УДК 519.41/47

О. Д. Артемович

Об изолированных элементах простого порядка в конечных группах

Пусть G — конечная группа, p — простое число, делящее ее порядок, P — силовская p-подгруппа группы G, x — элемент порядка p из P. Говорят, что элемент x изолирован (соответственно подгруппа $\langle x \rangle$ изолирована) в P относительно G, если x не сопряжен (соответственно $\langle x \rangle$ не сопряжена) в G ни с одним элементом из $P - \{x\}$ (соответственно ни с одной подгруппой из $P - \langle x \rangle$). Глауберман [1] доказал Z^*-теорему о том, что при $p = 2$ изолированная инволюция группы G, каждая неединичная нормальная подгруппа которой имеет четный порядок, всегда содержится в ее центре $Z(G)$. Он же поставил вопрос: справедлив ли аналог Z^*-теоремы для нечетных простых чисел p (см. [1, 2], вопрос 4.21)?

В данной статье доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — конечная K-группа (т. е. группа, композиционные факторы которой находятся среди известных простых групп), причем порядок каждой ее неединичной нормальной подгруппы делится на p. Если x — изолированный элемент простого порядка p ($p > 2$), то $x \in Z(G)$.*

Она подтверждает предположение, высказанное в [3, 4], и, таким образом, дает (с привлечением классификации конечных простых групп) положительный ответ на указанный выше вопрос. Эта теорема анонсирована автором в [5].

Используемая в работе терминология стандартна [6—9]; в частности $F(G)$ — максимальная нильпотентная нормальная подгруппа (подгруппа Фиттинга) группы G, а $F^*(G) = F(G)E(G)$, где $E(G)$ — наибольшая полупростая нормальная подгруппа группы G. Кроме того, напомним, что $[E(G), F(G)] = 1$ и $G_G(F^*(G)) \leqslant F^*(G)$ [7]. Отметим также, что описание простых групп типа Ли (и, в частности, групп Шевалле) можно найти в работе [8], а в работе [9] дан обзор свойств простых спорадических групп.

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть G — конечная группа, порядок каждой неединичной нормальной подгруппы которой делится на простое число p. Если элемент x, изолированный в силовской p-подгруппе P относительно G, содержится в каком-либо разрешимом нормальном делителе N из G, то $x \in Z(G)$.*

Доказательство. Ясно, что подгруппа Фиттинга $F(N)$ — неединичная нормальная подгруппа G. Поэтому, принимая во внимание, что $[\langle x\rangle, F(N)] \leqslant [\langle x\rangle, P] = 1$, получаем $x \in Z(F(N))$. Характеристическая подгруппа $Z(F(N))$ нормального делителя $F(N)$ нормальна в G. Отсюда, учитывая, что в группе G порядок каждой неединичной нормальной подгруппы делится на p и $Z(F(N))$ — неединичная нормальная абелева (а значит, примарная по p) подгруппа группы G, для любого $g \in G$ получаем $g^{-1}xg \in Z(F(N))$. И поскольку $Z(F(N)) \leqslant P$, то вследствие изолированности элемента x $x = g^{-1}xg$, т. е. $x \in Z(G)$. Лемма доказана.

Напомним [6, с. 42], что группа G, порядок каждой неединичной нормальной подгруппы которой делится на простое число p, называется p-скованной, если централизатор $C_G(K)$ ее максимальной нормальной p-подгруппы K содержится в K.

Следствие. *Если группа G, порядок каждой неединичной нормальной подгруппы которой делится на p, p-скованная (и, в частности, разрешимая), то изолированный элемент x порядка p содержится в центре $Z(G)$.*

Доказательство. По определению, группа G содержит неединичную нормальную p-подгруппу. Через K обозначим максимальную нормальную p-подгруппу группы G. Пусть P — силовская p-подгруппа из G, содержащая изолированный элемент x. Так как расширение p-подгруппы K посредством p-подгруппы P является p-подгруппой, то $PK = K$ и тогда вследствие изолированности элемента x

$$[x, K] \leqslant [x, KP] = [x, P] = 1.$$

Отсюда получаем $x \in C_G(K)$. Далее, ввиду p-скованности группы G $C_G(K) \leqslant K$ и, следовательно, $x \in K$. Но K — разрешимый нормальный делитель в G и тогда по лемме 1 $x \in Z(G)$. Следствие доказано.

Лемма 2. *Простая конечная K-группа G не содержит изолированных элементов простого порядка.*

Доказательство. Пусть p — простой делитель порядка группы G. Предположим, что G содержит в своей силовской p-подгруппе P изолированный элемент x порядка p. В силу Z^*-теоремы [1] $p > 2$.

