УДК 512.54

Н. Ф. Кузенный, И. Я. Субботин

Новые характеризации локально нильпотентных $\overline{IH}$-групп

Бесконечные неабелевы группы, в которых инвариантны все бесконечные неабелевы подгруппы ($\overline{IH}$-группы), введены в теорию групп С. Н. Черниковым [1]. Полученные при изучении $\overline{IH}$-групп С. Н. Черниковым результаты в значительной степени проясняют строение и свойства таких групп. Эти результаты изложены в гл. 6 работы [2]. В настоящей работе предложены новые характеризации локально нильпотентных $\overline{IH}$-групп (теорема 3 и следствие 2). Для этой цели использованы условие транзитивности нормальности и условие пронормальности для бесконечных неабелевых подгрупп.

Следуя Робинсону [3] будем говорить, что группа G удовлетворяет условию транзитивности для (неабелевых, бесконечных, бесконечных неабелевых) нормальных делителей, если всякая (неабелева, бесконечная, бесконечная неабелева) субнормальная подгруппа группы G инвариантна в G. Группы с условием транзитивности для нормальных делителей изучались в работе [3], а бесконечные группы с условием транзитивности для бесконечных неабелевых нормальных делителей — в работе [4]. Оказывается, что условие транзитивности для нормальных делителей тесно связано с условием пронормальности в группе различных систем ее подгрупп [5]. Напомним, что по определению подгруппа H группы G пронормальна в ней, если для любого элемента $g \in G$ подгруппы H и H^g сопряжены в порождаемой ими подгруппе $\langle H, H^g\rangle$ (см., например, [6], § 17).

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 1 ([6], § 17).

1) *Пронормальная субнормальная подгруппа группы G инвариантна в G.*

2) *Любая подгруппа группы G, содержащая нормализатор $N_G(H)$ некоторой пронормальной подгруппы H группы G, совпадает со своим нормализатором в группе G.*

3) *Если N нормальный делитель группы G, содержащий некоторую пронормальную в G подгруппу H, то $G = NN_G(H)$.*

Перейдем к изложению результатов настоящей работы. В ней приняты те же обозначения, что и в [6].

Лемма 1. *Третий коммутант разрешимой группы G, удовлетворяющей условию транзитивности для неабелевых нормальных делителей, абелев.*

Доказательство. Действительно, пусть третий коммутант G''' группы G неабелев. Тогда G/G''' — разрешимая группа с неединичным вторым коммутантом G''/G'''. Очевидно группа G/G'' удовлетворяет условию транзитивности для нормальных делителей. Однако в силу теоремы 2.3.1 из [3] коммутант разрешимой группы с условием транзитивности для нормальных делителей абелев. Противоречие.

Лемма 2. *Третий коммутант бесконечной разрешимой группы G, удовлетворяющей условию транзитивности для бесконечных неабелевых нормальных делителей, абелев.*

Доказательство. Пусть третий коммутант G''' группы G неабелев. Обозначим через C централизатор $C_G(G''')$ в G подгруппы G'''. Рассмотрим группы $D = G'''C$ и $K = G''C$. Если $D = K$, то $K'C = (K''C)'C = (G'''C' [G'', C]) C = G''C = K$. Из леммы 5 работы [7] вытекает, что коммутант K' разрешимой группы K не может быть добавляем в ней никаким ее собственным нормальным делителем. Поэтому $C \geqslant K' \geqslant G'''$ и G''' — абелева группа. Полученное противоречие показывает, что D строго содержится в K. Заметим, что подгруппа D, очевидно, бесконечна. Ввиду неабелевости G''' группа D неабелева. Тогда коммутант факторгруппы G/D в силу теоремы 2.3.1 из [3] абелев. Следовательно, $G''D/D = G''C/D = 1$, т. е. $K = G''C = D$. Но мы доказали, что $K \neq D$. Противоречие.

П р и м е ч а н и е. В работе [3] доказана абелевость коммутанта разрешимой группы с условием транзитивности для нормальных делителей, а в работе [4] — абелевость второго коммутанта бесконечной разрешимой группы с условием транзитивности для бесконечных нормальных делителей. Пример группы GL (2, 3) показывает, что существуют группы с условием транзитивности для неабелевых нормальных делителей, обладающие неабелевым вторым и абелевым третьим коммутантами. Прямое произведение квазициклической 2-группы и группы GL (2, 3) дает нам пример разрешимой группы с условием транзитивности для бесконечных неабелевых нормальных делителей, второй коммутант которой неабелев.

