УДК 519.45

В. П. Шунков

О группах с конечной периодической частью

В пятидесятых годах С. Н. Черников опубликовал две работы [1, 2] о группах с конечными классами сопряженных элементов, т. е. об FC-группах. Особого выделения требует случай, когда FC-группа (или просто группа) обладает конечной периодической частью. Важность этого класса групп проявляется при рассмотрении заданной группы с точки зрения ее «близости» к неким «эталонным» группам, например к локально разрешимым группам, линейным группам, черниковским группам и т. д. В связи с этим, естественно, возник вопрос о характеризации группы, обладающей конечной периодической частью, в классе всех групп. В настоящей статье этот вопрос решается для группы с инволюциями, обладающей конечной периодической частью. Здесь оказалось уместным введенное ранее автором понятие точки группы, суть которого состоит в следующем: некоторый элемент g конечного порядка группы G называется точкой, если, во-первых, для любой нетривиальной (g)-инвариантной конечной подгруппы K из G множество конечных подгрупп из $N_G(K)$, содержащих элемент g, конечно и, во-вторых, при $g = 1$ множество элементов конечных порядков из G конечно. Если $|g| = 2$, то g называется инволютивной точкой.

Получен следующий основной результат.

Теорема. *Группа G с инволюциями тогда и только тогда обладает конечной периодической частью, когда в ней для некоторой пары элементов x, y выполняются условия:*

1) *почти для всех (т. е. кроме, быть может, конечного числа) элементов вида y^g, $g \in G$, подгруппа* гр (x, y^g) *конечна;*

2) *x, y — точки из G, одна из которых является инволюцией, а другая имеет порядок $\neq 2$.*

Справедливость основного результата настоящей работы легко вытекает из следующего утверждения, которое будем называть основной леммой.

Пусть G — группа, x, y — элементы из G, удовлетворяющие условиям:

1) *почти для всех элементов вида y^g, $g \in G$, подгруппа* гр (x, y^g) *конечна;*

2) *один из элементов x, y — инволютивная точка t в G, а другой — элемент z конечного порядка $\neq 2$;*

3) *множество инволюций из $N_G((z))$, сопряженных с t в G конечно либо пусто.*

Тогда индекс $|G : C_G(z)|$ конечен и элемент z содержится в конечной нормальной подгруппе из G.

Приведем пример, показывающий, что теорема теряет силу в случае $|x| = |y| = 2$.

Пример. В [3] построена группа без кручения вида $A = \text{гр}(b, c)$, где $b^p = c^p = d$ и A/d — свободная периодическая группа простого периода $p \geqslant 665$. Рассмотрим группу $T = A_2(i) = (A \times A) \leftthreetimes (i)$, где i — инволюция. Возьмем элемент $s = (d, d^{-1}) \in A \times A$. Очевидно, $s \in Z(A \times A)$ и $s^i = s^1$. Введем обозначения: $G = T/(s)$, $x = i$, $H = C_G(x)$, $\mathfrak{M}$ — множество строго вещественных элементов конечных порядков относительно x из $\text{гр}(A \times A)/(s)$.

Легко доказать, что $G = H\mathfrak{M}$ и тройка (G, x, x) удовлетворяет всем условиям теоремы, за исключением условия, что порядок элемента $y = x$ отличен от двойки. Однако теорема неверна для G.

Основная лемма доказывается в п. 4, причем главные этапы доказательства выделены как леммы 7—15. Результаты, полученные в пп. 2, 3, связаны с вопросами, отраженными в их названиях. Эти представляющие самостоятельный интерес результаты используются в п. 4.

Обозначения, используемые в работе, стандартны [4, 5].

1. Вспомогательные результаты. Будем говорить, что в G выполняется сильное условие (a, b)-конечности, если a, b — элементы из G и подгруппа $L_g = \text{гр}(a, b^g)$ конечна при любом $g \in G$.

Справедливы следующие утверждения.

1. Если в G выполняется сильное условие (a, a)-конечности, то для любой инволюции i из G выполняется сильное условие (i, a)-конечности.

Доказательство очевидно.

2. Если для некоторой инволюции $i \in G$ выполняется условие (i, i)-конечности, то для любой инволюции $k \in G$ выполняется сильное условие (k, i)-конечности.

Доказательство вытекает из свойств групп диэдра.

3. В бесконечной периодической группе с инволюциями никакая инволюция не является точкой.

Доказательство вытекает из теоремы [8].

