УДК 519.41/47

Н. С. Черников

Факторизация линейных групп и групп, обладающих нормальной системой с линейными факторами

В настоящей работе под линейной группой понимается группа, представимая матрицами подходящей степени над каким-нибудь полем. Одним из основных результатов п. 1 является теорема 1.2, утверждающая, что линейная группа локально конечна и почти разрешима тогда и только тогда, когда она разложима в произведение двух периодических почти локально нильпотентных подгрупп. (Говорят, что группа почти обладает некоторым свойством, если она содержит инвариантную подгруппу конечного индекса, обладающую им.) Так как не каждая конечная разрешимая группа может быть представлена в виде произведения двух нильпотентных подгрупп, то в формулировке этой теоремы нельзя убрать слово «почти». С теоремой 1.2 тесно связана теорема 2.7 (п. 2), ввиду которой любая фактор-группа периодической линейной группы, разложимая в произведение конечного числа попарно перестановочных почти локально нильпотентных подгрупп, почти разрешима. В доказательстве теоремы 2.7 существенно используется следующий результат (следствие 2.3): гомоморфный образ периодической группы матриц над полем является расширением нильпотентной группы с помощью группы, представимой матрицами над тем же полем. Предположение периодичности здесь существенно. Отметим, что изучению фактор-групп периодических линейных групп посвящен ряд известных работ Б. А. Верфрица (см. [1], § 9). Обозначим через $\mathfrak{X}$ класс гомоморфных образов периодических линейных групп. Одним из основных результатов п. 3 является теорема 3.9, в силу которой периодическая группа G, обладающая нормальной системой с $\mathfrak{X}$-факторами и разложимая в произведение некоторых S-подгрупп A_ι, $\iota \in I$, таких, что $\pi(A_\alpha) \cap \pi(A_\beta) = \varnothing$ при $\alpha \neq \beta$, является RN-группой. Отметим, что класс групп, обладающих нормальной системой с линейными факторами, включает в себя класс RN-групп, все его подклассы и многие другие важные классы групп. Теорема 3.9 является, в частности, широким обобщением известной теоремы Виландта [2] о разрешимости конечной группы, факторизуемой попарно перестановочными нильпотентными подгруппами без элементов одинаковых простых порядков. Под нормальной системой группы в настоящей работе понимается ее нормальная система в смысле [3]. Напомним, что группа с единственной силовской p-подгруппой по каждому простому p называется S-группой. Примарные, абелевы, локально нильпотентные группы — типичные примеры S-групп [3].

Приведенные здесь результаты настоящей работы дают представление о ее содержании в целом.

Обозначения. Знаки изоморфизма и теоретико-множественной разности — соответственно $\simeq$ и $\setminus$; множества соответственно всех натуральных и всех простых чисел — $\mathbf{N}$ и $\mathbf{P}$; мощность множества X — $|X|$. Если G — группа, X — непустое множество ее элементов и H — ее подгруппа, то $\pi(X)$ — совокупность всех простых делителей порядков элементов X; $\langle X \rangle$ — подгруппа, порожденная X; $\mathfrak{S}(G)$ и $O_p(G)$ — подгруппы, порожденные всеми инвариантными соответственно локально разрешимыми и p-подгруппами, $p \in \mathbf{P}$; $|G:H|$ и $N_G(H)$ — соответственно индекс и нормализатор H в G. Условие min - p — условие минимальности для p-подгрупп группы. $\mathbf{GL}(n, K)$ — полная линейная группа степени n над полем K, char K — характеристика поля K.

1. Факторизация периодических почти разрешимых групп матриц над полем.

1.1. *Если периодическая группа* $G \subseteq \mathbf{GL}(n, K)$ *почти разрешима, то она представима в виде произведения некоторых двух подгрупп* A *и* B, *удовлетворяющих условиям:* 1) *в случае, когда* char $K = 0$, $A = 1$; 2) *в случае, когда* char $K > 0$, A *нильпотентна, имеет конечную экспоненту, примарна* *по $p = \operatorname{char} K$ и инвариантна в G;* 3) *B имеет инвариантную абелеву подгруппу C конечного индекса, не содержащую элементов порядка равного $\operatorname{char} K$, силовская q-подгруппа которой при произвольном $q \in \mathbf{P}$ является черниковской и разложима в прямое произведение не более чем n циклических и квазициклических подгрупп.*

Доказательство. Действительно, используя известную теорему Колчина—Мальцева (см., например, [4]), нетрудно убедиться в том, что G обладает двумя инвариантными подгруппами H и A со следующими свойствами: для A выполняются условия 1, 2 и $A \subseteq H$; $|G:H| < \infty$ и фактор-группа H/A такая же, как инвариантная подгруппа в условии 3. Так как H — периодическая группа матриц над полем, а A инвариантна в ней, причем $\pi(A) \cap \pi(H/A) = \varnothing$, то последняя сопряженно дополняема в H ([5], теорема 1.11). Легко видеть, что $G = AN_G(C)$ для дополнения C к A в H. Поэтому $G = DH$ для некоторой конечной подгруппы $D \subseteq N_G(C)$. Положим $B = DC$. Очевидно, A и B требуемые.

