

Киев. ун-т,
Черновиц. ун-т

Получено 09.06.87