4. Теорема Фробениуса (см., например, [10]). Пусть G — конечная группа, H — ее собственная подгруппа. Если $H \cap H^g = 1$, $g \in G \setminus H$, то $G = F \leftthreetimes H$, $(|F|, |H|) = 1$, $F = \{1, G \setminus \bigcup\limits_{g \in G} H^g\}$. В этом случае говорят, что G — конечная группа Фробениуса, а F и H соответственно ее ядро и дополнение.

5. Теорема Фейта — Томпсона [12]. Конечная группа нечетного порядка разрешима.

6. Если G — конечная разрешимая группа, L — ее нильпотентный радикал, то $C_G(L) \leqslant L$ (см., например, [5]).

2. О некоторых вложениях инволюций в группах. Лемма 1. *Любое бесконечное множество $\mathfrak{M}$ конечных подгрупп группы G с пересечением $T = \bigcap\limits_{H \in \mathfrak{M}} H \ni i$, где i — инволютивная точка, почти целиком (за исключением, быть может, конечного числа) состоит из подгрупп, изоморфных группам Фробениуса, с дополнениями, содержащими T, или группам типа $Sz(Q)$, $SL_2(Q)$, где Q — поле характеристики два, $T = P \leftthreetimes (c)$ и P — некоторая силовская 2-подгруппа таких подгрупп* [15].

Говорят, что подгруппа H сильно вложена в группу G, если она обладает инволюциями, но ни одно из пересечений $H \cap x^{-1}Hx$, $x \in G \setminus H$, инволюциями не обладает.

Лемма 2. *Пусть G — группа, H — сильно вложенная подгруппа из G, i — некоторая инволюция из H, удовлетворяющие условию $(*)$: почти для всех (т. е. кроме, быть может, конечного числа) элементов вида $g^{-1}ig$, где $g \in G \setminus H$, подгруппы* $\text{гр}(i, i^g)$ *конечны.*

Тогда

1) *любой элемент $g \in G \setminus H$ обладает представлением $g = hj_g$, где $h \in H$, j_g — инволюция из $G \setminus H$;*

2) *для любой инволюции $j \in G \setminus H$ в подгруппе H существует множество элементов, строго вещественных относительно j, той же мощности, что и мощность множества инволюций из H;*

3) *если k — инволюция из $G \setminus H$, то $|ik|$ конечен и нечетен;*

4) *все инволюции из H сопряжены в H;*

5) *все инволюции из G сопряжены в G.*

Доказательство. Сначала докажем утверждение 3. Случай, когда $|ik|$ четен, невозможен ввиду определения сильно вложенной подгруппы и свойств групп диэдра. Предположим, что $|ik|$ бесконечен. Рассмотрим подгруппу $V = (ik) \leftthreetimes (i)$. Если бы $H \cap (ik) = 1$, то число различных элементов вида $(ik)^{-1} i (ik)^m$, $m = 1, 2, \dots$, было бы бесконечным, причем $(ik)^m \notin H$, $m = 1, 2, \dots$. Но по условию $(*)$ почти все подгруппы вида гр $(i, (ik)^{-m} i (ik)^m$ являлись бы конечными, а это невозможно, так как V — бесконечная группа диэдра. Следовательно, $H \cap (ik) = (c) \neq 1$. Так как $k \notin H$, то и $ik \notin H$. Но тогда все элементы вида $ikc^m \notin H$, $m = 1, 2, \dots$, и, очевидно, число различных элементов вида $(ikc)^{-1} i \cdot (ikc)^m$ бесконечно. Снова применяя условие $(*)$, приходим к противоречию с бесконечностью подгруппы V. Следовательно, V — конечная подгруппа и утверждение 3 доказано. Отсюда и из свойств групп диэдра как легко видеть, вытекает справедливость утверждений 4, 5. Утверждения 1,2 с учетом доказанных выше утверждений 3 — 5 фактически доказаны в [14] (см. доказательство леммы 2.) Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть G — группа, i — ее инволюция, b — элемент конечного порядка > 2, удовлетворяющие условиям:*

1) *$C_G(i)$, $C_G(b)$ обладают конечными периодическими частями;*

2) *почти для всех элементов вида b^g, i^g, $g \in G$, подгруппы* гр (i, b^g), гр (b, i^g) *являются группами Фробениуса с ядрами, не содержащими i^g, b^g и b, i^g соответственно.*

Тогда в G выполняется сильное условие (i, i)-конечности.