1.2. Теорема. *Группа $G \subseteq \mathbf{GL}(n, K)$ локально конечна и почти разрешима тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде произведения некоторых двух периодических почти локально нильпотентных подгрупп.*

Доказательство. Необходимость вытекает из утверждения 1.1. Так как произвольная линейная группа, разложимая в произведение двух почти локально нильпотентных подгрупп, почти разрешима ([6], теорема 2.8) и в случае, когда подгруппы-множители периодические, является локально конечной π-группой, где π — совокупность всех простых делителей порядков их элементов ([7], предложение 2.1), то справедлива и достаточность.

Согласно теореме Колчина—Мальцева для каждого $n \in \mathbf{N}$ найдется $l \in \mathbf{N}$ такое, что каково бы ни было алгебраически замкнутое поле K, произвольная разрешимая подгруппа группы $\mathbf{GL}(n, K)$ обладает инвариантной триангулируемой подгруппой индекса $\leqslant l$.

Обозначим через $\mu(n)$ и π_n соответственно наименьшее l с отмеченным свойством и множество всех простых чисел, не превышающих $\max\{\mu(2), \mu(n)\}$.

Следующий результат нетрудно установить, используя теорему Колчина—Мальцева, теорему 1.11 [5] и теорему Ф. Холла о разложимости произвольной конечной разрешимой группы в произведение некоторых ее попарно перестановочных силовских p-подгрупп по разным $p \in \mathbf{P}$ (см., например, [7], теорема 2.4).

1.3. *Если периодическая группа $G \subseteq \mathbf{GL}(n, K)$ разрешима, то она представима в виде произведения некоторых m попарно перестановочных подгрупп A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, $m \leqslant 2 + |\pi_n|$, удовлетворяющих условиям:* 1) *$\pi(A_j) \cap \pi(A_k) = \varnothing$ для любых различных $j, k \leqslant m$;* 2) *A_1 абелева, причем при произвольном $q \in \mathbf{P}$ ее силовская q-подгруппа является черниковской и разложима в прямое произведение не более чем n циклических и квазициклических подгрупп;* 3) *$A_2 = 1$ в случае, когда $\operatorname{char} K = 0$; в случае, когда $\operatorname{char} K > 0$, A_2 нильпотентна, имеет конечную экспоненту и примарна по $p = \operatorname{char} K$;* 4) *подгруппа A_i при $i \neq 1, 2$ является черниковской, локально нильпотентна, примарна по некоторому $q_i \in \pi_n$ и имеет инвариантную подгруппу C_i конечного индекса, которая разложима в прямое произведение не более чем n квазициклических подгрупп;* 5) $\prod_{i \neq 1,2} |A_i : C_i| \leqslant \mu(n)$.

1.4. Следствие. *Периодическая разрешимая группа $G \subseteq \mathbf{GL}(n, K)$ может быть представлена в виде произведения некоторых $m \leqslant 2 + |\pi_n|$ попарно перестановочных периодических локально нильпотентных подгрупп, никакие две из которых не имеют элементов одинаковых простых порядков и по крайней мере $m - 2$ из которых примарные черниковские.*

1.5. Теорема. *Группа $G \subseteq \mathbf{GL}(n, K)$ локально конечна и разрешима тогда и только тогда, когда она может быть представлена в виде произведения конечного числа попарно перестановочных периодических локально нильпотентных подгрупп.*

Доказательство. Необходимость вытекает из 1.4. Так как линейная группа, разложимая в произведение каких-нибудь попарно перестановочных периодических локально нильпотентных подгрупп, локально конечна и разрешима ([7], теорема 2.14), то справедлива и достаточность.

Прежде чем переходить к следующему результату, напомним теорему Шура, утверждающую, что периодическая группа матриц над полем, во-первых, локально конечна и, во-вторых, почти абелева, если она не содержит элементов порядка равного характеристике соответствующего поля (см., например, [1] п. i предложения 9.1 и следствие 9.4). Отметим также, что если периодическая группа матриц над полем характеристики $p > 0$ удовлетворяет условию min - p, то все ее p-подгруппы конечны и она содержит инвариантную абелеву p'-подгруппу конечного индекса ([8], теорема 1.L.4, следствие 1.L.5 и его доказательство).