Если подгруппа P циклическая и $J(P)$ — ее подгруппа Томпсона, т. е. подгруппа, порожденная всеми абелевыми подгруппами максимального порядка из P (см., например, [6, с. 239]), то, очевидно, $J(P) = P$ и $Z(J(P)) = P$. Кроме этого, $N_G(P) = P \rtimes S$, где S — некоторое дополнение. Так как S действует тривиально на нижнем слое $\Omega_1(P)$ подгруппы P, то вследствие теоремы Блэкберна [7, с. 20] $S = 1$, а значит, $N_G(Z(J(P))$ обладает нормальным p-дополнением. Поэтому в силу критерия Глаубермана [6] (теорема 4.114) группа G также имеет нормальное p-дополнение вопреки своей простоте. Следовательно, подгруппа P не является циклической.

Далее, поскольку $\langle x \rangle$ — изолированная в простой группе G подгруппа порядка p, то по теореме 4.251 [6] G — группа одного из типов:

1) $G \cong U_3(p)$ — простая группа (типа Ли) нечетного унитарного типа;

2) $p = 5$ и $G \cong Mc$ — простая спорадическая группа Мак-Лафлина порядка $2^7 \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7 \cdot 11$;

3) $p = 3$ и $G \cong J_2$ — простая спорадическая группа Холла—Янко порядка $2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$;

4) $p = 3$ и $G \cong G_2(q)$ — простая группа Шевалле, причем $q \neq 3^n$, $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $G \cong U_3(p)$. Тогда G содержит подгруппу Бореля B индекса $p^3 + 1$ [6, с. 168], причем $B = P \rtimes H$, где P — силовская p-подгруппа порядка p^3 группы G, а H — циклическая подгруппа. Кроме этого, ее группа Вейля $W = W(G)$, где $W(G) = N_G(H)/H$, имеет порядок 2 [6, с. 85]. Но, с другой стороны, изолированный элемент порядка p нормализует подгруппу Картана H и потому $|W| \geqslant p$. Это означает, что $U_3(p)$ не содержит изолированных элементов порядка p.

Пусть $G \cong J_2$. Тогда G содержит подгруппу M, изоморфную $U_3(3)$ (см. [6, с. 115] или [9, с. 185]). Если Q — силовская 3-подгруппа в $U_3(3)$, то ее порядок равен 27 и потому она также силовская подгруппа всей группы G. По теореме Силова $Q = P^z$ для некоторого элемента $z \in G$ и, следовательно, x^z — изолированный элемент порядка 3 в Q относительно $U_3(3)$. Но как показано выше, $U_3(3)$ не содержит изолированных элементов порядка 3 и, таким образом, группа Холла—Янко J_2 также не может содержать изолированных элементов простого порядка.

Пусть теперь $p = 5$ и $G \cong Mc$. Тогда G содержит подгруппу X, изоморфную $U_3(5)$ [9, с. 191]. Поскольку группа $U_3(5)$ не содержит изолированных элементов порядка 5, то с тех же соображений, что и выше, группа Мак-Лафлина Mc также не содержит изолированных элементов простого порядка.

Далее, известно [8], что каждую конечную группу Шевалле можно реализовать как группу неподвижных точек A_σ некоторого эндоморфизма σ связной (в действительности полупростой) линейной алгебраической группы A на себя. В самом деле, если A — полупростая группа, определенная над конечным полем $GF(q)$ из q элементов, то отображение Фробениуса $c \mapsto c^q$ поля $GF(q)$ продолжается до эндоморфизма σ группы A на себя. Тогда A_σ — конечная группа [8]. Рассмотрим случай, когда $A_\sigma \cong G_2(q)$, $q \neq 3^n$ (подробнее см. [8]). Обозначим $G = A_\sigma$. Пусть S_3 — силовская 3-подгруппа группы G; она нециклическая [8, с. 209]. По теореме Силова $S_3 = P^t$, где t — некоторый элемент из G. Ввиду следствия 5.19 [8, с. 208] S_3 нормализует максимальный тор T, инвариантный относительно эндоморфизма σ группы A. Через K_σ всегда будем обозначать подмножество неподвижных точек множества K группы A относительно эндоморфизма σ. Пусть w — произвольный элемент подгруппы Вейля W группы A [8]. Тогда $W_\sigma \cong N_G(T)/T_\sigma$ [8, с. 184], $W_\sigma = C_W(w)$ [8, с. 185] и, как показал Картер [8, с. 301], $|C_W(w)| = 6$. Учитывая это, а также то, что S_3 — силовская 3-подгруппа разрешимой подгруппы $N_G(T)$ [8] и x^z изолирован в S_3 относительно $N_G(T)$, ввиду следствия получаем $x \in Z(N_G(T))$. Отсюда следует, что $x^z \in C_G(i)$ для некоторой инволюции $i \in N_G(T)$. Как отметил Ивахори [8, с. 277], группа $G_2(q)$ содержит только один класс инволюций, а подгруппа $C_G(i)$ изоморфна центральному произведению $SL(2, q) * SL(2, q)$ двух экземпляров $SL(2, q)$ (см. также [6, с. 257]). Но тогда группа $C_G(i)/\langle i \rangle \cong L_2(q) \times L_2(q)$ [6, с. 257], где $L_2(q)$ — проективная специальная линейная группа, содержит изолированный элемент порядка 3. Если $L_2(q)$ содержит изолированный элемент порядка 3, то вследствие теоремы 4.251 [6] этот элемент содержится в циклической силовской 3-подгруппе, что, как показано выше, невозможно. Поэтому подгруппа $L_2(q)$ (а значит, и группа $L_2(q) \times L_2(q)$) не содержит изолированных элементов порядка 3. Следовательно, группа $G_2(q)$ не содержит изолированных элементов простого порядка. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Пусть $p > 2$, P — силовская p-подгруппа группы G и порядок каждой неединичной нормальной подгруппы из G делится на число p. Обозначим $Q = P \cap F^*(G)$, $F^* = F^*(G)$, $F = F(G)$, $E = E(G)$. Тогда в силу теоремы C [10] $C_P(Q) = Z(Q)$, откуда ввиду соотношений $Q \leqslant F^*$ и $x \in C_P(Q)$ получаем $x \in F^*$.