Доказательство. Предположим, что в G существует бесконечная подгруппа диэдра вида $V = (x) \leftthreetimes (i)$. Пусть t — произвольный элемент из (x^2). Очевидно, i, it сопряжены в V. Рассмотрим подгруппы вида гр (b, it). По условию 2 в (x^2) найдется такая бесконечная последовательность различных элементов

$$t_1, t_2, \dots, t_n, \dots, \tag{1}$$

что $M_n =$ гр (b, it_n), $n = 1, 2, \dots,$ — конечные группы Фробениуса с ядрами S_n, $n = 1, 2, \dots$, не содержащими элементы b, it_n. По предложению 4 подгруппы (b), (b^{it_n}) сопряжены с помощью некоторого элемента d_n из S_n и $it_n = r_n d_n$, где r_n — инволюция и $C_G(b) \cap M_n$ или $d_n = r_n it_n$. По условию 1 число различных элементов вида r_n, $n = 1, 2, \dots$, конечно, а множество элементов вида $t_n, n = 1, 2, \dots$, бесконечно. По предложению 4 подгруппы $(br_n it_n)$, (b) сопряжены в G. Так как множество различных элементов вида $br_n it_n$, $n = 1, 2, \dots$, бесконечно, то с учетом условия 2 последовательность (1) можно подобрать так, чтобы подгруппы вида $L_n =$ гр $(i, br_n it_n)$, $n = 1, 2, \dots$, являлись группами Фробениуса с ядрами F_n, $n = 1, 2, \dots$, не содержащими элементы $i, br_n it_n$. Отсюда, из предложения 4 и свойств групп Фробениуса [10], получим $br_n it_n = s_n c_n$, $c_n \in F_n$, $s_n \in C_G(i) \cap L_n$ или

$$c_n = s_n^{-1} br_n it_n, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{2}$$

По условию 1 число элементов вида $u_n = s_n^{-1} br_n i$, $n = 1, 2, \dots$, очевидно, конечно. Но тогда найдутся такие номера, например 1 и 2, что $u = u_1 = u_2$. С учетом равенств (2) и $u = u_1 = u_2$ имеем $c_1 = ut_1$, $c_2 = ut_2$, где c_1, c_2 — строго вещественные элементы относительно i из ядер F_1, F_2 соответственно [10]. Отсюда получим $l = t_1^{-1} t_2 = c_1^{-1} c_2$, где $l \neq 1$ и $l \in (x^2)$. А так как

$l^i = l^{-1}$, то $l^{-1} = l^i = (c_1^{-1}c_2)^i = c_1^{-i}c_2^i = c_1c_2^{-1}$, т. е. элементы c_1, c_2^{-1} перестановочны. Но порядки элементов c_1 и c_2^{-1} конечны и, значит, $|l|$ также конечен, что невозможно, так как $l \neq 1$ $l \in (x)$, где $|x|$ бесконечен. Полученное противоречие завершает доказательство леммы. Лемма доказана.

3. Инволютивные точки и теоремы вложения для сопряженно бипримитивно конечных групп с инволюциями. Лемма 4. *Пусть G — группа, i — ее инволютивная точка, удовлетворяющие условию (i, i)-конечности. Тогда справедливо хотя бы одно из утверждений*:

1) *G обладает конечной периодической частью*;

2) *в G выполняются следующие условия*:

а) *силовские 2-подгруппы циклические или конечные обобщенные группы кватернионов*;

б) *$H = C_G(i)$ обладает конечной периодической частью и H не содержится ни в какой большей подгруппе с таким свойством*;

в) *если L — конечная подгруппа из G, $L \leqslant H$ и $L \cap H \neq 1$, то L — группа Фробениуса с дополнением $L \cap H$.*

Доказательство. Пусть G не обладает конечной периодической частью. Но тогда по определению точки группы и лемме Дицмана $C_G(i)$ обладает конечной периодической частью и $|G : C_G(i)|$ бесконечен. Множество $\mathfrak{M}$ подгрупп с периодической частью, содержащих $C_G(i)$, частично упорядочено и, очевидно, объединение любой его цепи принадлежит ему. По лемме Цорна $\mathfrak{M}$ обладает максимальным элементом, т. е. некоторой подгруппой H из $\mathfrak{M}$, не содержащейся ни в какой большей подгруппе из $\mathfrak{M}$. Пусть V — периодическая часть из H. Так как $i \in V$, то по предложению 3 V — конечная подгруппа. Очевидно, $V \lhd H$ и V — автоморфно допустимая подгруппа в H. Отсюда ввиду максимальности H в $\mathfrak{M}$ вытекает, что $N_G(V) = N_G(H) = H$.

