УДК 517.9

Ю. А. Митропольский, А. К. Лопатин

Асимптотическая декомпозиция вполне интегрируемых пфаффовых систем с малым параметром

Рассмотрим вполне интегрируемую систему в полных дифференциалах

$$dx' = (\Omega(x') + \varepsilon\tilde{\Omega}'(\varepsilon, x'))\,dt', \quad x'(t_0') = x_0, \tag{1}$$

где $t' = \operatorname{colon} \| t_1', \ldots, t_m' \|$ — вектор независимых переменных, $x' = \operatorname{colon} \| x_1', \ldots, x_n' \|$ — вектор зависимых переменных. Матрица $\tilde{\Omega}(\varepsilon, x')$ представлена сходящимся рядом $\tilde{\Omega}(\varepsilon, x') = \sum\limits_{l} \varepsilon^{l-1}\tilde{\Omega}_l(x')$.

Матрицы $\Omega(x') = \| \omega_j'^{(i)} \|$, $\tilde{\Omega}_l(x') = \| \tilde{\omega}_{lj}'^{(i)} \|$ имеют размерность $n \times m$ и $\omega_j'^{(i)}, \tilde{\omega}_j'^{(i)}\colon M \to R^n$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $l = 1, 2, \ldots$; $M(x') \in R^n$ — область фазового пространства. Предположим, что $G(t', x') = I_1 \times \ldots \times I_m \times I_\varepsilon \times M(x')$, $I_i = (\alpha_i, \beta_i)$, $t_i' \in I_\varepsilon$, ε — малый положительный параметр, $\varepsilon \in I_\varepsilon = [0, 1]$ — область единственности решения задачи Коши для уравнения (1). Функции $\omega_j'^{(i)}$, $\tilde{\omega}_{lj}'^{(i)}$ — вещественно-аналитические в области $M(x')$, т. е. $\omega_j'^{(i)}, \tilde{\omega}_{lj}'^{(i)} \in \mathfrak{O}(M)$.

Системы вида (1) являются обобщением систем обыкновенных дифференциальных уравнений (достаточно положить в (1) число независимых переменных $m = 1$). В настоящей работе метод асимптотической декомпозиции [1] переносится на системы вида (1).

Наряду с возмущенной системой (1) будем рассматривать отдельно систему нулевого приближения

$$dx' = \Omega(x')\,dt', \quad x'(t_0') = x_0, \tag{2}$$

получаемую из (1), если положить $\varepsilon \equiv 0$. Будем полагать, что система (2) вполне интегрируема в области $H_0 = I_1 \times \ldots \times I_m \times H(x')$, $H(x') \subseteq M(x')$. Следовательно, H_0 — область существования общего решения задачи Коши.

Операторы, ассоциированные с системой (1), представимы в виде

$$U_{0i}' = U_i' + \varepsilon\tilde{U}_i', \quad i = \overline{1, m}, \tag{3}$$

где

$$\tilde{U}'_i = \sum_l \varepsilon^{l-1}\tilde{U}'_{li}, \quad U'_i = \omega_1'^{(i)}\partial/\partial x'_1 + \ldots + \omega_n'^{(i)}\partial/\partial x'_n,$$

$$\tilde{U}'_{li} = \tilde{\omega}_1'^{(i)}\partial/\partial x'_1 + \ldots + \tilde{\omega}_n'^{(i)}\partial/\partial x'_n, \quad l = 1, 2, \ldots .$$

Операторы U'_i коммутативны: $[U'_i, U'_j] = 0$ вследствие предполагаемой полной интегрируемости системы (2).

Всюду в дальнейшем предполагаем, что возмущения в системе (1) не меняют структуры интегрального многообразия системы нулевого приближения (2), т. е. она также вполне интегрируема при всех рассматриваемых значениях параметра ε. Следовательно, операторы U'_{0i} (3) коммутативны:

$$[U'_{0i}, U'_{0j}] \equiv 0, \quad i, j = \overline{1, m}. \tag{4}$$

Условия (4) эквивалентны последовательности соотношений

$$[U'_i, U'_j] \equiv 0, \quad [\tilde{U}'_{1i}, U'_j] + [U'_i, \tilde{U}'_{1j}] \equiv 0,$$

$$[\tilde{U}'_{2i}, U'_j] + [\tilde{U}'_{1i}, \tilde{U}'_{1j}] + [U'_i, \tilde{U}'_{2j}] \equiv 0, \ldots \tag{5}$$