1.6. *Пусть группа* $G \subseteq \mathbf{GL}(n, K)$ *разложима в произведение некоторых попарно перестановочных периодических подгрупп* A_ι, $\iota \in \mathrm{I}$, *причем либо ни одна из них не имеет элементов порядка* $p = \mathrm{char}\, K$, *либо множество тех из них, которые содержат элементы порядка* $p = \mathrm{char}\, K$, *конечно и все они удовлетворяют условию* min - p. *Тогда группа* G *локально конечна, почти абелева и в случае, когда* $p > 0$, *содержит инвариантную абелеву* p'*-подгруппу конечного индекса.*

Доказательство. Действительно, в произвольной линейной группе произведение любой совокупности попарно перестановочных локально конечных подгрупп без элементов порядка, равного характеристике соответствующего поля, является такой же группой ([7], предложение 2.1). Используя этот результат, а также приведенные непосредственно перед 1.6 две теоремы, убеждаемся в следующем: достаточно рассмотреть случай, когда $\mathrm{I} = \{1, 2\}$, $p > 0$ и A_1, A_2 — локально конечные почти абелевы группы, у которых все p-подгруппы конечны. В этом случае группа почти разрешима и локально конечна ввиду 1.2. Тогда все ее p-подгруппы конечны в силу следствия 1.27 [7]. Поэтому G содержит инвариантную абелеву p'-подгруппу конечного индекса согласно второй из теорем, приведенных непосредственно перед 1.6.

1.7. *Пусть группа* $G \subseteq \mathbf{GL}(n, K)$, *разложимая в произведение некоторых попарно перестановочных периодических подгрупп* A_ι, $\iota \in \mathrm{I}$, *не является локально конечной почти разрешимой. Тогда* $p = \mathrm{char}\, K > 0$ *и имеет место хотя бы одно из заключений*: 1) *множество подгрупп* A_ι, *содержащих элементы порядка* p, *бесконечно*; 2) *по крайней мере две из подгрупп* A_ι *не удовлетворяют условию* min -p; 3) *среди подгрупп* A_ι *по крайней мере одна не удовлетворяет условию* min -p *и не является почти локально нильпотентной.*

Доказательство. Пусть это не так. Тогда используя 1.6. нетрудно убедиться в том, что для некоторого $\alpha \in I$ подгруппа A_α не удовлетворяет условию min -p и почти локально нильпотентна, а подгруппа $B = \langle \bigcup_{\iota \neq \alpha} A_\iota \rangle$ локально конечна, почти абелева и удовлетворяет этому условию. Но в таком случае группа $G = AB$ должна быть локально конечной и почти разрешимой ввиду 1.2. Противоречие.

1.8. *Пусть группа* $G \subseteq \mathbf{GL}(n, K)$ *разложима в произведение попарно перестановочных периодических подгрупп* A_ι, $\iota \in \mathrm{I}$, *таких, что* $\pi(A_\alpha) \cap \pi(A_\beta) = \varnothing$ *для любых различных* $\alpha, \beta \in \mathrm{I}$. *Тогда если ни одна из подгрупп* A_ι *не имеет элементов порядка, равного* $\mathrm{char}\, K$, *или подгруппа* A_ι, *содержащая такие элементы, почти локально нильпотентна, то группа* G *локально конечна и почти разрешима.*

1.9. *Если группа* $G \subseteq \mathbf{GL}(n, K)$ *разложима в произведение попарно перестановочных периодических почти локально нильпотентных подгрупп, никакие две из которых не имеют элементов одинаковых простых порядков, то она локально конечна и почти разрешима.*

Утверждения 1.8 и 1.9 вытекают из 1.7.

1.10. Примечание. В связи с результатами 1.1—1.9 отметим, что если почти разрешимая (не обязательно линейная) группа G представима в виде произведения некоторых попарно перестановочных периодических подгрупп A_ι $\iota \in I$, то она локально конечна, причем $\pi(G) = \bigcup_{\iota \in I} \pi(A_\iota)$ ([7], следствие 1.32).

2. Фактор-группы периодических групп матриц над полем.