Возьмем в V произвольную инволюцию k. Если бы гр $(\{k^g\ g \in G\}) \leqslant V$, то мы пришли бы, очевидно, к противоречию с определением точки i и условием (i, i)-конечности. Следовательно, для некоторого $c \in G$ инволюция $t = k^c \notin H$. Рассмотрим подгруппу диэдра $L =$ гр (i, t). Предположим, что L не является конечной группой Фробениуса с дополнением (i) и ядром (d), где $d = it$. В этом случае либо $|d| = \infty$, либо $|d|$ четен. Случай, когда $|d| = \infty$ невозможен ввиду условия (i, i)-конечности и предложения 2.

Пусть $|d|$ четен. По свойствам групп диэдра (d) обладает инволюцией j и $j \in C_G(i) \cap C_G(t)$. Очевидно, $|H : C_G(j) \cap H|$ конечен, а так как i — точка и в $C_G(j)$ выполняется условие (i, i)-конечности, то $C_G(j)$ обладает конечной периодической частью R ввиду леммы Дицмана. Пересечение $H \cap C_G(j)$ обладает такой подгруппой X, что $|H : X| < \infty$, $X \lhd H$ и $V, R < C_G(X) \leqslant N_G(X)$. Но $t \in R$, а поэтому $t \in N_G(X)$. С другой стороны, $t \notin H$ и $H < N_G(X)$. Следовательно, $H \neq N_G(X)$ и ввиду определения H подгруппа $M = N_G(X)$ не обладает периодической частью. Далее, $X \leqslant C_G(i) \leqslant H$ и $|H : X| < \infty$, причем X обладает конечной периодической частью. Но тогда $i \in X$ означало бы, что $|M : C_G(i)| < \infty$ и, так как i — точка, то по лемме Дицмана M обладала бы конечной периодической частью вопреки доказанному выше. Следовательно, $i \notin X$ и, очевидно, в $\overline{M} = M/X$ централизатор $C_{\overline{M}}(iX)$ конечен и выполняется условие (iX, iX)-конечности. С учетом предложения 2 из работы [8] следует, что M — локально конечная группа, а так как $H/X \neq \overline{M}$ и H/X — конечная подгруппа из $\overline{M}$, то H/X содержится в большей конечной подгруппе K/X из $\overline{M}$, где K — подгруппа из M и $X < H < K$. Очевидно, $|K : C_G(i)| < \infty$ и, как и выше, K обладает конечной периодической частью. Но $K \neq H$, $H < K$ и мы получаем противоречие с определением подгруппы H. Полученное противоречие означает, что d — элемент конечного нечетного порядка и инволюции i, t сопряжены в G по свойствам групп диэдра, а, значит и k, i также сопряжены в G.

Теперь докажем, что H — сильно вложенная подгруппа в G. Предположим, что это не так. Тогда $H \neq H^g$ для некоторого $g \in G$ и $H \cap H^g$ обладает инволюцией k. По доказанному выше k — точка в G и кроме этого, $|H : C_G(k) \cap H|$, $|H^g : C_G(k) \cap H^g|$ конечны. Снова, по доказанному выше $C_G(K) \leqslant H \cap H^g$ и $H = H^g$, т. е. $g \in N_G(H) = H$. Следовательно, H — сильно вложенная подгруппа в G. Если бы H обладала более, чем одной инволюцией, то по лемме 2 и условию (i, i)-конечности в H существовал бы нееденичный элемент c конечного порядка, строго вещественный некоторой инволюции $j \in G \setminus H$. По лемме 2 i и j сопряжены в G, а поэтому j является точкой. Рассмотрим подгруппу $M = C_G(c) \leftthreetimes (j)$. Так как j — точка в M и в M выполняется условие (j, j)-конечности, то по лемме Дицмана M обладает конечной периодической частью. Далее, очевидно, $|H : M \cap H| < \infty$ и по доказанному выше легко получим противоречие с условием $j \notin H$. Следовательно, H обладает единственной инволюцией. Отсюда и из работы [9] вытекает, что силовские 2-подгруппы из H — циклические или обобщенные группы кватернионов, а по лемме 2 они являются силовскими в G и сопряжены в G.

Теперь докажем, что если $H^g \neq H$, то $H \cap H^g$ — либо единичная подгруппа, либо группа без кручения. Предположим, что некоторый элемент h из $H \cap H^g$ имеет конечный порядок и $h \neq 1$. Так как $H = C_G(i)$, то i, $i^g \in C_Q(h)$ и, очевидно, $|H : C_G(h) \cap H| < \infty$. Далее, рассуждая аналогично, приходим к противоречию с определением подгруппы H. Отсюда на основании предложения 4 заключаем, что утверждение в) доказано и вместе с ним доказана и лемма. Лемма 4 и ее доказательство принадлежит В. И. Сенашову.