Применим к системе (1) алгоритм асимптотической декомпозиции, совершив замену переменных в виде рядов Ли

$$x'_k = \exp(\varepsilon S)\, x_k, \quad x_k = \exp(-\varepsilon S')\, x'_k, \quad k = \overline{1, n}, \tag{6}$$

где $S = S_1 + \varepsilon S_2 + \ldots$, $S_i = \gamma_{i1}\partial/\partial x_1 + \ldots + \gamma_{in}\partial/\partial x_n$, $i = 1, 2, \ldots$, — дифференциальные операторы с неопределенными пока коэффициентами.

Операторы U'_{0i}, $i = \overline{1, m}$, под действием преобразований (6) перейдут в следующие:

$$U'_{0i} \to U_{0i} = U_i + \varepsilon(-[U_i, S_1] + F_i^{(1)}) + \ldots + \varepsilon^{\nu}(-[U_i, S_\nu] + F_i^{(\nu)}) + \ldots; \tag{7}$$

где $F_i^{(\nu)} = F_i^{(\nu)}(U_i, \tilde{U}_{li}, S_1, \ldots, S_{\nu-1})$ — известные линейные дифференциальные операторы первого порядка.

Для нахождения операторов S_ν образуем систему операторных уравнений

$$[U_1, S_\nu] = F_1^{(\nu)}, \ldots, [U_m, S_\nu] = F_m^{(\nu)}. \tag{8}$$

Разрешимость операторной системы (8) определяется структурой алгебры централизатора $\mathfrak{B}_0$, порождаемой решениями однородной системы: $[U_1, S_\nu] = 0, \ldots, [U_m, S_\nu] = 0$. Рассмотрим вместо (8) систему операторных уравнений

$$[U_1, S_\nu] = F_1^{(\nu)} - \mathrm{pr}\, F_1^{(\nu)}, \ldots, [U_m, S_\nu] = F_m^{(\nu)} - \mathrm{pr}\, F_m^{(\nu)}, \tag{9}$$

где через $\mathrm{pr}\, F_1^{(\nu)}, \ldots, \mathrm{pr}\, F_m^{(\nu)}$ обозначены проекции операторов $F_1^{(\nu)}, \ldots, F_m^{(\nu)}$ на алгебру централизатора $\mathfrak{B}_0$ (точное определение приводится ниже).

Пусть последовательность операторов $S_1, S_2, \ldots$ определена из системы (9). Тогда преобразованные операторы U_{0i} примут вид

$$U_{0i} = U_i + \varepsilon N_i^{(1)} + \ldots + \varepsilon^{\nu} N_i^{(\nu)} + \ldots, \; i = 1, m, \tag{10}$$

где

$$N_1^{(\nu)} = \mathrm{pr}\, F_1^{(\nu)} \equiv \sum_{j=1}^{n} b_{01j}^{(\nu)}\partial/\partial x_j,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$N_m^{(\nu)} = \mathrm{pr}\, F_m^{(\nu)} \equiv \sum_{j=1}^{n} b_{0mj}^{(\nu)}\partial/\partial x_j.$$

Ввиду принадлежности операторов $N_1^{(\nu)}, \ldots, N_m^{(\nu)}$ алгебре $\mathfrak{B}_0$, они коммутативны с операторами $U_1, \ldots, U_m$: $[U_j, N_1^{(\nu)}] \equiv 0, \ldots, [U_j, N_m^{(\nu)}] \equiv 0$, $j = \overline{1, m}$.

По операторам U_{0i}, $i = \overline{1, m}$, восстанавливается преобразованная система

$$\begin{aligned} dx_1 &= \omega_1^{(1)} dt_1 + \ldots + \omega_1^{(m)} dt_m + \varepsilon \{N_1 x_1 dt_1 + \ldots + N_m x_1 dt_m\}, \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \ldots \quad \ldots \ldots \quad \ldots \ldots \ldots \\ dx_n &= \omega_n^{(1)} dt_1 + \ldots + \omega_n^{(m)} dt_m + \varepsilon \{N_1 x_n dt_1 + \ldots + N_m x_n dt_m\}, \end{aligned} \tag{11}$$

