УДК 512.544

Н. Ф. Кузенный, С. С. Левищенко, Н. Н. Семко

О группах с инвариантными бесконечными неабелевыми подгруппами

В работе [1] введен класс метагамильтоновых групп. Группа называется метагамильтоновой, если любая ее неабелева подгруппа инвариантна. Свойства локально ступенчатых метагамильтоновых групп изучались в работах [1—6]. Группа называется локально ступенчатой, если всякая ее неединичная конечнопорожденная подгруппа имеет собственную подгруппу конечного индекса [5, 6]. Наиболее общим и существенным результатом, относящимся к метагамильтоновым группам, установленным в работах [1—6], является доказанное С. Н. Черниковым в работах [5, 6] утверждение: коммутант локально ступенчатой метагамильтоновой группы является конечной примарной группой.

В работах [7, 8] дается конструктивное описание конечных ненильпотентных метагамильтоновых групп и конечных нильпотентных метагамильтоновых групп класса больше 2. В частности, в работе [8] доказано, что коммутант конечной нильпотентной метагамильтоновой группы G содержится в любой ее неабелевой подгруппе и класс нильпотентности G не превышает 3.

Конструктивное описание произвольных локально ступенчатых метагамильтоновых групп приведено в работах [9—16].

В работах [5, 6] изучается класс $\overline{IH}$-групп, значительно обобщающий класс бесконечных метагамильтоновых групп. Бесконечня неабелева группа с инвариантными бесконечными неабелевыми подгруппами называется $\overline{IH}$-группой. Основные результаты из работ [5, 6], относящиеся к $\overline{IH}$-группам, можно сформулировать следующим образом.

Предложение А. *Пусть G — локально ступенчатая неметагамильтонова $\overline{IH}$-группа. Тогда* 1) *G — черниковская группа с примарной по p полной частью R ранга l;* 2) *подгруппа R принадлежит любой бесконечной неабелевой подгруппе из G;* 3) $G = C_G(R)\langle a\rangle$, $C_G(R)\cap\langle a\rangle = \langle a^m\rangle$, $m \geqslant 1$; 4) *элемент a^i индуцирует на подгруппе R бесконечно неприводимый автоморфизм, $i = 1, 2, \ldots, m-1$;* 5) *если $l > 1$, то $C_G(R)$ — абелева группа;* 6) *если $p \mid m$, то $l = p-1$.*

Понятно, что во всякой $\overline{IH}$-группе G с полной частью R фактор-группа G/R является метагамильтоновой группой.

Настоящая работа посвящена конструктивному описанию локально ступенчатых неметагамильтоновых $\overline{IH}$-p-групп. С использованием конструктивного описания мегагамильтоновых групп находятся необходимые и достаточные условия, выделяющие 8 конструктивно задаваемых типов неметагамильтоновых $\overline{IH}$-p-групп (теорема 2). Заметим, что первый тип групп из теоремы 2 представляет собой расширение квазициклической группы с помощью конечной дедекиндовой группы. Этот тип групп конструктивно описан в работе [17].

Предложение 1 [9—16]. *Пусть G — локально ступенчатая метагамильтонова группа. Тогда ее коммутант G' содержится в любой неабелевой подгруппе группы G, $|G'| = p^m$, $m \geqslant 1$, и при этом выполняется одно из следующих утверждений:*

1) *G — нильпотентная метагамильтонова группа, причем:* 1.1) $G' = 1$; 1.2) *при $m > 1$ любая силовская p-подгруппа группы G имеет ограниченную экспоненту;*

2) *G — ненильпотентная метагамильтонова группа вида $G = G' \rtimes H$, причем :* 2.1) *G' — минимальный нормальный делитель группы G, совпадающий с коммутантом всякой неабелевой подгруппы из G;* 2.2) $H = Z\langle a\rangle$, $Z \leqslant Z(G)$, $Z \cap \langle a\rangle = \langle a^n\rangle$, $n > 1$, $(n, p) = 1$; 2.3) *элемент a^i индуцирует на G' неприводимый автоморфизм, $i = 1, 2, \ldots, n-1$;*

3) *G — ненильпотентная периодическая метагамильтонова группа вида $G = G' \rtimes H$, причем:* 3.1) *G' — неабелева силовская p-подгруппа группы G порядка p^3, являющаяся либо группой экспоненты p, либо группой кватернионов;* 3.2) *G' совпадает с инвариантным множителем любой подгруппы Шмидта группы G;* 3.3) $H = Z\langle a\rangle$, $Z \leqslant Z(G)$, $Z \cap \langle a\rangle = \langle a^n\rangle$, $n > 1$.

Лемма 1. *Расширение G квазициклической группы K с помощью конечной дедекиндовой группы тогда и только тогда является неметагамильтоновой группой, когда G' содержит неединичные подгруппы непростого порядка.*

Доказательство. Необходимость почти очевидна. Докажем достаточность. Если G' содержит R, то ввиду предложения 1 G — неметагамильтонова группа. Пусть $G' \not\geqslant R$. Тогда $|G'| < \infty$, $Z(G) \geqslant R$. Отсюда следует, что G — нильпотентная группа вида $G = P \times D$, где P — бесконечная силовская p-подгруппа из G, D — конечная дедекиндова p'-группа, $|D'| \leqslant 2$. Так как G' содержит неединичные подгруппы непростого порядка и $G' = P' \times D'$, то $|P'| \neq 1$.