Л е м м а 3. *Бесконечная неабелева локально разрешимая группа G обладает локальной системой (в смысле работы* [8]) *бесконечных разрешимых неабелевых подгрупп.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть x и y — не перестановочные элементы группы G и M — произвольное конечное множество элементов из G. Если G — непериодическая группа и c — ее некоторый элемент бесконечного порядка, то искомую локальную систему составят подгруппы вида $\langle M, x, y, c\rangle$. Если же G — периодическая группа, то в силу ее локальной конечности подгруппы $\langle M, x, y\rangle$ конечны. В силу предложения из работы [9] каждая такая подгруппа содержится в некоторой бесконечной разрешимой группе, являющейся подгруппой группы G. Такие подгруппы и составляют искомую локальную систему. Лемма доказана.

Т е о р е м а 1.

1. *Третий коммутант* (*бесконечной*) *разрешимой группы G с условием транзитивности для* (*бесконечных*) *неабелевых нормальных делителей абелев.*

2). *Третий коммутант* (*бесконечной*) *локально разрешимой группы G, все подгруппы которой удовлетворяют условию транзитивности для* (*бесконечных*) *неабелевых нормальных делителей, абелев.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ввиду лемм 1 и 2 достаточно доказать разрешимость локально разрешимой группы G, удовлетворяющей условию транзитивности для (бесконечных) неабелевых нормальных делителей. В силу леммы 3 всякая конечнопорожденная неабелева подгруппа H группы G содержится в некоторой разрешимой бесконечной неабелевой подгруппе группы G. Ввиду лемм 1 и 2 третий коммутант подгруппы такого вида абелев. Следовательно, абелевым будет и третий коммутант подгруппы H. Отсюда непосредственно следует разрешимость группы G. Теорема доказана.

Напомним, что метагамильтоновой называется неабелева группа, у которой все неабелевы подгруппы инвариантны (см., например, [2, с. 237]).

Т е о р е м а 2. *Локально нильпотентные неабелевы группы, все подгруппы которых удовлетворяют условию транзитивности для неабелевых нормальных делителей, исчерпываются нильпотентными метагамильтоновыми группами.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, достаточно показать, что произвольная локально нильпотентная неабелева группа G, удовлетворяющая условию транзитивности для неабелевых нормальных делителей, является метагамильтоновой группой. В силу теоремы 1 группа G разрешима. Если при этом она метагамильтонова, то ввиду теоремы 6.4 из [2] ее коммутант конечен. Следовательно, она будет нильпотентной группой.

Пусть H — произвольная неабелева подгруппа группы G. Если H конечно порождена, то подгруппа $K=\langle H, g\rangle$, где g — произвольный элемент группы G, также конечно порождена, а потому и нильпотентна. Следовательно, H субнормальна в G. Ввиду условия транзитивности для неабелевых нормальных делителей подгруппа H инвариантна в K, а потому и в G. Если подгруппа H не является конечнопорожденной группой, то она порождается своими неабелевыми конечнопорожденными подгруппами, которые в виду рассмотренного выше случая инвариантны в группе G. Следовательно, и в этом случае подгруппа H в группе G инвариантна. Поэтому группа G метагамильтонова. Теорема доказана.

П р и м е ч а н и е. Как следует из теоремы 3 работы [10], произвольная нильпотентная метагамильтонова группа обладает конечным примарным абелевым коммутантом. Отсюда в силу теоремы 2 вытекает, что коммутант произвольной локально нильпотентной неабелевой группы, все подгруппы которой удовлетворяют условию транзитивности для неабелевых нормальных делителей, является конечной примарной абелевой группой.

Следствие 1. *Для локально нильпотентной группы G следующие условия эквивалентны:*

1) *все подгруппы группы G удовлетворяют условию транзитивности для неабелевых нормальных делителей;*

2) *в группе G все неабелевы подгруппы пронормальны;*

3) *в группе G все неабелевы подгруппы инвариантны.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1 и 3 доказана в теореме 2. Из предложения 1 непосредственно следует, что если в группе G пронормальна всякая ее неабелева подгруппа, то G удовлетворяет условию транзитивности для неабелевых нормальных делителей. Отсюда легко следует, что из условия 2 вытекает условие 1. Из условия 3 очевидно следует условие 2. Поскольку из условия 1 вытекает условие 3, следствие доказано.

Примечание. Эквивалентность второго и третьего условий следствия 1 вытекает также и из следующей леммы, представляющей, по нашему мнению, самостоятельный интерес.