где $N_1 = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu-1} N_1^{(\nu)}, \ldots, N_m = \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu-1} N_m^{(\nu)}$, которая с учетом формул (10) принимает вид

$$\begin{aligned} dx_1 &= \omega_1^{(1)} dt_1 + \ldots + \omega_1^{(m)} dt_m + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} (b_{011}^{(\nu)} dt_1 + \ldots + b_{01m}^{(\nu)} dt_m), \\ \ldots & \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \ldots \ldots \quad \ldots \ldots \ldots \\ dx_n &= \omega_n^{(1)} dt_1 + \ldots + \omega_n^{(m)} dt_m + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} (b_{0n1}^{(\nu)} dt_1 + \ldots + b_{0nm}^{(\nu)} dt_m). \end{aligned}$$

Порождающей алгеброй Ли системы (11) является алгебра централизатора $\mathfrak{B}_0$. Чтобы подчеркнуть эту связь с алгеброй централизатора, будем называть пфаффову систему (11) централизованной. Централизованная система обладает следующими свойствами: ее нулевое приближение совпадает с системой нулевого приближения (2), она является вполне интегрируемой и инвариантна относительно коммутативной группы Ли преобразований $x = \exp(\mu U_j(\overline{x}))\overline{x}$, $j = \overline{1, m}$, где $\overline{x} = \operatorname{colon} \| \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n \|$, $U_1, \ldots, U_m$ — операторы, ассоциированные с системой нулевого приближения (2).

Прежде чем перейти к обоснованию алгоритма асимптотической декомпозиции (построению проекции $\operatorname{pr} F$ оператора $F \in \mathfrak{D}^{(1)}(G)$ и доказательству разрешимости системы уравнений (9), приведем теоремы об интегрировании централизованной системы (11), показывающие преимущества при исследовании решения перехода от возмущенной системы (1) к централизованной системе (11).

Теорема 1. *Пусть в централизованной системе* (11) *коэффициенты операторов $N_1(x), \ldots, N_m(x)$ являются аналитическими функциями в области $G_{0\varepsilon} = \overline{I}_1 \times \ldots \times \overline{I}_m \times \overline{I}_\varepsilon \times \overline{G} \in R^{n+m-1}$, $\overline{I}_\varepsilon = [0, 1]$. $\overline{I}_j = [a_j, b_j]$, $j = \overline{1, m}$. Тогда можно указать такое число T_0, что решение системы* (11) *представимо рядом Ли*:

$$x_j = \exp(\tau_1 N_1(z) + \ldots + \tau_m N_m(z)) z_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{12}$$

где $\tau_j = \varepsilon(t_j - t_{0j})$, $j = \overline{1, n}$, $z = \operatorname{colon} \| z_1, \ldots, z_n \|$ — решение системы нулевого приближения

$$dz = \Omega(z)\, dt, \quad z(t_0) = x_0. \tag{13}$$

Ряд Ли (12) *сходится абсолютно и равномерно в области $\overline{G}_{0\varepsilon\tau} = [t_{01}, t_{01} + T_0/\varepsilon] \times \ldots \times [t_{0m}, t_{0m} + T_0/\varepsilon] \times \overline{I}_\varepsilon \times \overline{G}$.*

Доказательство. В централизованной системе (11) сделаем замену переменных в виде ряда Ли

$$x = \exp(N(z))\, z, \tag{14}$$

где $N(z) = \tau_1 N_1(z) + \ldots + \tau_m N_m(z)$. Обратное преобразование задается формулой $z = \exp(-N(x))\, x$. Преобразуем вначале соответствующие системе (13) операторы $U^{(j)} = \partial/\partial t_j + U_j(x) + \varepsilon N_j(x)$, $j = \overline{1, m}$. В новых переменных для оператора $U^{(j)}(x)$ получим выражение

$$\sum_{i=1}^{n} U^{(j)}(x)\, z_i \partial/\partial z_i = \sum_{i=1}^{n} U^{(j)} \exp(-N(x))\, x_i \partial/\partial z_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left\{ \frac{\partial}{\partial t_j} \exp(-N(x))\, x_i + U_j(x) \exp(-N(x))\, x_j + \varepsilon N_j(x) \exp(-N(x))\, x_i \right\} \times$$

$$\times\ \partial/\partial z_i = \sum_{i=1}^{n} \{-\varepsilon N_j(x) \exp(-N(x))\, x_i + U_j(x) \exp(-N(x))\, x_i +$$

$$+ \varepsilon N_j(x) \exp(-N(x))\, x_i\}\, \partial/\partial z_i = \sum_{i=1}^{n} U_j(x) \exp(-N(x))\, x_i \partial/\partial z_i.$$