Предположим теперь, что G — метагамильтонова группа. Ввиду предложения 1 $D' = 1$, $G' = P'$, $|P'| > p$. Так как $P \geqslant R$ и G — нильпотентная группа, то получаем противоречие с утверждением 1 предложения 1. Полученное противоречие и завершает доказательство леммы. Лемма доказана.

Л е м м а 2. *Неметагамильтоновы черниковские $\overline{IH}$-p-группы G с центральной полной частью исчерпываются группами следующих типов*:

1) *G — расширение квазициклической p-подгруппы R с помощью конечной дедекиндовой p-группы и G' содержит подгруппы порядка p^2*;

2) *$G = R \times B$, R — квазициклическая p-подгруппа, B — конечная метагамильтонова p-группа, B' содержит подгруппы порядка p^2*;

3) *$G = RB$, R — центральная в G квазициклическая p-подгруппа, B — такая конечная p-подгруппа из G, что $1 < B \cap R = B' \cap R \leqslant Z(G)$, $B/B \cap R$ — недедекиндова метагамильтонова группа и всякая неабелева подгруппа из B, содержащая $R \cap B$, инвариантна в G.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть G — исследуемая группа, R — ее полная часть. Ввиду предложения А R — квазициклическая p-подгруппа и G/R — конечная метагамильтонова p-группа.

Если G/R — дедекиндова группа, то ввиду леммы 1 G — группа типа 1. Поэтому будем считать, что G/R — недедекиндова группа.

Пусть $G = R \times D$. Тогда D — недедекиндова метагамильтонова группа, $G' = D'$. Так как G — неметагамильтонова группа, то $G' = D'$ содержит подгруппы порядка p^2 и в этом случае G — группа типа 2.

Пусть R недополняема в G. Ясно, что $G = RB$, где B — конечная подгруппа наименьшего порядка из G, добавляющая R в G. Положим $Y = R \cap B$, $Z = Y \cap B'$. Понятно, что $B' = G'$, $Z(G) \geqslant Y$, R/Z — центральная квазициклическая подгруппа из G/Z, имеющая тривиальное пересечение с коммутантом G/Z, совпадающим с B'/Z. Тогда ввиду предложения из [6] $G/Z = R/Z \times B^*/Z$, а значит, $G = RB^*$, $R \cap B^* = Z$. Ясно, что $|B/Y| = |B^*/Y| = [G:R]$, $|B^*| = |Z|\,[G:R]$, $|B| = |Y|\,[G:R]$. В силу выбора B $|B| \leqslant |B^*|$. Но тогда $|Z| \geqslant |Y|$ и потому $|Y| = |Z|$, $Y = Z$, B/Z — недедекиндова метагамильтонова группа.

Пусть M неабелева подгруппа из B, содержащая Z. Тогда $RM \lhd G$, $(RM) \cap B = M \lhd B$. Отсюда $M \lhd G$ и, значит, G — группа типа 3. Необходимость доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть G — группа одного из типов 1—3 леммы. Тогда, очевидно, G — черниковская p-группа, полная часть R которой является центральной квазициклической подгруппой из G.

Если G — группа типа 1, то ввиду леммы 1 G — неметагамильтонова $\overline{IH}$ - группа.

Пусть G — группа одного из типов 2, 3 леммы. Нетрудно заметить, что $|G'| > p$. Ввиду утверждения 1 предложения 1 G — неметагамильтонова группа. Пусть H — бесконечная неабелева подгруппа из G. Очевидно, что $H > R$ и $H = RK$, где $K = H \cap B$. Так как $Z(G) \geqslant R$ и $H' \neq 1$, то $K' \neq 1$. Покажем, что $K \lhd B$. Понятно, что $R \cap B \leqslant K$. В группах типа 3 $K \lhd G$ и, значит, $K \lhd B$ по условию. В группах типа 2 K — неабелева подгруппа метагамильтоновой группы B и потому ввиду предложения 1 $G' = B' \leqslant K$. Таким образом, $K \lhd B$ и, значит, и $K \lhd G$. Из этого следует, что и $H \lhd G$ и потому G — $\overline{IH}$-группа. Достаточность доказана. Лемма доказана.

О п р е д е л е н и е 1. *Группа G, порожденная семейством своих неединичных нормальных подгрупп C_i, $i \in I$, называется почти прямым произведением подгрупп C_i с объединенной подгруппой C, если для любых i и j из I, $C_i \cap C_j = C_i \cap D_i = C < C_i$, где D_i — произведение всех C_j.*

Т е о р е м а 1. *Конечные недедекиндовы метагамильтоновы группы G, обладающие такой собственной подгруппой X, что всякая подгруппа N из G, не содержащаяся в X, инвариантна в G и G/N — дедекиндова группа, исчерпываются прямыми произведениями $G = P \times D$, где D — конечная холловская абелева подгруппа из G, принадлежащая X, P — конечная си-*

ловская p-подгруппа, удовлетворяющая одному и только одному из следующих условий:

1) $P = \langle a \rangle \leftthreetimes B$, $|a| = p^\alpha$. $P' = \langle a^{p^k} \rangle$, $P \cap X = \langle a^{p^m} \rangle \times B$, $\alpha > k \geqslant m \geqslant \alpha - k > 0$, $p^k > 2$, B — *абелева группа экспоненты* p^β, $k - m + 1 \geqslant \beta \geqslant \alpha - k$, $B = \langle b \rangle Z$, $|b| = p^\beta$, $Z(G) \geqslant Z$;