2.1. *Пусть R — инвариантная локально нильпотентная подгруппа группы $G \subseteq$ **GL** (n, K) и $\bar{R}$ — замыкание подгруппы R в топологии Зарисского группы* **GL** (n, K). *Тогда, во-первых, подгруппа $\bar{R} \cap G$ локально нильпотентна и инвариантна в G и, во-вторых, фактор-группа $G/(\bar{R} \cap G)$ при подходящем $m \in$* **N** *представима матрицами степени m над полем K.*

Доказательство. Второе утверждение справедливо ввиду теоремы Шевалле (см., например, [1], теорема 6.4). Докажем первое утверждение. Ввиду предложения 2.3 [6] R обладает некоторой инвариантной нильпотентной подгруппой Q конечного индекса. Пусть $\overline{Q}$ — замыкание Q в топологии Зарисского группы **GL** (n, K). Подгруппа $\overline{Q}$ нильпотентна (см., например, [9], гл. 4, § 4, п. 2, теорема 7) и, очевидно, $R \subseteq N_G(\bar{Q})$, $|R\bar{Q} : \bar{Q}| < \infty$. С учетом последнего неравенства подгруппа $R\bar{Q}$ замкнута в топологии Зарисского группы **GL** (n, K). Поэтому, очевидно, $\bar{R} = R\overline{Q}$ и, значит, $\overline{R} \cap G = R(\overline{Q} \cap G)$. Так как подгруппы R и $\overline{Q} \cap G$ инвариантны в $R(\overline{Q} \cap G)$ и локально нильпотентны, то последняя локально нильпотентна ввиду известной теоремы Б. И. Плоткина (см., например, [4]).

2.2. Предложение. *Пусть φ — некоторый гомоморфизм периодической группы $G \subseteq$ **GL** (n, K) и N — его ядро. Тогда найдутся подгруппа $H \subseteq G$ и инвариантная локально нильпотентная подгруппа M группы H такие, что, во-первых, $G^\varphi = H^\varphi$ и $H \cap N = M \cap N$, во-вторых, группа M^φ нильпотентна и, в-третьих, фактор-группа G^φ/M^φ при подходящем $m \in$* **N** *представима матрицами степени m над K.*

Доказательство. Ввиду теоремы 9.20 [1] найдется подгруппа $H \subseteq G$ такая, что пересечение $R = H \cap N$ локально нильпотентно и $G^\varphi = H^\varphi$. Пусть $\bar{R}$, Q и $\bar{Q}$ — такие же, как в 2.1, и $M = \bar{R} \cap H$. Ввиду результата 2.1 подгруппа M локально нильпотентна и инвариантна в H и фактор-группа H/M при подходящем $m \in$ **N** представима матрицами степени m над K. Очевидно, $H \cap N = M \cap N$ и $G^\varphi/M^\varphi \simeq H/M$. Далее, подгруппа $\bar{Q} \cap H$ нильпотентна, $M = R(\bar{Q} \cap H)$ (см. доказательство 2.1) и $M^\varphi \simeq M/(M \cap N) = R(\bar{Q} \cap H)/R \simeq (\bar{Q} \cap H)/(\bar{Q} \cap H \cap R)$. Следовательно, группа M^φ нильпотентна.

2.3. Следствие. *Гомоморфный образ периодической группы матриц над полем является расширением нильпотентной группы с помощью группы, представимой матрицами над тем же полем.*

2.4. *Если подгруппа H периодической группы $G \subseteq$ **GL** (n, K) содержит ее коммутант G', то фактор-группа G/H при подходящем $m \in$* **N** *представима матрицами степени m над некоторым полем F,*

Доказательство. Действительно, специальные ранги силовских p-подгрупп группы G, взятые по всем простым $p \neq \operatorname{char} K$, ограничены в совокупности и в случае, когда $\operatorname{char} K > 0$, экспоненты силовских p-подгрупп группы G при $p = \operatorname{char} K$ ограничены в совокупности (см. [10], § 25). Это же верно и для силовских подгрупп любой фактор-группы G. В самом деле, так как G — линейная периодическая группа, то при произвольном ее гомоморфизме φ для любого $p \in$ **P** каждая силовская p-подгруппа группы G^φ является образом в ней подходящей силовской p-подгруппы группы G ([1], теорема 9.15). С учетом этого справедливость 2.4 вытекает из известного критерия А. И. Мальцева представимости абелевой группы матрицами над полем (см., например, [1], теорема 2.2).

2.5. Предложение. *Гомоморфный образ периодической группы матриц над полем обладает конечным инвариантным рядом, факторы которого представимы матрицами над подходящими полями.*

Предложение 2.5 вытекает из 2.3 и 2.4.

2.6. Предложение. *Результаты* 1.1—1.9 *настоящей работы, а также теорема автора* 2.9 [7] *переносятся на случай, когда G — гомоморфный образ некоторой периодической группы $H \subseteq$* **GL** (n, K).