Коэффициенты полученного оператора являются функциями переменных x, которые подвергнуты точечным преобразованиям (14). Используя свойства этих преобразований и принимая во внимание коммутативность операторов U и N, получаем $U_j(x) \exp(-N(x))\, x_i \equiv \exp(N(z))\, U_j(z) \exp(-N(z)) z_i \equiv \equiv U_j(z)\, z_i \equiv \omega_i^{(j)}(z)$. Итак, в новых переменных z операторы $U^{(j)}(z) \equiv \partial/\partial t_j + U_j(z)$ и им соответствует система (13).

Положим в формуле (12) $\tau_1 \equiv \ldots \equiv \tau_n \equiv \varepsilon\,(t - t_0)$. Доказательство оставшейся части теоремы дословно повторяет доказательство теоремы 1 из [1].

В области H_0 существования общего решения задачи Коши системы нулевого приближения (2) система уравнений в частных производных

$$U_1 f = 0, \ldots, U_m f = 0 \tag{15}$$

имеет $n - m$ независимых решений из $\mathfrak{D}(H_0)$: $\rho_1(x), \ldots, \rho_\chi(x)$, $\chi = n - m$. Кроме того, каждая из неоднородных систем $U_1 f = 0, \ldots, U_{j-1} f = 0$, $U_j f = 1$, $U_{j+1} f = 0, \ldots, U_m f = 0$ имеет решение $w_j(x) \in \mathfrak{D}(H_0)$.

Теорема 2. *В области H_0 существования общего решения задачи Коши системы нулевого приближения* (2) *централизованная пфаффова система* (11) *заменой переменных*

$$y_1 = \rho_1(x), \ldots, y_\chi = \rho_\chi(x), \quad \chi = n - m,\ s_1 = w_1(x), \ldots, s_m = w_m(x) \tag{16}$$

преобразуется к χ уравнениям для медленных переменных $y_1, \ldots, y_\chi$

$$\begin{aligned} dy_1 &= \varepsilon\varphi_1^{(1)} dt_1 + \ldots + \varepsilon\varphi_m^{(1)} dt_m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ dy_\chi &= \varepsilon\varphi_1^{(\chi)} dt_1 + \ldots + \varepsilon\varphi_m^{(\chi)} dt_m, \end{aligned} \tag{17}$$

и к m уравнениям для быстрых переменных

$$\begin{aligned} ds_1 &= (1 + \varepsilon\psi_1^{(1)})\, dt_1 + \ldots + \varepsilon\psi_m^{(1)} dt_m, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ ds_m &= \psi_1^{(m)} dt_1 + \ldots + (1 + \varepsilon\psi_m^{(m)})\, dt_m, \end{aligned} \tag{18}$$

где $\varphi_1^{(j)}, \ldots, \varphi_m^{(j)}$, $\psi_1^{(i)}, \ldots, \psi_m^{(i)}$, $j = \overline{1, \chi}$, $i = \overline{1, m}$, — известные функции y, ε. Система (17) *интегрируется независимо и содержит медленные переменные $\tau_j = \varepsilon t_j$ $j = \overline{1, m}$. Система* (18) *интегрируется после нахождения переменных y и сводится к квадратурам.*

Доказательство основывается на использовании свойства коммутативности операторов $U_1, \ldots, U_m$ с операторами $N_1, \ldots, N_m$.

В заключение рассмотрим два утверждения обосновывающие алгоритм асимптотической декомпозиции.

Теорема 3. *В области H_0 существования общего решения задачи Коши системы нулевого приближения алгебра централизатора $\mathfrak{B}_0$, определяемая решениями операторных уравнений*

$$[U_1, Z] = 0, \ldots, [U_m, Z] = 0, \quad Z \in \mathfrak{D}^{(1)}(H_0), \tag{19}$$

содержит n линейно несвязных операторов

$$U_1, \ldots, U_m, U_{m+1}, \ldots, U_n. \tag{20}$$

В произвольном операторе $F \in \mathfrak{D}^{(1)}(H_0)$ однозначно выделяется составляющая $\operatorname{pr} F \in \mathfrak{B}_0$, которая имеет вид

$$\operatorname{pr} F \sum_{j=1}^{n} \rho_j(x) U_j, \tag{21}$$

где $\rho_j(x)$ — решения системы (15).