2) $P = \langle a \rangle \leftthreetimes B$, $|a| = p^\alpha$, $P' = \langle a^{p^k} \rangle$, $P \cap X = \langle a^{p^m} \rangle \leftthreetimes B$, $\alpha > k \geqslant \alpha - k > m > 0$, B — *абелева группа экспоненты* p^β, $k - m + 1 \geqslant \beta \geqslant \alpha - k > 1$, $B = \langle b \rangle Z$, $|b| = p^\beta$, $Z(G) \geqslant Z$, *экспонента* Z *не превышает* $p^{2k-\alpha+1}$;

3) $P = \langle a \rangle Y$, $|a| = p^\alpha$. $P' = \langle a^{p^{\alpha-1}} \rangle = Y' = \langle a \rangle \cap Y$, $P \cap X = \langle a^{p^m} \rangle Y$, $\alpha > m > 0$, $p^{\alpha-m} > 2$, Y — *почти прямое произведение подгрупп* $Y' \times \langle b_i \rangle$ *с объединенной подгруппой* Y', $i \in I$, $|I| > 1$, $|b_i| = p^{\beta_i}$, $\alpha - m \geqslant \beta_i > 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть G — исследуемая группа, X — ее подгруппа, удовлетворяющая условиям теоремы. Очевидно, что G совпадает с объединением смежных классов X_{g_l}, $l \in L$, $|L| > 1$. Отметим, что только для одного индекса l, например $l = 0$, $g_0 \in X$, для всех остальных l $g_l \notin X$. По условию теоремы для $l \neq 0$ $\langle g_l \rangle \lhd G$ и $G / \langle g_l \rangle$ — дедекиндова группа. Этому же условию удовлетворяет любая подгруппа вида $\langle xg_l \rangle$ ($l \neq 0$), где $x \in X$. Из этого следует, что группа G порождается своими инвариантными циклическими подгруппами вида $\langle xg_l \rangle$, где $x \in X$, $l \neq 0$. Ввиду леммы 2 из [18] G' — неединичная центральная периодическая подгруппа из G. Из этого следует, что $G = P \times D$, где P — недедекиндова силовская p-подгруппа, D — p'-группа. Так как G — метагамильтонова группа, то ввиду предложения 1 $G' = P'$ и потому $D' = 1$.

Если D содержит такой элемент d, что $d \notin X$, то по условию теоремы $\langle d \rangle \lhd G$ и $G / \langle d \rangle$ — дедекиндова группа, $P \times \langle d \rangle / \langle d \rangle$ — ее дедекиндова подгруппа, что невозможно. Таким образом, $d \in X$. Понятно, что $X = D \times X^*$, где $X^* = X \cap P$, X^* — собственная подгруппа из P.

Пусть M — максимальная подгруппа из P, содержащая X^*. Тогда $P = \langle a \rangle M$, $|a| = p^\alpha$, $\alpha > 0$. Очевидно, что для произвольного x из M $\langle ax \rangle \not\leq X$ и, значит, $\langle ax \rangle \lhd G$ и $G / \langle ax \rangle$ — дедекиндова группа. Из этого ввиду теоремы 5 и следствия 5 из [18] P — группа одного из типов 1—3 настоящей теоремы. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть $G = P \times D$, где подгруппы P и D из теоремы. Ввиду следствия 5 из [18] P — недедекиндова метагамильтонова группа. Так как D — абелева холловская подгруппа из G, то ввиду теоремы из [14] G — метагамильтонова группа.

Пусть g — примарный элемент из G, не содержащийся в подгруппе $X = (X \cap P) \times D$. Тогда $g \in P$. Ввиду следствия 6 из [17] $P' \leqslant \langle g \rangle$.

Пусть N подгруппа из G, не принадлежащая X. Тогда N содержит примарный элемент g, не принадлежащий X. По предыдущему утверждению $\langle g \rangle \geqslant P' = G'$ и потому $N \lhd G$ и G/N — дедекиндова группа. Достаточность доказана. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть G — черниковская $\overline{IH}$-группа с нецентральной полной частью R, $X^* = C_G(R)$ и G/R — недедекиндова группа. Тогда $G = X^* \langle a^* \rangle$, $X^* \cap (\langle a^* \rangle) = \langle (a^*)^{p^m} \rangle$, $m > 0$, $(a^*)^{p^{m-1}}$ индуцирует на R бесконечно неприводимый автоморфизм, R — примарная группа, подгруппы $\langle Ra^* \rangle$ и X^*/R удовлетворяют в G/R тем же условиям, что и подгруппы $\langle a \rangle$ и X в группе G из теоремы* 1 *соответственно.*

Доказательство. Пусть G — исследуемая группа, R и X^* — ее подгруппы, удовлетворяющие условиям следствия. Так как $Z(G) \not\geqslant R$, то X^* и X^*/R собственные инвариантные подгруппы из G и G/R соответственно.

Пусть N/R — произвольная подгруппа из G/R, не принадлежащая X^*/R. Тогда N — бесконечная неабелева подгруппа из G и потому $N \lhd G$ и G/N — дедекиндова группа. Из этого получаем, что $N/R \lhd G/R$ и $G/R/N/R$ — дедекиндова группа. Следовательно, X^*/R — собственная подгруппа конечной недедекиндовой метагамильтоновой группы G/R, удовлетворяющая тем же условиям, что и подгруппа X в группе G из теоремы 1. Из этой теоремы вытекает, что $G/R/X^*/R \cong G/X^*$ — циклическая p-группа порядка p^m, $m > 0$. Но тогда $G = X^* \langle a^* \rangle$, $X^* \cap \langle a^* \rangle = \langle (a^*)^{p^m} \rangle$, где подгруппа $\langle Ra^* \rangle$ удовлетворяет тем же условиям в G/R, что и подгруппа $\langle a \rangle$ в G из теоремы 1. Ввиду предложения А $(a^*)^{p^{m-1}}$ индуцирует на R бесконечно неприводимый автоморфизм, R — примарная группа. Следствие доказано.