Доказательство. Пусть φ — естественный гомоморфизм H на G и N — его ядро. Ввиду теоремы 9.20 [1] можно считать, что подгруппа N локально нильпотентна. Согласно известной теореме Цассенхауза произвольная локально разрешимая линейная группа разрешима (см., например, [10], § 19, теоремы 8, 9). Следовательно, можно считать, что N разрешима. Поэтому если группа G (почти) разрешима, то и H (почти) разрешима. Учитывая это, а также следствие 2.3, и используя результаты 1.1—1.9, убеждаемся, что последние переносятся на рассматриваемый случай. Теорему 2.9 [7] нетрудно перенести на случай $G = H^{\varphi}$, используя ее саму, следствие 1.35 [7] и следствие 2.3.

Следующая теорема анонсирована автором в [11].

2.7. Теорема. *Фактор-группа периодической группы матриц над полем, факторизуемая некоторыми своими попарно перестановочными локально нильпотентными подгруппами, разрешима. Если такая группа G факторизуема конечным числом некоторых своих попарно перестановочных почти локально нильпотентных подгрупп, то она почти разрешима.*

Доказательство. С учетом следствия 2.3 справедливость первого утверждения настоящей теоремы непосредственно вытекает из теоремы 2.14 [7], а доказательство справедливости второго сводится к случаю, когда $G \subseteq \mathbf{GL}(n, K)$ для некоторых n и K.

Итак, пусть периодическая группа $G \subseteq \mathbf{GL}(n, K)$ разложима в произведение некоторых попарно перестановочных почти локально нильпотентных подгрупп A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать далее, что все подгруппы $\langle \bigcup\limits_{i \neq j} A_i \rangle$, $j = 1, 2, \ldots, m$, почти разрешимы. Можно считать также, что $\mathfrak{S}(G) = 1$. (При этом предположении нужно показать, что $|G| < \infty$.) Действительно, подгруппа $\mathfrak{S}(G)$ разрешима в силу теоремы Цассенхауза. Поэтому и ее замыкание $\overline{\mathfrak{S}(G)}$ в топологии Зарисского группы $\mathbf{GL}(n, K)$ является разрешимой группой (см., например, [9], гл. 4, § 4, п. 2, теорема 7). Следовательно, $\mathfrak{S}(G) = \overline{\mathfrak{S}(G)} \cap G$ и, значит, фактор-группа $G/\mathfrak{S}(G)$ представима матрицами над полем K ввиду теоремы Шевалле (см., например, [1], теорема 6.4). Далее, как известно, произвольная примарная группа матриц над полем разрешима (см., например, [10], § 25, теоремы 1 и 2). Поэтому при каждом $p \in \mathbf{P}$ $O_p(G) \subseteq \mathfrak{S}(G) = 1$.

Возьмем какой-нибудь индекс $k \leqslant m$ и два любых содержащих k собственных подмножества Λ и Ψ множества $\{1, 2, \ldots, m\}$. Положим, $A = \langle \bigcup\limits_{i \in \Lambda} A_i \rangle$ и $B = \langle \bigcup\limits_{i \in \Psi} A_i \rangle$. Покажем, что $O_p(A) \cap O_p(B) = 1$ при каждом $p \in \mathbf{P}$. Пусть P — какая-нибудь силовская p-подгруппа группы G. Будучи группой матриц над полем она локально нильпотентна (см., например, [10], § 25, теоремы 1 и 2). Далее, в группе G, как и во всякой периодической группе матриц над полем, силовские p-подгруппы сопряжены ([5], теорема 1.15). Поэтому $O_p(A) \subseteq P^x$, $O_p(B) \subseteq P^y$ для подходящих $x, y \in G$. Тогда ввиду леммы 2.25 [7] для некоторого элемента $z \in G$ $\langle O_p(A) \cup O_p(B) \rangle \subseteq P^z$. Следовательно, $\langle O_p(A) \cup O_p(B) \rangle$ — локально нильпотентная p-группа. Теперь, рассуждая как при доказательстве теоремы 2.14 [7], убеждаемся в том, что $O_p(A) \cap O_p(B) \subseteq O_p(G)$.

Далее, используя теорему Колчина—Мальцева, нетрудно убедиться в следующем: фактор-группа $X/O_p(X)$ разрешимой линейной группы X удовлетворяет условию $\min = p$. Следовательно, фактор-группы $A/O_p(A)$ и $B/O_p(B)$, а вместе с ними и фактор-группа $A_k/((A_k \cap O_p(A)) \cap (A_k \cap \cap O_p(B))) = A_k/1$, $k = 1, 2, \ldots, m$, удовлетворяют условию $\min - p$ при каждом $p \in \mathbf{P}$. Тогда с учетом того, что $\mathfrak{S}(G) = 1$, $|G| < \infty$ ввиду 1.6. Теорема доказана.