Доказательство. В области H_0 заменой переменных (16) операторы $U_1, \dots, U_m$ приводятся к виду $\partial/\partial s_1, \dots, \partial/\partial s_m$. Следовательно, в качестве $U_{m+1}, \dots, U_n$ можно принять операторы $\partial/\partial y_1, \dots, \partial/y_\chi$. Если $U \in \mathfrak{B}_0$, то раскладывая его по базису (20) $U = \sum_{j=1}^{n} g_j(x) U_j$ и подставляя в уравнения (19), приходим к соотношениям $U_1 g_j(x) = 0, \dots, U_m g_j(x) = 0$, $j = \overline{1, m}$. Следовательно, доказана формула (21).

Пусть $F \in \mathfrak{D}^{(1)}(H_0)$, $F = \sum_{j=1}^{n} b_j(x) U_j$, $b_j(x) \in \mathfrak{D}(H_0)$. Перейдем в F к переменным y, s по формулам (16). Оператор F однозначно представим в виде $F = F_{0\Delta} + F_{0n}$, где $F_{0\Delta} = \sum_{j=1}^{n} b_{0j}(y) U_j$, $b_{0j}(y)$ — свободные члены разложения функции $b_j(x)$ в ряд по переменным $s_1, \dots, s_m$. Возвращаясь к переменным x и обозначая $\operatorname{pr} F \equiv F_{0\Delta}$, приходим к доказываемому утверждению.

Обратимся к вопросу о разрешимости в области H_0 системы операторных уравнений (9). Разложим операторы $F_1^{(\nu)}, \dots, F_m^{(\nu)}$, $\operatorname{pr} F_1^{(\nu)}, \dots, \operatorname{pr} F_m^{(\nu)}$ по базису (20) алгебры $\mathfrak{B}_0$:

$$\begin{gathered} F_1^{(\nu)} = \sum_{j=1}^{n} b_{1j}^{(\nu)} U_j, \ \dots, \ F_m^{(\nu)} = \sum_{j=1}^{n} b_{mj}^{(\nu)} U_j, \\ \operatorname{pr} F_1^{(\nu)} = \sum_{j=1}^{n} b_{01j}^{(\nu)} U_j, \ \dots, \ \operatorname{pr} F_m^{(\nu)} = \sum_{j=1}^{n} b_{0mj}^{(\nu)} U_j. \end{gathered} \tag{22}$$

Оператор S_ν также разыскиваем в виде

$$S_\nu = \gamma_1^{(\nu)} U_1 + \dots + \gamma_n^{(\nu)} U_n. \tag{23}$$

Подстановка формул (22), (23) в уравнения (9) приводит к n независимо интегрируемым подсистемам

$$\begin{gathered} U_1 \gamma_1^{(\nu)} = b_{11}^{(\nu)}, \dots, U_1 \gamma_n^{(\nu)} = b_{1n}^{(\nu)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ U_m \gamma_1^{(\nu)} = b_{m1}^{(\nu)}, \dots, U_m \gamma_m^{(\nu)} = b_{mn}^{(\nu)}. \end{gathered} \tag{24}$$

Теорема 4. *Каждая из подсистем, входящая в систему* (24), *является полной неоднородной.*

Доказательство. Необходимо убедиться в выполнении тождеств (см., например, [2, с. 80]).

$$U_j b_{i1}^{(\nu)} \equiv U_i b_{j1}^{(\nu)}, \dots, U_j b_{in}^{(\nu)} \equiv U_i b_{jn}^{(\nu)}, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{25}$$

Введем обозначения

$$R_1^{(\nu)} = -[U_1, S_\nu] + F_1^{(\nu)}, \dots, R_m^{(\nu)} = -[U_m, S_\nu] + F_m^{(\nu)}. \tag{26}$$

Операторы (7) с учетом введенных обозначений перепишем в виде

$$\begin{gathered} U_{01} = U_1 + \varepsilon R_1^{(1)} + \varepsilon^2 R_1^{(2)} + \dots, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ U_{0m} = U_m + \varepsilon R_m^{(1)} + \varepsilon^2 R_m^{(2)} + \dots. \end{gathered} \tag{27}$$