Следствие 2. *Если G — черниковская неметагамильтонова $\overline{IH}$-группа с полной частью R и ненильпотентной фактор-группой G/R, то R — центральная квазициклическая подгруппа из G.*

Доказательство. Пусть G — исследуемая группа. Так как G/R — конечная ненильпотентная группа, то она не удовлетворяет условиям теоремы 1 и не является дедекиндовой группой. Поэтому из следствия 1 имеем $Z(G) \geqslant R$. Ввиду предложения А R — квазициклическая группа. Следствие доказано.

Следствие 3. *Пусть G — $\overline{IH}$-p-группа, являющаяся нецентральным расширением квазициклической подгруппы R с помощью конечной недедекиндовой группы. Тогда G — 2-группа вида $G = X\langle a \rangle$, $X \cap \langle a \rangle = \langle a^2 \rangle$. $X = C_G(R)$, $R \cap \langle a \rangle = \langle a^{2^\alpha} \rangle$, $|R \cap \langle a \rangle| \leqslant 2$, $[R, a] = R$, $G' = R\langle a^2 \rangle$, $\alpha > k \geqslant \alpha - k > 0$, $k > 1$, $\langle a^2 \rangle \lhd G$, $\langle a^{2^{\alpha-k+1}}, a^{2^{k+1}}, a^{2^{\alpha-1}} \rangle \leqslant Z(G)$.*

Доказательство. Пусть G — исследуемая группа, R — ее полная часть. Так как R — инвариантная нецентральная квазициклическая подгруппа из p-группы G, то в силу [6] $p = 2$ и $[G : X] = 2$, где $X = C_G(R)$. Из этого следует, что $G = X\langle a \rangle$, $X \cap \langle a \rangle = \langle a^2 \rangle$, $[R, a] = R$.

Положим $A = R\langle a \rangle$. Тогда $a^2 \in Z(A)$. Положим далее $R \cap \langle a \rangle = \langle a^{2^\alpha} \rangle$. Ясно, что $\alpha \geqslant 1$, значит, $a^{2^\alpha} \in Z(A)$. Предположим, что $|R \cap \langle a \rangle| > 1$. Так как элемент a переводит любой элемент из R в обратный, то $Z(A) \cap R$ совпадает с нижним слоем R и потому $|R \cap \langle a \rangle| = 2$ и $\langle a^2 \rangle = Z(A)$. Значит, $|R \cap \langle a \rangle| \leqslant 2$.

Так как G/R — недедекиндова группа, то ввиду следствия 1 она удовлетворяет условиям теоремы 1, подгруппы $\langle \bar{a} \rangle$ и $\bar{X}$ удовлетворяют тем же условиям в G/R, что и подгруппы $\langle a \rangle$ и X в G из теоремы 1 соответственно, где в принятых обозначениях $\langle \bar{a} \rangle = \langle Ra \rangle$, $\bar{X} = X/R$.

Так как $|\bar{a}| = 2^\alpha$, то ввиду теоремы 1 $\bar{G}' = \langle \bar{a}^{2^k} \rangle = \langle (Ra)^{2^k} \rangle = \langle Ra^{2^k} \rangle$, $\alpha > k \geqslant \alpha - k > 0$, $k > 1$. Из этого следует, что $G' = R\langle a^{2^k} \rangle$ и потому $A \lhd G$.

Если $|R \cap \langle a \rangle| \neq 1$, то $\langle a^2 \rangle = Z(A)$ и $\langle a^2 \rangle \lhd G$. Пусть $|R \cap \langle a \rangle| = 1$. Понятно, что $G = AX$ и для произвольного x из X $[a, x] = ya^{s2^k}$, где $y \in R$. Из этого с учетом $a^{-1}ya = y^{-1}$ легко получить, что $[a^2, x] = a^{s2^{k+1}}$. Отсюда $x^{-1}\langle a^2 \rangle x = \langle a^2 \rangle$ и, следовательно, $\langle a^2 \rangle \lhd G$.

Теперь, рассматривая коммутаторы вида $[a^{2^{\alpha-k+1}}, x], [a^{2^{k+1}}; x], [a^{2^{\alpha-1}}, x]$, и учитывая соотношения $k + 1 > 2$, $a - k + 1 > 1$, $\alpha - 1 > 1$, $a^2 \in Z(A)$, получаем $\langle a^{2^{\alpha-k+1}}, a^{2^{k+1}}, a^{2^{\alpha-1}} \rangle \leqslant Z(G)$. Следствие доказано.