Лемма 4 (Н. С. Черников). *В произвольной локально нильпотентной группе всякая слабо пронормальная подгруппа ивариантна.*

Напомним, что подгруппа H слабо пронормальна в группе G, если из $H \leqslant K \trianglelefteq L \leqslant G$ следует соотношение $L = N_G(H)K$ для любых подгрупп K и L (см., например, [11]). Как следует из предложения 1, любая пронормальная подгруппа группы G слабо пронормальна в G.

Доказательство. Пусть G — локально нильпотентная группа и H — ее слабо пронормальная подгруппа. Пусть $N_G(H) \neq G$ и g любой элемент из $G \setminus N_G(H)$. Выберем в локально нильпотентной подгруппе $L = \langle N_G(H),\ g\rangle$ максимальную подгруппу M, содержащую $N_G(H)$ и не содержащую элемент g. В силу теоремы Маклейна (см., например, [12]) максимальная подгруппа M (а подгруппа M, очевидно, максимальна в L) локально нильпотентной группы L в L инвариантна. Поскольку H слабо пронормальна в G, то $L = MN_L(H)$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 5. *Пусть G — бесконечная периодическая локально разрешимая группа, все подгруппы которой удовлетворяют условию транзитивности для бесконечных неабелевых нормальных делителей. Если при этом в группе G найдется подгруппа, не удовлетворяющая условию транзитивности для неабелевых нормальных делителей, то группа G черниковская.*

Доказательство. Предположим, что группа G нечерниковская. По условию в группе G найдется конечная неабелева подгруппа X, субнормальная в подгруппе Y, но не инвариантная в ней. Пусть g — произвольный элемент из G. Положим $F = \langle X,\ g\rangle$. В силу локальной конечности группы G F— конечная подгруппа группы G. Ввиду нечерниковости группы G из теоремы 1 работы [9] вытекает существование в G нечерниковой абелевой подгруппы A, инвариантной относительно F и тривиально с F пересекающейся. Очевидно, $A \rtimes X$ — бесконечная неабелева субнормальная в $A \rtimes F$ подгруппа. Так как в группе G все подгруппы удовлетворяют условию транзитивности для бесконечных неабелевых нормальных делителей, то подгруппа $A \rtimes X$ инвариантна в группе $A \rtimes F$. Следовательно, $A \rtimes X \cap F = X \trianglelefteq F$. Ввиду произвольности выбора элемента g из Y подгруппа X инвариантна в группе Y. Последнее противоречит нашему предположению. Лемма доказана.

Лемма 6. *Бесконечная локально нильпотентная неметагамильтонова группа G, все подгруппы которой удовлетворяют условию транзитивности для бесконечных неабелевых нормальных делителей, является черниковской группой.*

Доказательство. Пусть G — нечерниковская группа и H — ее произвольная конечная неабелева подгруппа. Рассмотрим два случая: 1) группа G не периодическая; 2) группа G периодическая.

В первом случае покажем сперва, что всякая конечнопорожденная бесконечная неабелева подгруппа X из G инвариантна в G. Пусть g—произвольный элемент группы G. Тогда $Y = \langle X, g\rangle$ — конечнопорожденная нильпотентная подгруппа, в которой подгруппа X субнормальна. Ввиду условия транзитивности для бесконечных неабелевых нормальных делителей подгруппа X инвариантна в Y, а потому и в самой группе G. Пусть теперь x — произвольный элемент бесконечного порядка из G. Подгруппа $Z = \langle H, x\rangle$ — нильпотентная конечнопорожденная подгруппа группы G. В силу теоремы 16.2.7 из [12] группа Z обладает конечной периодической частью R, очевидно, содержащей подгруппу H. Поскольку R — конечная инвариантная в Z подгруппа, то в подгруппе $\langle x\rangle$ найдется элемент x_1 бесконечного порядка, перестановочный со всяким элементом из H. Положим $T = H \times \langle x_1\rangle$. В силу доказанного выше T инвариантна в G. Поскольку H — периодическая часть инвариантной в G подгруппы T, то H инвариантна в G. Ввиду теоремы 2 в первом случае G — метагамильтонова группа, что невозможно.

Справедливость леммы во втором случае непосредственно вытекает из леммы 5. Лемма доказана.