Из условий коммутативности операторов (27) следуют тождества

$$[U_i, U_j] \equiv 0, \tag{28}$$

$$[U_i, R_j^{(1)}] \equiv [U_j, R_i^{(1)}], \tag{29}$$

$$[U_i, R_j^{(2)}] \equiv [U_j, R_i^{(2)}] + [R_i^{(1)}, R_j^{(1)}], \tag{30}$$

$$[U_i, R_j^{(3)}] \equiv [U_j, R_i^{(3)}] + [R_i^{(1)}, R_j^{(2)}] + [R_i^{(2)}, R_j^{(1)}], \tag{31}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Если учесть разложения (22), (23), то формулы (26) можно представить в виде

$$\begin{aligned} R_1^{(\nu)} &= -U_1\gamma_1^{(\nu)}U_1 - \cdots - U_1\gamma_n^{(\nu)}U_n + b_{11}^{(\nu)}U_1 + \cdots + b_{1n}^{(\nu)}U_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ R_m^{(\nu)} &= -U_m\gamma_1^{(\nu)}U_1 - \cdots - U_m\gamma_n U_n + b_{m1}^{(\nu)}U_1 + \cdots + b_{mn}^{(\nu)}U_n. \end{aligned} \tag{32}$$

Положим в приведенных формулах $\nu = 1$ и вычислим скобки Пуассона:

$$[U_i, R_j^{(1)}] = -U_iU_j\gamma_1^{(1)}U_1 - \cdots - U_iU_j\gamma_n^{(1)}U_n + U_ib_{j1}^{(1)}U_1 + \cdots + U_ib_{jn}^{(1)}U_n, \tag{33}$$

$$[U_j, R_i^{(1)}] = -U_jU_i\gamma_1^{(1)}U_1 - \cdots - U_jU_i\gamma_n^{(1)}U_n + U_jb_{i1}^{(1)}U_1 + \cdots + U_jb_{in}^{(1)}U_n. \tag{34}$$

Приравнивая в соответствии с тождествами (29) правые части соотношений (33) и (34), приходим к доказываемым тождествам (25) при $\nu = 1$: $U_j b_{i1}^{(1)} \equiv U_i b_{j1}^{(1)}, \ldots, U_j b_{in}^{(1)} \equiv U_i b_{jn}^{(1)}$. Следовательно, система уравнений (24) при $\nu = 1$:

$$\begin{gathered} U_1\gamma_1^{(1)} = b_{11}^{(1)}, \ldots, U_1\gamma_n^{(1)} = b_{1n}^{(1)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ U_m\gamma_n^{(1)} = b_{m1}^{(1)}, \ldots, U_m\gamma_n^{(1)} = b_{mn}^{(1)} \end{gathered} \tag{35}$$

является полной неоднородной системой. Нахождение частного решения этой системы сводится к интегрированию однородной системы и последующим квадратурам.

Если $\gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_n^{(1)}$ определены из системы (35), то подстановка в равенства (32) (при $\nu = 1$) вместо функции $U_1\gamma_j^{(1)}, \ldots, U_m\gamma_j^{(1)}$, $j = \overline{1, n}$, тождественно равных им правых частей уравнений (35) $b_{1j}^{(1)}, \ldots, b_{mj}^{(1)}$, $j = \overline{1, n}$, обращает эти равенства в нуль, т. е. $R_i^{(1)} \equiv R_j^{(1)} \equiv 0$. С учетом этого факта формулы (30) запишем так: $[U_i, R_j^{(2)}] \equiv [U_j, R_i^{(2)}]$.

Таким образом, по отношению к уравнениям (24) при значении $\nu = 2$ можно дословно повторить проведенные выше рассуждения. Как видно из формул (28)—(31) они носят рекуррентный характер и позволяют провести доказательство факта полной интегрируемости неоднородных систем вида (24) при любом ν.

В случае обыкновенных дифференциальных систем $m = 1$ и теорема 4 является тривиальной.

Алгоритм перехода от возмущенной системы (1) к централизованной системе (11) будем называть алгоритмом асимптотической декомпозиции (см. [1]). Доказательство теоремы 4 завершает обоснование реализуемости этого алгоритма применительно к пфаффовой системе вида (1).