Теорема 2. *Неметагамильтоновы черниковские $\overline{IH}$-p-группы исчерпываются группами следующих типов:*

1) *G — расширение квазициклической p-подгруппы R с помощью конечной дедекиндовой p-группы и G' содержит подгруппы порядка p^2;*

2) *$G = R \times B$, R — квазициклическая p-подгруппа, B — конечная метагамильтонова p-группа, B' содержит подгруппы порядка p^2;*

3) *$G = RB$, R — центральная в G квазициклическая p-подгруппа, B — такая конечная p-подгруппа из G, что $1 < B \cap R = B' \cap R \leqslant Z(G)$, $B/R \cap B$ — недедекиндова метагамильтонова группа и всякая неабелева подгруппа из B, содержащая $R \cap B$, инвариантна в G;*

4) *$G = (R \rtimes \langle a \rangle) \rtimes B$, R — инвариантная в G квазициклическая 2-подгруппа, $|a| = 2^\alpha$, $[R, a] = R$, $G' = R \times \langle a^{2^k} \rangle$, $\alpha > k \geqslant \alpha - k$, $k > 1$, $C_G(R) = R \times (\langle a^2 \rangle \rtimes B)$, B — конечная абелева 2-группа экспоненты 2^β, $k \geqslant \beta \geqslant \alpha - k$, $B = \langle b \rangle Z$, $|b| = 2^\beta$, $[\langle a \rangle, Z] \leqslant R$, экспонента Z не превышает $2^{2k-\alpha+1}$;*

5) *$G = (R\langle a \rangle) \rtimes B$, R — инвариантная в G квазициклическая 2-подгруппа, $|a| = 2^{\alpha+1}$, $[R, a] = R$, $G' = R\langle a^{2^k} \rangle$, $a^{2^\alpha} \in R$, $\alpha > k \geqslant \alpha - k$, $k > 1$, $C_G(R) =$*

$= R(\langle a^2\rangle \leftthreetimes B)$, *$B$ — конечная абелева 2-группа экспоненты* 2^β, $k \geqslant \beta \geqslant \alpha - k$, $B = \langle b\rangle Z$, $|b| = 2^\beta$, $[\langle a\rangle, Z] \leqslant R$, *экспонента Z не превышает* $2^{2k-\alpha}$;

6) $G = (R \leftthreetimes \langle a\rangle)Y$, *$R$ — инвариантная в G квазициклическая 2-подгруппа,* $[R, a] = R$, $|a| = 2^\alpha$, $\alpha > 2$, $G' = R \times \langle c\rangle$, $|c| = 2$, $Z(G) \geqslant \langle a^2\rangle$, $Y \cap (R \leftthreetimes \langle a\rangle) = \langle c\rangle = Y'$, $C_G(R) = (R \times \langle a^2\rangle)Y$, *$Y$ — почти прямое произведение подгрупп* $\langle c\rangle \times \langle b_i\rangle$ *с объединенной подгруппой* $\langle c\rangle$, $i \in I$, $1 < |I| \leqslant n$, $|b_i| = 2^{\beta_i}$, $\alpha > \beta_i > 0$;

7) $G = (R\langle a\rangle) \leftthreetimes B$, $R \lhd G$, *R разлагается в прямое произведение $p-1$ квазициклических p-групп,* $p > 2$, $R \cap \langle a\rangle = \langle a^{p^\alpha}\rangle$, $G' = R\langle a^{p^k}\rangle$, $C_G(R) = (R \cdot \langle a^{p^m}\rangle) \times B$, $\alpha > k \geqslant m \geqslant \alpha - k > 0$, $\langle a^{p^{m-1}}\rangle$ *индуцирует на R группу бесконечно неприводимых автоморфизмов порядка p, B — конечная абелева p-группа экспоненты* p^β, $k - m + 1 \geqslant \beta \geqslant \alpha - k$, $B = \langle b\rangle Z$, $|b| = p^\beta$, $[\langle a\rangle, Z] \leqslant R$;

8) $G = (R\langle a\rangle)B$, $R \lhd G$, *R — разлагается в прямое произведение $p-1$ квазициклических p-групп,* $p > 2$, $R \cap \langle a\rangle = \langle a^{p^\alpha}\rangle$, $G' = R$, $C_G(R) = (R\langle a^{p^m}\rangle)B = R \times B$, $\alpha \geqslant m > 0$, $\langle a^{p^{m-1}}\rangle$ *индуцирует на R группу бесконечно неприводимых автоморфизмов порядка p, B — конечная абелева p-группа.*

Доказательство. Необходимость. Пусть G — исследуемая группа. Тогда ввиду предложения А G — черниковская группа с полной частью R, разлагающаяся в прямое произведение l-квазициклических p-подгрупп, $l > 0$, $G = X\langle a\rangle$, $X = C_G(R)$, $X \cap \langle a\rangle = \langle a^{p^m}\rangle$, $m \geqslant 0$. Так как G — неметагамильтонова группа, то G' содержит подгруппу порядка p^2.

Пусть $m = 0$. В этом случае $Z(G) \geqslant R$ и G удовлетворяет условиям леммы 2 и потому G — группа одного из типов 1—3 теоремы.

Пусть $m > 0$. Тогда $Z(G) \not\geqslant R$, и значит, X — собственная подгруппа из G. Ввиду предложения А элемент $a^{p^{m-1}}$ индуцирует на R группу бесконечно неприводимых автоморфизмов порядка p и $l = p - 1$.

Рассмотрим следующие два возможных случая: 1) $p - 1 > 1$; 2) $p - 1 = 1$.

Случай 1. В этом случае ввиду предложения А $X' = 1$ и $p > 2$. Пусть G/R — дедекиндова группа. Так как $p > 2$, то G/R — абелева группа. Понятно, что $X = R \times B$, где B — конечная абелева группа, $G = (R\langle a\rangle)B$. Так как элемент $a^{p^{m-1}}$ индуцирует на R бесконечно неприводимый автоморфизм, то $G' = R$. Отсюда G — группа типа 8 теоремы.