2.8. *Пусть π — любое непустое множество простых чисел. Фактор-группа периодической линейной группы, разложимая в произведение каких-нибудь своих попарно перестановочных почти локально нильпотентных π-подгрупп, является π-группой.*

Результат 2.8 непосредственно вытекает из теоремы 2.7 настоящей работы и следствия 1.32 [7].

3. Факторы нормальных систем факторизуемых групп.

3.1. Лемма. *Пусть A и B — непустые множества элементов конечных порядков группы G такие, что $\pi(A) \cap \pi(B) = \varnothing$; $\mathcal{M}$ — некоторая нормальная система группы G и H — произвольная подгруппа из $\mathcal{M}$, для которой $H \cap AB \neq \varnothing$. Тогда $H \cap A \neq \varnothing$, $H \cap B \neq \varnothing$ и $H \cap AB = (H \cap \cap A)(H \cap B)$. В частности, если $G = AB$, то $H = (H \cap A)(H \cap B)$.*

Доказательство. Действительно, если заключение леммы не верно, то, очевидно, найдутся элементы $a \in (A \setminus H)$ и $b \in (B \setminus H)$, для которых $ab \in H$. Обозначим через L пересечение всех членов системы $\mathcal{M}$, содержащих a, b и H; через M — объединение всех входящих в $\mathcal{M}$ истинных подгрупп группы L. Нетрудно видеть, что $L \in \mathcal{M}$, $M \in \mathcal{M}$ и M — содержащая H инвариантная истинная подгруппа группы L. Обозначим через $\tilde{a}$ и $\tilde{b}$ образы элементов a и b в фактор-группе L/M и через $\tilde{1}$ единицу последней. Очевидно, $\tilde{a}\tilde{b} = \tilde{1}$ и порядки элементов $\tilde{a}$, $\tilde{b}$ конечны и взаимно просты. Следовательно, $\tilde{a} = \tilde{b} = \tilde{1}$. Но тогда $a \in M$, $b \in M$. Противоречие.

3.2. Лемма. *Пусть $G \neq 1$ — группа, факторизуемая двумя периодическими подгруппами A и B без элементов одинаковых простых порядков, и H — фактор какой-нибудь ее нормальной системы. Тогда* 1) *$H = KL$, где K (соответственно, L) — подгруппа, которая либо равна единице, либо изоморфна фактору некоторой нормальной системы группы A (соответственно, B);* 2) *если группа H содержит S-подгруппу конечного индекса, то она периодична и $\pi(H) \subseteq \pi(A) \cup \pi(B)$;* 3) *если G обладает нормальной системой с S-факторами и конечными факторами (в частности, является RN-группой), то $\pi(G) = \pi(A) \cup \pi(B)$.*

Лемму 3.2 можно доказать, используя лемму 3.1.

3.3. Предложение. *Пусть $G \neq 1$ — группа, разложимая в произведение попарно перестановочных подгрупп A_ι, $\iota \in \mathrm{I}$, такое, что выполняется условие: при произвольном $\alpha \in \mathrm{I}$ подгруппы A_α и $\langle \bigcup_{\iota \neq \alpha} A_\iota \rangle$ периодические, причем $\pi(A_\alpha) \cap \pi(\langle \bigcup_{\iota \neq \alpha} A_\iota \rangle) = \varnothing$. Тогда, во-первых, произвольная подгруппа H, входящая в какую-нибудь нормальную систему группы G, разложима в произведение попарно перестановочных подгрупп $H \cap A_\iota$, $\iota \in \mathrm{I}$, и, во-вторых, любой фактор произвольной нормальной системы группы G обладает одним из свойств:* а) *изоморфен фактору нормальной системы одной из подгрупп A_ι, $\iota \in \mathrm{I}$,* б) *разложим в произведение попарно перестановочных подгрупп, изоморфных факторам нормальных систем некоторых попарно различных подгрупп A_ι, $\iota \in \mathrm{I}$.*

Доказательство. Пусть предложение не верно. Ввиду леммы 3.1 подгруппы $H \cap A_\iota$, $\iota \in \mathrm{I}$, попарно перестановочны. Поэтому $\langle \bigcup_{\iota \in \mathrm{I}} (H \cap A_\iota) \rangle \neq H$. Тогда, очевидно, для некоторого $\alpha \in \mathrm{I}$ найдутся элементы $a \in (A_\alpha \setminus H)$ и $b \in \langle \bigcup_{\iota \neq \alpha} A_\iota \rangle$ такие, что $ab \in H$. Далее, ввиду леммы 3.1 $H = (H \cap A_\alpha)\left(H \cap \langle \bigcup_{\iota \neq \alpha} A_\iota \rangle\right)$. Следовательно, $ab = a^* b^*$ для подходящих $a^* \in (H \cup A_\alpha)$ и $b^* \in \left(H \cap \langle \bigcup_{\iota \neq \alpha} A_\iota \rangle\right)$. Но $a^{*-1}a = b^* b^{-1} \in (A_\alpha \cap \langle \bigcup_{\iota \neq \alpha} A_\iota \rangle)$ и, значит, $a = a^* \in (H \cap A_\alpha)$. Противоречие.