Рассмотрим не полностью интегрируемые системы. Предположим, что условия полной интегрируемости (4) (или (5)) не выполняются, но система (1) не противоречива, т. е. имеет решения в виде сходящихся рядов

$$x' = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i u_j(t_1, \ldots, t_m), \tag{36}$$

где $u_j = \text{colon}\ \|u_{j1}, \ldots, u_{jn}\|$ — вещественно-аналитические функции в рассматриваемой области. Общее решение системы (1) зависит в этом случае от меньшего, чем n числа произвольных постоянных.

В работе [2, с. 110] показано, что не полностью интегрируемая (непротиворечивая) система может быть сведена к полне интегрируемой с меньшим числом переменных p ($p < n$, $0 \leqslant p \leqslant n-1$). Специфика рассматриваемой системы (1) в том, что она содержит малый параметр, поэтому остановимся на сути указанного сведения. Перепишем систему (1) в виде эквивалентной системы в частных производных

$$\partial x'_p / \partial t'_j = \omega'^{(j)}_p + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \tilde{\omega}'^{(i)}_{\nu p}. \tag{37}$$

Запишем условия интегрируемости системы

$$\frac{\partial \omega'^{(j)}_p}{\partial t'_i} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \frac{\partial}{\partial t'_i} \tilde{\omega}'^{(i)}_{1p} = \frac{\partial \omega'^{(i)}_p}{\partial t'_j} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \frac{\partial \tilde{\omega}'^{(i)}_{\nu p}}{\partial t'_j}$$

или

$$U'_i \omega'^{(j)}_p - U'_j \omega'^{(i)}_p + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} F'_{ij\nu} = 0, \tag{38}$$

где $F'_{ij\nu}$ — известные функции x'.

Система уравнений (38) непротиворечива (так как имеет, например, решения (36)) и, следовательно, может быть решена относительно части переменных

$$x'_{r+1} = \psi_{r+1}(\varepsilon, x'_1, \ldots, x'_r), \ldots, x'_n = \psi_n(\varepsilon, x'_1, \ldots, x'_r). \tag{39}$$

Эти решения можно представить в виде рядов

$$x'_{r+1} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \psi^{(\nu)}_{r+1}(x'_1, \ldots, x'_r),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x'_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \psi^{(\nu)}_n(x'_1, \ldots, x'_r),$$

где функции $\psi^{(0)}_{r+1}, \ldots, \psi^{(0)}_n$ являются решением системы (38) при $\varepsilon = 0$.

Исключим в системе (37) переменные $x'_{r+1}, \ldots, x'_n$ с помощью формул (39). Уравнения для первых r переменных представим в виде

$$\partial x'_p / \partial t'_j = \omega'^{(j)}_p (x'_1, \ldots, x'_r, \psi'_{r+1}, \ldots, \psi'_n) + \\ + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \tilde{\omega}'^{(j)}_{\nu p} (x'_1, \ldots, x'_r, \psi'_{r+1}, \ldots, \psi'_n), \tag{40}$$

а остальные уравнения — соответственно в виде

$$\partial \psi'_g / \partial t'_j = \omega'^{(j)}_p (x'_1, \ldots, x'_r, \psi_{r+1}, \ldots, \psi'_n) + \\ + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \omega'^{(j)}_{\nu g} (x'_1, \ldots, x'_r, \psi'_{r+1}, \ldots, \psi'_n), \quad g = \overline{r+1, n}. \tag{41}$$

Если система алгебраических уравнений (41) удовлетворяется тождественно, то система уравнений (40), как легко показать, вполне интегрируема. Проинтегрировав эту систему от r переменных по формулам (39), легко найти еще $n - r$ частных решений.

Если соотношения (41) тождественно не выполняются, то к ним надо присоединить условия интегрируемости уравнений (40). Полученная система алгебраических уравнений непротиворечива. Из этой системы часть переменных $x'_{r_1+1}, \ldots, x'_r$, $r_1 < r$ следует выразить через остальные и повторить все рассуждения сначала. После конечного числа шагов придем к вполне интегрируемой системе с p переменными и $n - p$ частным решениям.

Легко также видеть, что разрешимость системы алгебраических уравнений (38) и им подобных в рассматриваемой области является критерием непротиворечивости исходной возмущенной системы.

1. *Митропольский Ю. А., Лопатин А. К.* Асимптотическая декомпозиция дифференциальных систем с малым параметром // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 2.— С. 194—204.
2. *Гурса Е.* Интегрирование уравнений с частными производными первого порядка.— Киев : Рад. шк., 1941.— 404 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 15.01.88