Пусть G/R — недедекиндова группа. Тогда ввиду леммы 1 $\langle\bar a\rangle$ и $\bar X$ удовлетворяют тем же условиям в $\bar G = G/R$, что и $\langle a\rangle$ и X в G из теоремы 1, где $\overline{\langle a\rangle} = \langle Ra\rangle$, $\bar X = X/R$, $\bar X' = \bar 1$. Из теоремы 1 вытекает, что $\langle\bar a\rangle$ и $\bar X$ могут удовлетворять только условию 1 этой теоремы, поэтому $\bar G = \langle\bar a\rangle \leftthreetimes \bar B$, где $\bar B$ удовлетворяет тем же условиям в $\bar G$, что и подгруппа B в G из теоремы 1.

Пусть $A = R\langle a\rangle$, B^* — полный прообраз в G подгруппы $\bar B$. Тогда $G = AB^*$, $A \cap B^* = R$. Из условия 1 теоремы 1 $\bar B \leqslant \bar X$, поэтому $B^* \leqslant X$ и, значит, $B^* = R \times B$, где B — конечное абелево дополнение R к B^*. Ясно, что $G = A \leftthreetimes B$, где $\bar B$ совпадает с образом B в $\bar G$. Из условия 1 теоремы 1 $\bar X = \langle\bar a^{p^m}\rangle \times \bar B$, $\bar G' = \langle\bar a^{p^k}\rangle$, $|\bar a| = p^\alpha$, экспонента $\bar B$ равна p^β, $\alpha > k \geqslant m \geqslant \alpha - k$, $k - m + 1 \geqslant \beta \geqslant \alpha - k$, $\bar B = \langle\bar b\rangle\bar Z$, $|\bar b| = p^\beta$, $Z(\bar G) \geqslant \bar Z$.

Так как $\bar B$ — образ B в $\bar G$, то $B = \langle b\rangle Z$, где $\langle b\rangle$ и Z — такие подгруппы из B, образы которых в $\bar G$ совпадают с $\langle\bar b\rangle$ и $\bar Z$ соответственно. Поэтому $|b| = p^\beta$, экспонента B равна p^β. Так как $G = A \leftthreetimes B$ и $\bar Z \leqslant Z(\bar G)$, то $[A, Z] \leqslant R$. Понятно, что $G' = R\langle a^{p^k}\rangle$, $C_G(R) = X = (R\langle a^{p^m}\rangle) \times B$ и потому G — группа типа 6 теоремы.

Случай 2. В этом случае R — квазициклическая группа. Если G/R — дедекиндова группа, то G — группа типа 1 настоящей теоремы.

Пусть G/R — недедекиндова группа. Тогда G — 2-группа, удовлетворяющая условиям следствия 3 и потому $G = X\langle a\rangle$, где X и $\langle a\rangle$ удовлетворяют заключению этого следствия. Отсюда $\langle\bar a\rangle$, $\bar X$ в $\bar G$ удовлетворяют тем же условиям, что $\langle a \rangle$, X в G из теоремы 1. Рассмотрим следующие возможные случаи: 2.1) $\langle \bar{a} \rangle$ и $\bar{X}$ удовлетворяют условиям 1,2 теоремы 1; 2.2) $\langle \bar{a} \rangle$ и $\bar{X}$ удовлетворяют условию 3 теоремы 1.

Случай 2.1. В этом случае $\bar{G} = \langle \bar{a} \rangle \rightthreetimes \bar{B}$, где $\bar{B}$ удовлетворяет тем же условиям в $\bar{G}$, что и B в G из теоремы 1. Обозначим через B^* полный прообраз в G подгруппы $\bar{B}$. Тогда $G = AB^*$, $A = R \langle a \rangle$, $A \cap B^* = R$, $A \geqslant G'$, $R \not\geqslant G'$. Ясно, что B^* — бесконечная подгруппа из G. Если $(B^*)' \neq 1$, то $B^* \lhd G$ и $G/B^* \cong A/R$ — циклическая группа, $G' \leqslant A \cap B^*$, что невозможно. Следовательно, $(B^*)' = 1$.

Повторяя те же рассуждения, что в случае 1 при недедекиндовости G/R, получаем $B^* = R \times B$, $G = A \rightthreetimes B$, образ B и $\bar{G}$ совпадает с $\bar{B}$. Из условий 1,2 теоремы 1 имеем B — конечная абелева группа экспоненты p^β, $B = \langle b \rangle Z$, $|b| = p^\beta$, экспонента Z не превышает $p^{2k-\alpha+1}$. Так как $\bar{B} \leqslant Z(\bar{G})$, то $[A, Z] \leqslant R$. Если теперь $A = R \rightthreetimes \langle a \rangle$, то $C_G(R) = R \times (\langle a^2 \rangle \rightthreetimes B)$ и поэтому G — группа типа 4 теоремы.

Пусть $R \cap \langle a \rangle \neq 1$. Тогда $|R \cap \langle a \rangle| = 2$, $|a| = p^{\alpha+1}$. Ввиду следствия 3 $G' = R \langle a^{2^k} \rangle$, $C_G(R) = R(\langle a^2 \rangle \rightthreetimes B)$.