Лемма 5. *Пусть G — группа, a — ее элемент порядка > 2, удовлетворяющие условиям (i, i)-, (i, a)-конечности. Тогда G обладает конечной периодической частью.*

Доказательство. Предположим, что G не обладает конечной периодической частью. В этом случае ввиду условия (i, i)-конечности и леммы 4 подгруппа H обладает следующими свойствами:

1) $H = C_G(i)$ и $|G : H|$ бесконечен;

2) H обладает конечной периодической частью и не содержится ни в какой большой подгруппе с таким свойством из G;

3) если K — конечная подгруппа из G, $K \not< H$ и $K \cap H \neq 1$, то K — группа Фробениуса с дополнением $H \cap K$;

4) H обладает единственной инволюцией.

Сначала докажем, что в G выполняется сильное условие (i, i)-конечности. Предположим, что для некоторого элемента $s \in G$ подгруппа $= B$ гр (i, a^s) бесконечна. Из условия (i, a)-конечности и свойства 1 очевидно вытекает, что $|H : C_G(a^s) \cap H| < \infty$. По теореме Пуанкаре (упражнение 2.5.13 [4]) $H \cap C_G(a^s)$ обладает нормальной в H подгруппой T конечного индекса в H. А так как $B < C_G(T)$, то $T \lhd$ гр $(H, B) = M$. Очевидно, $i \notin T$ и в $\overline{M} = M/T$ централизатор $C_{\overline{M}}(iT)$ конечен, причем в $\overline{M}$ выполняется условие (iT, iT)-конечности. С учетом предложения 2 из работы [8] вытекает, что M, как подгруппа, порожденная двумя конечными подгруппами H/T и BT/T, конечна. Но тогда $|M : H| < \infty$ и по свойству 1 $H = C_G(T)$. Но тогда по лемме Дицмана i содержится в конечной нормальной подгруппе из M. А так как i — точка в M, то по лемме Дицмана M обладает конечной периодической частью. Но $B < M$, $|a^s| < \infty$ и, значит, B — конечная подгруппа вопреки предположению, что B — бесконечная группа. Следовательно, любая подгруппа вида гр (i, a^g), $g \in G$, конечна, т. е. в G выполняется сильное условие (i, a)-конечности.

Рассмотрим подгруппы вида $L_g =$ гр (a, i^g), $g \in G \setminus H$. По доказанному выше они конечны, а по свойствам 3, 4 они — группы Фробениуса с дополнениями, содержащими i^g, и абелевыми ядрами F_g, $g \in G \setminus H$ [10]. Если бы элемент a принадлежал ядрам бесконечного множества различных подгрупп Фробениуса вида $L_g = F_g \leftthreetimes (i^g)$, $g \in G \setminus H$, то, использовав свойства групп Фробениуса [10], легко получили бы противоречие с определением точки i и условием (i, i)-конечности. Отсюда и из свойства 1 вытекает, что в $G \setminus H$ найдется такой элемент c, для которого $L_c = F_c \leftthreetimes (ak)$, где k — инволюция, сопряженная с i в G, и $k \in (ak)$ [10].

Но тогда, не нарушая общности дальнейших рассуждений, будем предполагать, что $a \in H$. Отсюда, опираясь на свойства 2, 3, легко показать, что $C_G(a) \leqslant H$. Далее, четверка (G, H, i, a) удовлетворяет всем условиям основной теоремы из [13] и, значит, $G = F \leftthreetimes H$, где F — периодическая абелева подгруппа. А так как i — точка, то по предложению 3 F — конечная подгруппа и, очевидно, $|G:H| < \infty$, вопреки свойству 1. Следовательно, G обладает конечной периодической частью и лемма доказана.

Следствие. *Группа с инволюциями тогда и только тогда обладает конечной периодической частью, когда она сопряженно бипримитивно конечна и в ней все периодические локально разрешимые подгруппы, содержащие некоторую фиксированную инволюцию, конечны.*

4. Доказательство основной леммы. Пусть G — некоторая бесконечная группа, x, y — ее элементы и для тройки (G, x, y) выполняются условия:

1) почти для всех элементов вида y^g, $g \in G$, подгруппа гр (x, y^g) конечна;

2) один из элементов x, y — инволютивная точка t в G, а другой — элемент z конечного порядка $\neq 2$;

Введем множества $\mathfrak{N}\{x^g \mid g \in G\}$, $\mathfrak{H} = \{y^g g \mid \in G\}$.