3.4. Определение (см. [7]). *Если для системы $\{G_p \mid p \in \mathbf{P}\}$ силовских p-подгрупп группы G, взятых по одной для каждого простого p выполняются условия:* 1) *$G = \langle \bigcup_{p \in \mathbf{P}} G_p \rangle$;* 2) *$G_p G_q = G_q G_p$, $p, q \in \mathbf{P}$;* 3) *для любого непустого множества σ простых чисел подгруппа $\langle \bigcup_{p \in \sigma} G_p \rangle$ является σ-группой, то такая система называется полной силовской базой группы G.*

3.5. Лемма. *Пусть $\{G_p \mid p \in \mathbf{P}\}$ — система p-подгрупп группы G, взятых по одной для каждого простого p. Если для этой системы выполняются условия 1—3 из определения 3.4, то она обязательно является полной силовской базой группы G.*

Доказательство. Действительно, для всякого простого p, очевидно, что $G = G_p \langle \bigcup_{q \neq p} G_q \rangle$ и G_p, $\langle \bigcup_{q \neq p} G_q \rangle$ — соответственно p- и p'-группы. Поэтому G_p — силовская p-подгруппа группы G ([7], лемма 2.12).

3.6. Теорема. *Если $\{G_p \mid p \in \mathbf{P}\}$ — полная силовская база группы G, то $\{H \cap G_p \mid p \in \mathrm{P}\}$ — полная силовская база для всякой подгруппы H, через которую проходит какая-нибудь нормальная система группы G.*

Теорему 3.6 нетрудно доказать, используя предложение 3.3 и лемму 3.5. Эта теорема обобщает теорему 4 [12].

3.7. *Пусть периодическая группа G, разложимая в произведение некоторых попарно перестановочных подгрупп A_ι, $\iota \in \mathrm{I}$, никакие две из которых не имеют элементов одинаковых простых порядков, обладает нормальной системой с S-факторами и конечными факторами (в частности, является RN-группой, локально разрешимой группой). Тогда: 1) любая подгруппа H, через которую проходит какая-нибудь нормальная система группы G, разложима в произведение попарно перестановочных подгрупп $H \cap A_\iota$, $\iota \in \mathrm{I}$; 2) для любого непустого подмножества $\Lambda \subseteq \mathrm{I}$ $\pi\left(\langle \bigcup_{\iota \in \Lambda} A_\iota \rangle\right) = \bigcup_{\iota \in \Lambda} \pi(A_\iota)$.*

Доказательство 3.7 нетрудно провести от противного, опираясь на предложение 3.3.

3.8. Замечание. Очевидно, в 3.7 группа G не обязана обладать нормальной системой с S-факторами. Она также может не обладать ни одной нормальной системой с конечными (и даже линейными) факторами. В самом деле, абсолютно простые бесконечные примарные группы являются S-группами, но, очевидно, такой системой не обладают. Отметим, что существование таких групп впервые установил С. Н. Черников [13], опираясь на отрицательное решение проблемы Бернсайда о периодических группах (П. С. Новиков, С. И. Адян) и положительное решение ослабленной проблемы Бернсайда для всех простых показателей (А. И. Кострикин). Тем самым С. Н. Черников дал положительный ответ на известный вопрос А. Г. Куроша [14] относительно существования бесконечных простых p-групп. (При этом экспонента абсолютно простой группы, о которой идет речь, может быть любым простым числом p, для которого имеется бесконечная конечнопорожденная группа экспоненты p.)

Следующая теорема была ранее анонсирована автором [15]. В ней π — произвольное непустое множество простых чисел.