Покажем, что экспонента Z не превышает $2^{2k-\alpha}$. Предположим противное, т. е. пусть Z содержит элемент z порядка $2^{2k-\alpha+1}$. Очевидно, что $\langle z \rangle$ дополняется в $\langle z, b^{2^{\beta+\alpha-2k-1}} \rangle$ с помощью $\langle b_1 \rangle$, где $b_1 = b^{2^{\alpha+\beta-2k-1}} z^l$, $l \not\equiv 0 \pmod 2$. Понятно, что $b_1 \in B$. Пусть $a_1 = ba^{2^{k+1-\beta}}$. Из соотношений $[a, y] = ya^{2^k}$, $y \in R$, $k + 1 - \beta \geqslant 1$, на основании известных коммутаторных тождеств [19] легко получаем $[\langle a_1 \rangle, \langle b_1 \rangle] = \langle a^{2^\alpha} \rangle$, $\langle a \rangle \cap \langle a_1 \rangle = \langle a^{2^{k+1}} \rangle$. Отсюда в $\langle a^2 \rangle \rightthreetimes B$ существует неабелева подгруппа $\langle a_1 \rangle \rightthreetimes \langle b_1 \rangle$, $(\langle a_1 \rangle \rightthreetimes \langle b_1 \rangle) \cap G' = \langle a^{2^{k+1}} \rangle$ и, значит, G содержит неабелеву подгруппу $G_1 = R(\langle a_1 \rangle \rightthreetimes \langle b_1 \rangle)$, не содержащую G'. По условию $G_1 \lhd G$, G/G_1 — дедекиндова группа, $\langle a \rangle \cap G_1 = \langle a^{2^{k+1}} \rangle$. Следовательно, G/G_1 содержит элемент $G_1 a$ порядка 2^{k+1}. Так как $k + 1 > 2$, то в силу [19] подгруппа G/G_1 абелева, что неверно. Таким образом, экспонента Z не превышает $2^{2k-\alpha+1}$ и G — группа типа 5 теоремы. Случай 2.1 рассмотрен.

Случай 2.2. В этом случае $\bar{G} = G/R = \langle \bar{a} \rangle \bar{Y}$, $\langle \bar{a} \rangle \cap \bar{Y} = \langle \bar{c} \rangle = \bar{G}' = \bar{Y}'$, $|\bar{c}| = 2$, $\bar{Y}$ — почти прямое произведение подгрупп $\langle \bar{c} \rangle \times \langle \bar{b}_i \rangle$ с объединенной подгруппой $\langle \bar{c} \rangle$, $i \in I$, $1 < |I| \leqslant n$, $|b_i| = 2^{\beta_i}$, $\alpha > \beta_i > 0$, $\bar{X} = \langle \bar{a}^2 \rangle \bar{Y}$.

Понятно, что $\langle \bar{c} \rangle = G'/R$, $G' = R \langle a^{2^{\alpha-1}} \rangle = R \langle c \rangle$, где $\langle c \rangle$ — некоторый прообраз элемента $\bar{c}$ в G. Обозначим через Y^* полный прообраз в G подгруппы $\bar{Y}$. Так как $\bar{Y} \leqslant \bar{X}$, то $Y^* \leqslant X$, а значит, $R \leqslant Z(Y^*)$. По следствию 3 $a^{2^{\alpha-1}} \in Z(G)$, поэтому $G = AB^*$, $A \cap B^* = G' \leqslant Z(B^*)$, $A = R \langle a \rangle$. Обозначим через Y_i полный прообраз в Y^* подгруппы $\langle \bar{c} \rangle \times \langle \bar{b}_i \rangle$. Тогда $Y_i = G' \langle b_i \rangle$, где образ $\langle b_i \rangle$ в $\bar{G}$ совпадает с $\langle \bar{b}_i \rangle$, $G' \cap \langle b_i \rangle = R \cap \langle b_i \rangle$, $G' \leqslant Z(Y_i)$. Отсюда, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что абелева группа Y_i представима в виде $G' \times \langle b_i \rangle$, где $|b_i| = 2^{\beta_i}$. По определению 1 Y^* — почти прямое произведение подгрупп $Y_i = G' \times \langle b_i \rangle$ с объединенной подгруппой G'.

Предположим, что существуют две циклические подгруппы $\langle b_i \rangle$ и $\langle b_j \rangle$, в которых найдутся такие элементы $b_1 \in \langle b_i \rangle$, $b_2 \in \langle b_j \rangle$, что $|[b_1, b_2]| \neq 1$ и $[b_1, b_2] \in R$. Тогда в G существует неабелева подгруппа $G_1 = (R \times \langle b_1 \rangle) \rightthreetimes \langle b_2 \rangle$, не содержащая G'. По условию $G_1 \lhd G$, G/G_1 — гамильтонова группа, $G_1 \cap \langle a \rangle = \langle a^{2^\alpha} \rangle$, $\alpha > 2$. Отсюда $|G_1 a| > 4$, что невозможно [19]. Таким образом, $[b_1, b_2] \notin R$. Не нарушая общности, можно считать, что $[b_i, b_j] = c$. Так как $c^2 \in R$, $G' \leqslant Z(Y^*)$, то $[b_i^2, b_j] = c^2 \in R$, поэтому $c^2 = 1$, $G' = R \times \langle c \rangle$.

Пусть N — нижний слой из G'. Тогда $N = \langle y \rangle \times \langle c \rangle$, где $y \in R$, $|y| = 2$. Ясно, что $N \leqslant Z(Y^*)$, $N \leqslant Z(A)$. Отсюда $N \leqslant Z(G)$.

Покажем, что $A = R \rightthreetimes \langle a \rangle$. Действительно, в противном случае $c = a^{s2^{\alpha-1}} c_1$, $c_1 \in R$. Так как $c \in Z(G)$, $a^{2^{\alpha-1}} \in Z(G)$, то $c_1 \in Z(G)$. Но тогда $c_1 \in$

$\in \langle y \rangle$, а значит, $|c_1| \leqslant 2$. Отсюда $|a^{s2^{\alpha-1}}| \leqslant 2$ и поэтому $s \equiv 0 \pmod 2$, $a^{s2^{\alpha-1}} \in R$. Из этого получим $c \in R$, что неверно. Следовательно, $A = R \leftthreetimes \langle a \rangle$.