Теорема 3. *Бесконечные неабелевы локально нильпотентные группы, все подгруппы которых удовлетворяют условию транзитивности для бесконечных неабелевых нормальных делителей, исчерпываются бесконечными локально нильпотентными $\overline{IH}$-группами.*

Доказательство. Покажем, что произвольная бесконечная неабелева локально нильпотентная группа G, все подгруппы которой удовлетворяют условию транзитивности для бесконечных неабелевых нормальных делителей является $\overline{IH}$-группой. Предположим, что группа G не является метагамильтоновой группой. В силу леммы 6 в этом случае G — черниковская группа. Нам достаточно показать, что в группе G всякая бесконечная неабелева подгруппа H отлична от своего нормализатора $N_G(H)$. Предположим противное. Пусть $H = N_G(H)$ и g_1 — произвольный элемент из $G \setminus H$. Рассмотрим локально нильпотентную подгруппу $M_1 = \langle H, g_1\rangle$. Обозначим через N_1 максимальную подгруппу группы M_1, содержащую H и не содержащую g_1. Ясно, что N_1 максимальна в M_1. В силу теоремы Маклейна (см., например, [12]), подгруппа N_1 инвариантна в M_1. Поскольку $H = N_G(H)$, то $H \neq N_1$, и потому в подгруппе N_1 найдется элемент g_2, не принадлежащий H. Ясно, что $M_2 = \langle H, g_2\rangle$ — локально нильпотентная черниковская группа и $H \neq M_2 \neq M_1$. Аналогично предыдущему в группе M_2 выделим максимальную инвариантную собственную подгруппу N_2, содержащую H. Понятно, что $N_2 \neq H$. Рассмотрим элемент $g_3 \in N_2 \setminus H$, подгруппу $M_3 = \langle H, g_3\rangle$ и т. д. Указанный процесс приводит к ряду различных подгрупп $M_1 > M_2 > M_3 > \ldots$, строго содержащих подгруппу H. Этот ряд не может оборваться на конечном номере, что приводит к противоречию с черниковостью подгруппы M_1. Полученное противоречие доказывает теорему.

Рассуждениями, полностью аналогичными тем, которыми доказано следствие 1, доказывается следующее утверждение.

Следствие 2. *Для бесконечной неабелевой локально нильпотентной группы G следующие условия эквивалентны:*

1) G — $\overline{IH}$-*группа;*

2) G — *бесконечная группа, в которой пронормальны все бесконечные неабелевы подгруппы;*

3) *все подгруппы группы G удовлетворяют условию транзитивности для бесконечных неабелевых нормальных делителей.*

Примечание. Из описания коммутанта нильпотентных метагамильтоновых и локально нильпотентных $\overline{IH}$-групп [2] (гл. 6) следует, что коммутантом G' группы G, удовлетворяющей условиям теорем 2 или 3, является группа вида $G' = P \times Q$, где P — черниковская силовская p-подгруппа G', Q — конечная q-группа, p и q — простые числа.

1. *Черников С. Н.* Бесконечные неабелевы группы с условием инвариантности для бесконечных неабелевых подгрупп // Докл. АН СССР.— 1970.— **194**, № 6.— С. 1280—1283.
2. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп.— М. : Наука, 1980.— 383 с.
3. *Robinson D. J. S.* Groups in which normality isa transitive relation // Proc. Cambridge Phil. Soc.— 1964.— **60**, N 21.— P. 21—38.
4. *De Giovanni F.*, *Franciosi S.* Groups in which every infinite subnormal subgroups is normal // J. Algebra.— 1985.— **96**, N 2.— P. 566—580.
5. *Кузенный Н. Ф.*, *Субботин И. Я.* Пронормальность и транзитивность нормальности.— Киев, 1986.— 13 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 26-Ук 86.
6. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп.— М. : Наука, 1978.— 272 с.
7. *Субботин И. Я.*, *Кузенный Н. Ф.* Конечные группы с инвариаторным условием для подгрупп, содержащих коммутант группы.—Киев, 1987.— 13 с.— Деп. в УкрНИИНТИ, № 668.-Ук 87.
8. *Robinson D. J. S.* Finitenes conditions and generalized sulyble groups. Pt. 2.— New York : Springer, 1972.— 254 p.
9. *Зайцев Д. И.* О разрешимых подгруппах локально разрешимых групп // Докл. АН СССР.— 1974.— **214**,— № 6.— С. 1250—1253.
10. *Кузенный Н. Ф.*, *Семко Н. Н.* Строение разрешимых ненильпотентных метагамильтоновых групп // Мат. заметки.— 1983.— **34**, № 3.— С. 179—188.
11. *Ба М. С.* О пронормальности и абнормальности в разрешимых группах // X Всесоюз. симп. по теории групп : Тез. сообщ.— Минск : Ин-т математики АН БССР, 1986. — С. 11.
12. *Каргаполов М. И.*, *Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп.— М. : Наука, 1982. — 288 с.

Киев. политехн. ин-т

Получено 22.06.87