Заметим, что для любых $x \in \mathfrak{N}$, $k \in \mathfrak{H}$ тройка (G, s, k) удовлетворяет условиям 1, 2 основной леммы. Ниже всюду будем предполагать, что x — инволютивная точка в G, y — элемент порядка $\neq 2$ и в G для любой пары (s, k), где $s \in \mathfrak{N}$, $k \in \mathfrak{H}$, выполняется по крайней мере одно из условий:

$\mathfrak{N}$-условие почти для каждого элемента вида k^g, $g \in G$, подгруппа гр (s, k^g) конечна;

$\mathfrak{H}$-условие: почти для каждого элемента вида $s^g, g \in G$, подгруппа гр (s^g, k) конечна.

Лемма 6. *Если (s) — силовская 2-подгруппа из (y), то (s) содержится в конечной нормальной подгруппе из группы G.*

Доказательство. Если $s = 1$, то утверждение леммы тривиально. Пусть $s \neq 1$ и j — инволюция из (s). Очевидно, при любом из $\mathfrak{N}$-, $\mathfrak{H}$-условий в G выполняется сильное условие (x, j)-конечности (предложение 2).

Если для некоторого $c \in G$ элемент xj^c-имеет конечный нечетный порядок, то по свойствам групп диэдра x, j сопряжены в G и, значит, в G выполняется условие (x, x)-конечности. В этом случае тройка (G, x, y) удовлетворяет условиям леммы 5 и по этой лемме G обладает конечной периодической частью, в частности элемент s содержится в конечной нормальной подгруппе из G.

Пусть теперь для любого $g \in G$ элемент xj^g имеет четный порядок и t_g — инволюция из (xj^g). По свойствам групп диэдра $t_g \in C_G(x)$, а по лемме 2 $C_G(x)$ обладает конечной периодической частью и, значит, множество инволюций вида t_g, $g \in G$, конечно. Но тогда из бесконечности множества $\mathfrak{A} = \{j^g \mid g \in G\}$ вытекало бы, что для некоторого элемента $c \in G$ пересечение $C_G(t_c) \cap \mathfrak{A}$ бесконечно и инволюция x содержалась бы в бесконечном множестве конечных подгрупп из $C_G(t_c)$. Однако это невозможно, так как по предположению x — точка. Следовательно, $\mathfrak{A}$ — конечное множество и $|G:C_G(j)|$ конечен.

Пусть t — элемент наибольшего порядка из (s), для которого индекс $|G:C_G(t)|$ конечен. Так как $j \in (t)$, то $t \neq 1$. По лемме Дицмана $t \in Z \lhd G$, где Z — конечная подгруппа. Если $s \in Z$, то лемма доказана. Предположим, что $s \in Z$, и рассмотрим G/Z. Если k — элемент из (s) и kZ — инволюция из G/Z, то из условия (xZ, yZ)-конечности и предложения 2 вытекает, что все подгруппы вида гр (xZ, k^gZ), $g \in G$, конечны в G/Z. А так как x — точка, Z — нетривиальная конечная нормальная подгруппа в G, то, очевидно $|G:C_G(k)$ конечен. Но тогда мы получаем противоречие с определением элемента t. Следовательно, $s \in Z$ и лемма доказана.

Перейдем непосредственно к доказательству основной леммы. Предположим, что она неверна. В качестве контрпримера выберем тройку (G, x, y), удовлетворяющую условиям замечания 1 и условию 3 основной леммы, причем элемент y не содержится в конечной нормальной подгруппе из G.

Лемма 7. *Тройку (G, x, y) можно выбрать из множества контрпримеров таким образом, чтобы для нее были справедливы утверждения:*

1) x — инволютивная точка, y — нетривиальный элемент конечного нечетного порядка;

2) в G выполняется по крайней мере одно из $\mathfrak{N}$-, $\mathfrak{H}$-условий;

3) индексы $|G:C_G(x)|$, $|G:N_G((y))|$ бесконечны и $C_G(x)$ обладает конечной периодической частью;

4) если $N_G((y))$ обладает инволюцией, сопряженной с x в G, то $N_G((y))$ обладает конечной периодической частью;

5) для любых $s \in \mathfrak{N}$, $k \in \mathfrak{H}$ тройка (G, s, k) удовлетворяет условиям 2, 3 основной леммы и по крайней мере одному из $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{H}$-условий.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать утверждения 3, 4 и нечетность порядка элемента y. Отсюда с учетом замечания 1 будет вытекать справедливость леммы. Ввиду выбора контрпримера и леммы Дицмана [6, 7] индекс $|G : N_G((y))|$ бесконечен. Если бы $|G : C_G(x)| < \infty$, то по лемме Дицмана G обладала бы конечной периодической частью. А так как y — элемент конечного порядка, то отсюда получили бы противоречие с бесконечностью индекса $|G : N_G(y))|$. Следовательно, $|G : C_G(x)|$ бесконечен и по лемме Дицмана $C_G(x)$ обладает конечной периодической частью. Утверждение 3 доказано.