Выше установлено, что $(Y^*)' \leqslant N$. Покажем теперь, что $(Y^*)' = \langle c \rangle$. Пусть $D_i = N \times \langle b_i \rangle$. Тогда в Y^* существует конечная подгруппа D, являющаяся почти прямым произведением подгрупп D_i с объединенной подгруппой N. Понятно, что $G = AD$, $A \cap D = N$. Нетрудно показать, что из условий $\alpha > \beta_i > 0$, $D' \leqslant N \leqslant Z(D)$, N — элементарная абелева группа, $\alpha > 2$, вытекает, что экспонента D не превышает $2^{\alpha-1}$. Предположим, что $D' > \langle c \rangle$. Тогда в силу [20] в D найдутся такие элементы g_1 и g_2, что $[g_1, g_2] = y$. Положим $G_2 = (R \times \langle a^2 \rangle) \langle g_1, g_2 \rangle$. Так как $\langle a^2 \rangle \lhd G$, $a^2 \in X$, $G' = R \times \langle c \rangle$, то легко заметить, что $a^2 \in Z(G)$. Из этого следует $G_2^! = \langle y \rangle$. Положим далее $A_1 = R \times \langle a^2 \rangle$. Понятно, что G_2/R — абелева группа, A_1/R — ее циклическая подгруппа порядка $2^{\alpha-1}$. Очевидно, что $G_2 / R = \langle Ra^2, Rg_1, Rg_2 \rangle$. Поскольку экспонента D не превышает $2^{\alpha-1}$, то A_1/R сервантна в G_2/R. В силу известных результатов [21] $G_2/R = A_1/R \times G_3/R$. Отсюда $G_2 = A_1G_3$, $A_1 \cap G_3 = R$, $A \leqslant Z(G_2)$, $G_2' = G_3' = \langle y \rangle$ и $G_2 = \langle a^2 \rangle \times G_3$. Так как теперь гамильтонова группа G/G_3 содержит элемент $|G_3a| > 4$, то получаем противоречие с [19]. Полученное противоречие показывает, что $D' = \langle c \rangle$.

Пусть Y — почти прямое произведение $\langle c \rangle \times \langle b_i \rangle$ с объединенной подгруппой $\langle c \rangle$. Тогда $G = AY$, $A \cap Y = \langle c \rangle$, а G — группа типа 6 теоремы. Необходимость доказана.

Достаточность легко проверить непосредственно. Теорема доказана.

1. *Ромалис Г. М.* О метагамильтоновых группах // Успехи мат. наук.— 1962.— **17**, № 6.
2. *Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф.* О метагамильтоновых группах. I / Мат. зап. Урал. ун-та.— 1966.— **5**, № 3.— С. 45—49.
3. *Сесекин Н. Ф., Ромалис Г. М.* О метагамильтоновых группах. II // Там же.— 1968.— **6**, № 5.— С. 50—53.
4. *Ромалис Г. М., Сесекин Н. Ф.* О метагамильтоновых группах. III //Там же.—1970.— **7**, № 3.— С. 195—199.
5. *Черников С. Н.* Бесконечные неабелевы группы, у которых инвариантны все бесконечные неабелевы подгруппы // Укр. мат. журн.— 1971.— **23**, № 5.— С. 604—628.
6. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 384 с.
7. *Нагребецкий В. Т.* Конечные ненильпотентные группы, любая неабелева подгруппа которых инвариантна // Мат. зап. Урал. ун-та.— 1967.— **6**, № 1.— С. 80—88.
8. *Махнев А. А.* О конечных метагамильтоновых группах // Там же.— 1976.— **10**, № 1.
9. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* Строение разрешимых ненильпотентных метагамильтоновых групп // Мат. заметки.— 1983.— **34**, № 2.— С. 179—188.
10. *Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф.* Строение метациклических метагамильтоновых групп (методические рекомендации).— Киев : Киев. пед. ин-т, 1983.— 22 с.
11. *Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф.* О строении бесконечных нильпотентных периодических метагамильтоновых групп // Строение групп и их подгрупповая характеризация.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1984.— С. 101—111.
12. *Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф.* Строение нильпотентных непериодических метагамильтоновых групп.— Киев, 1984.— 25 с.— Деп. в ВИНИТИ, № 3208-84.
13. *Семко Н. Н., Кузенный Н. Ф.* Строение конечных метабелевых метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом.— Киев, 1984.— 16 с.— Деп. в ВИНИТИ. № 6016-84.
14. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* Строение разрешимых метагамильтоновых групп // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1985.— № 2.— С. 6—9.
15. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* О строении непериодических метагамильтоновых групп // Изв. вузов. Математика.— 1986.— № 11. — С. 32—40.
16. *Кузенный Н. Ф., Семко Н. Н.* Строение периодических метабелевых метагамильтоновых групп с неэлементарным коммутантом // Укр. мат. журн.— 1987.— **39**, № 2.— С. 180—185.
17. *Кузенный Н. Ф., Субботин И. Я.* О почти квазициклических группах.— Киев, 1986.— 30 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 1742-Ук86.
18. *Кузенный Н. Ф., Субботин И. Я.* О полуабелевых группах.— Киев, 1987.— 34 с.— Деп. УкрНИИНТИ, 670-Ук87.
19. *Холл М.* Теория групп.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.— 468 с.
20. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.— М. : Наука, 1969.— 631 с.
21. *Курош А. Г.* Теория групп.— М. : Наука, 1967.— 468 с.

Киев. пед. ин-т

Получено 20.11.87