Предположим, что $x \notin Z(E)$. Поскольку $Z(E)$ — характеристическая подгруппа в E, то $Z(E) \lhd G$, $PZ(E) = P$ и потому $Z(E) \leqslant P \cap EF = P \cap F^* = Q$, а значит, $Z(E) \leqslant Q \cap E$. Таким образом, $(Q \cap E)\,Z(E)/Z(E) = (Q \cap E)/Z(E)$. Кроме этого, $(Q \cap E)/Z(E)$ — силовская p-подгруппа группы $\overline{E} = E/Z(E)$. Далее, образ $\overline{x}$ элемента x в группе $G/Z(E)$ индуцирует автоморфизм группы $\overline{E}$, который вследствие изолированности элемента x централизует подгруппу $(Q \cap E)/Z(E)$. Теперь, учитывая, что группа $\overline{E}$ не содержит неединичных нормальных p-подгрупп, то по теореме A [10] получаем $\overline{x} \in Z((Q \cap E)/Z(E))$. Итак, $x \in E$.

Поскольку $\overline{x} \neq \overline{1}$ и группа $\overline{E}$ разложима в прямое произведение $\overline{E}_1 \times \overline{E}_2 \times \ldots \times \overline{E}_n$ некоторых своих простых подгрупп $\overline{E}_1, \overline{E}_2, \ldots, \overline{E}_n$, $n \in \mathbb{N}$ [7] (лемма 10.2), то, как легко заметить, некоторая простая подгруппа $\overline{E}_m$, где $1 \leqslant m \leqslant n$, содержит неединичный образ изолированного элемента x простого порядка p вопреки лемме 2. Поэтому $x \in Z(E)$, $[\langle x \rangle, F] = 1$ и $x \in Z(F^*)$. Но $Z(F^*) \lhd G$ и тогда вследствие леммы 1 $x \in Z(G)$. Теорема доказана.

1. *Glauberman D*. Central elements in core-free groups // J. Algebra.— 1966.— **4**, N 3.— P. 403—420.
2. *Коуровская тетрадь* / Под ред. В. Д. Мазурова, Ю. И. Мерзлякова, В. А. Чуркина. — 9-е изд., доп.— Новосибирск : Ин-т математики СО АН СССР, 1984.— 144 с.
3. *Syskin S. A*. Some characterization theorems // Proc. Symp. Pure Math.— 1980.— **37**.— P. 121—122.
4. *Фейт У*. Некоторые следствия классификации простых конечных групп // Успехи мат. наук.— 1983.— **38**, № 3.— С. 128—133.
5. *Артемович О. Д*. К Z^*-теореме // X Всесоюз. симп. по теории групп : Тез. докл. (Гомель, 9—12 сент. 1986 г.) — Минск : Ин-т математики АН БССР.— 1986.— С. 8.
6. *Горенстейн Д*. Конечные простые группы. Введение в их классификацию.— М. : Мир, 1985.— 352 с.
7. *Гаген Т. М*. Некоторые вопросы теории конечных групп // К теории конечных групп.— М. : Мир, 1979.— С. 13—97.
8. *Семинар* по алгебраическим группам : Сб. ст. / Под ред. А. А. Кириллова.—М. : Мир, 1973.— 315 с.
9. *Сыскин С. А*. Абстрактные свойства простых спорадических групп // Успехи мат. наук.— 1980.— **35**, № 5.— С. 181—212.
10. *Gross F*. Automorphisms which centralize a sylow p-subgroups // J. Algebra.— 1982.— **77**, N 1.— P. 202—233.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 20.11.86