По условию 3 основной леммы пересечение $\mathfrak{N} \cap N_G((y))$ конечно и если оно непусто, то по лемме Дицмана и замечанию 1 $N_G(y))$ обладает конечной периодической частью. Утверждение 4 доказано.

Если (s) — силовская 2-подгруппа из (y), то по замечанию 1 и лемме 6 (s) содержится в конечной подгруппе Z, нормальной в G. Отсюда в силу выбора контрпримера (G, x, y) подгруппы $(s) \neq (y)$ и $y \notin Z$. В фактор-группе $\bar{G} = G$ элемент $\bar{y} = yZ$ имеет нечетный порядок и $\bar{y} \neq Z$. Очевидно, тройка $(\bar{G}, xZ, \bar{y})$ является контрпримером к основной лемме. Утверждение 1 доказано и вместе с ним доказана лемма.

Для любой пары элементов s, k, где $s \in \mathfrak{N}$, $k \in \mathfrak{H}$, введем множества: $\mathfrak{M}_{sk}$ — множество всех конечных подгрупп вида $L_g = \text{гр}(s, k^g)$, $g \in G$, $\mathfrak{A}_{sk} = \{L_c \in \mathfrak{M}_{sk}/L_c$ — группа Фробениуса с ядром, не содержащим элементы $s, k\}$, $\mathfrak{B}_{sk} = \{L_c \in \mathfrak{M}_{sk} \,|\, L_c \simeq Sz(Q), SL(2, Q)$ либо L_c — группа Фробениуса с ядром, содержащим элемент $k^c\}$, $\mathfrak{P}_{sk} = \{L_c \in \mathfrak{M}_{sk} \,|\, L_c \in \mathfrak{M}_{sk} \setminus \mathfrak{A}_{sk} \cup \mathfrak{B}_{sk})\}$. Далее, введем такие множества: $\tilde{\mathfrak{M}}_{sk} = \{L_c^{c^{-1}} \,|\, L_c \in \mathfrak{M}_{sk}\}$, $\tilde{\mathfrak{A}}_{sk} = \{L_c^{c^{-1}} \,|\, L_c \in \mathfrak{A}_{sk}\}$, $\tilde{\mathfrak{B}}_{sk} = \{L_c^{c^{-1}} \,|\, L_c \in \mathfrak{B}_{sk}\}$, $\tilde{\mathfrak{P}}_{sk} = \{L_c^{c^{-1}} \,|\, L_c \in \mathfrak{P}_{sk}\}$

Лемма 8. *$\tilde{\mathfrak{B}}$—конечное множество.*

Доказательство. Предположим, что лемма неверна и пусть

$$V_1, V_2, \dots V_n, \dots \tag{3}$$

— произвольная бесконечная последовательность различных подгрупп из $\tilde{\mathfrak{B}}$ вида $V_n = \text{гр}(k, s_n)$, где $s_n \in \mathfrak{N}$, $n = 1, 2, \dots$. Если все подгруппы из (3) — группы Фробениуса с ядрами, содержащими элемент k, то по свойствам групп Фробениуса $s_n^{-1} k s_n = k^{-1}$, $n = 1, 2, \dots$, и $N_G((k))$ содержит бесконечно много инволюций, сопряженных с x в G, вопреки лемме 7. Отсюда вытекает, что нам достаточно рассмотреть случай, когда $V_n \simeq \mathrm{Sz}(Q)$, либо $\mathrm{SL}(2, Q)$, $n = 1, 2, \dots$. Так как по лемме 7 k — элемент нечетного порядка и $k \neq 1$, то из элементарных свойств групп типа $\mathrm{SL}(2, Q)$, $\mathrm{Sz}(Q)$ в V_n следует, что существует инволюция $t_n \in \mathfrak{N}$ и $t_n \in N_G((k))$, $n = 1, 2, \dots$. Снова по лемме 7 в последовательности $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ существует лишь конечное число различных инволюций. А поэтому, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что $t = t_1 = t_2 = \dots = t_n = \dots$ и $t \in T = \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n$. Так как $t \in \mathfrak{N}$, то по лемме 7 t — инволютивная точка. Но t принадлежит T и $t^{-1}kt =$

$= k^{-1}$ — нетривиальный элемент нечетного порядка, что противоречит лемме 1. Следовательно, $\tilde{\mathfrak{B}}_{sk}$ — конечное множество и лемма доказана.