3.9. Теорема. *Пусть G — периодическая группа, разложимая в произведение попарно перестановочных π-подгрупп A_ι, $\iota \in \mathrm{I}$, никакие две из которых не имеют элементов одинаковых простых порядков и каждая из которых является прямым произведением своих силовских p-подгрупп по разным $p \in \mathbf{P}$. Тогда если группа G обладает нормальной системой, факторы которой являются гомоморфными образами периодических линейных групп (в частности, конечны), то G является π-группой, и все факторы любой ее системы такого рода разрешимы (вследствие чего G является RN-группой).*

Доказательство. Пусть теорема не верна. Тогда ввиду предложения 3.3 и теоремы 2.7 найдется конечное подмножество $\Lambda \subseteq \mathrm{I}$ такое, что $\pi\left(\langle \bigcup_{\iota \in \Lambda} A_\iota \rangle\right) \neq \bigcup_{\iota \in \Lambda} \pi(A_\iota)$, но для любого $\alpha \in \mathrm{I}$ $\pi\left(\langle \bigcup_{\iota \in (\Lambda \setminus \{\alpha\})} A_\iota \rangle\right) = \bigcup_{\iota \in (\Lambda \setminus \{\alpha\})} \pi(A_\iota)$. Применяя теперь 2.8, а также снова предложение 3.3, убеждаемся, что для произвольного фактора H любой нормальной системы группы $\langle \bigcup_{\iota \in \Lambda} A_\iota \rangle$ выполняется соотношение $\pi(H) \subseteq \bigcup_{\iota \in \Lambda} \pi(A_\iota)$, если он является гомоморфным образом какой-нибудь периодической линейной группы.

Так как, очевидно, $\langle\bigcup_{\iota\in\Lambda} A_\iota\rangle$ обладает нормальной системой с такими факторами, то должно быть: $\pi\left(\langle\bigcup_{\iota\in\Lambda} A_\iota\rangle\right)=\bigcup_{\iota\in\Lambda}\pi(A_\iota)$. Противоречие.

3.10. *Если локально конечная группа G разложима в произведение таких же, как в теореме 3.9, подгрупп A_ι, $\iota\in I$, и при этом обладает нормальной системой с линейными факторами, то она локально разрешима.*

3.11. *Не более чем счетная локально конечная группа локально разрешима тогда и только тогда, когда она обладает нормальной системой с линейными факторами и при этом может быть представлена в виде произведения некоторых попарно перестановочных локально нильпотентных подгрупп, попарно не имеющих элементов одинаковых $\neq 1$ порядков.*

Утверждение 3.11 вытекает из 3.10 и следствия 2.3 [7].

1. *Wehrfritz B. A. F.* Infinite linear groups.— Berlin etc : Springer, 1973.— 229 p.
2. *Wielandt H.* Über Produkte von nilpotenten Gruppen // Ill. J. Math.— 1958.— **2**, N 4 B.— S. 611—618.
3. *Курош А. Г.* Теория групп.— 3-е изд., доп.— М. : Наука, 1967.— 648 с.
4. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— 1-е изд.— М. : Наука, 1972.— 240 с.
5. *Платонов В. П.* Теория алгебраических линейных групп и периодические группы // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1966.— **30**, № 3.— С. 573—620.
6. *Kegel O. H.* On the solvability of some factorized linear groups // Ill. J. Math.— 1965.— **9**, N 3.— P. 535—547.
7. *Черников Н. С.* Группы, разложимые в произведение перестановочных подгрупп.— Киев : Наук. думка, 1987.— 206 с.
8. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups.— Amsterdam etc. : North-Holland Publ. Co, 1973.— 210 p.
9. *Плоткин Б. И.* Группы автоморфизмов алгебраических систем.— М. : Наука, 1966.— 604 с.
10. *Супруненко Д. А.* Группы матриц.— М. : Наука, 1972.— 352 с.
11. *Черников Н. С.* Об условиях разрешимости и почти разрешимости бесконечных факторизуемых групп // XVIII Всесоюз. алгебр. конф : Тез. докл. (Кишинев, 16—18 сент. 1985 г.).— Кишинев : Ин-т математики с ВЦ АН МССР, 1985.— Ч. 2.— С. 268.
12. *Черников Н. С.* Факторизация бесконечных групп попарно перестановочными подгруппами // Строение групп и их подгрупповая характеризация.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 47—66.
13. *Черников С. Н.* Условия локальной конечности однослойных p-групп // Докл. АН СССР.— 1962.— **147**, № 1.— С. 49—52.
14. *Курош А. Г.* Несколько замечаний к теории бесконечных групп // Мат. сб.— 1939.— **5**, № 2.— С. 347—354.
15. *Черников Н. С.* Некоторые условия разрешимости бесконечных факторизуемых групп // IX Всесоюз. симп. по теории групп : Тез. докл. (Москва, 18—20 сент. 1984 г.).— М. : МГПИ им. В. И. Ленина, 1984.— С. 75—76.

Ин-т математики АН УССР, Киев Получено 20.11.87