Лемма 9. *Если* $|C_G(y):Z(G)|$ *конечен, то из* $\mathfrak{H}$*-условия вытекает* $\mathfrak{N}$*-условие и наоборот.*

Доказательство. По лемме 7 $|G:C_G(x)|$ и по $\mathfrak{H}$-условию для некоторой бесконечной последовательности

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{4}$$

представителей различных правых смежных классов по централизатору $C_G(x)$ подгруппы вида $L_n = \text{гр}(y, x^{a_n})$, $n = 1, 2, \ldots$, конечны и $L_s \neq L_m$ при $s \neq m$. Так как $|C_G(y):Z(G)| < \infty$, то, очевидно, последовательность (4) можно подобрать так, чтобы все подгруппы вида $L_n^{a_n^{-1}}$, $n = 1, 2, \ldots$, были различными. Предположим, что для некоторого номера m подгруппа $L_m^{a_m^{-1}}$ является группой Фробениуса с ядром, не содержащим элементов x, $y^{a_m^{-1}}$. В этом случае ввиду предложения 4 и свойств групп Фробениуса в $\mathfrak{H} \cap C_G(x)$ найдется элемент b, и так как по лемме 7 $C_G(x)$ обладает конечной периодической частью, то

$$|C_G(x):C_G(b) \cap C_G(x)| < \infty. \tag{5}$$

Но b и y сопряжены в G и по условию леммы

$$|C_G(y):Z(G)| < \infty. \tag{6}$$

Отсюда и из (5) вытекает

$$|C_G(x):Z(G)| < \infty. \tag{7}$$

Неравенства (6), (7), очевидно, означают, что в G выполняются $\mathfrak{N}$-, $\mathfrak{H}$-условия. Отсюда и из леммы 1 вытекает, что множество $\{L_n^{a_n^{-1}} \mid n = 1, 2, \ldots\}$ почти целиком состоит из подгрупп, являющихся группами Фробениуса с ядрами, содержащими элементы вида x^{a_n}, и подгрупп, изоморфных группам типа $\mathrm{Sz}(Q)$, $SL(2, Q)$. Но тогда ввиду свойств таких групп и групп Фробениуса $a_n^{-1} x a_n \in N_G(y)$, $n = 1, 2, \ldots$, и пересечение $\mathfrak{N} \cap N_G((y))$ бесконечно вопреки лемме 7. Следовательно, если в G выполняется $\mathfrak{H}$-условия, то ввиду неравенства (6), (7) выполняется и $\mathfrak{N}$-условие.

Пусть теперь в G выполняется $\mathfrak{N}$-условие. Если все подгруппы вида $L_g = \text{гр}(x, y^g)$, $g \in G$, конечны, то утверждение леммы, очевидно, справедливо. Предположим, что для некоторого элемента b из $\mathfrak{H}$ подгруппа $L = \text{гр}(x, b)$ бесконечна. По $\mathfrak{N}$-условию множество $\{b^r \mid r \in C_G(x)\}$, очевидно, конечно. Отсюда, так легко видеть, вытекает $|C_G(x):C_G(b) \cap C_G(x)| < \infty$. Но b и y сопряжены в G, а поэтому $|C_G(b):Z(G)| < \infty$ и $|C_G(x):Z(G)| < \infty$. В этом случае, как показано выше, в G выполняются $\mathfrak{N}$-, $\mathfrak{H}$-условия. Лемма доказана.

Лемма 10. $N_G((y)) \cap \mathfrak{N}$ *непусто и* $N_G((y))$ *обладает конечной периодической частью.*

Доказательство. Пусть в G выполняется $\mathfrak{N}$-условие. По лемме 7 $|G:C_G(y)|$ бесконечен и по $\mathfrak{N}$-условию множество конечных подгрупп вида $\text{гр}(x, y^a)$, $a \in G$, бесконечно. На основании леммы 1, используя свойства групп Фробениуса и групп типа $\mathrm{SL}(2, Q)$, $\mathrm{Sz}(Q)$, заключаем, что для некоторого элемента $u \in G$ подгруппа (y^u) централизуется или подгруппа (y^a) нормализуется некоторой инволюцией из $\mathfrak{N}$. Но тогда этим же свойством обладает и подгруппа (y) (напомним о $\mathfrak{H}$-условии). Если все подгруппы вида $\text{гр}(y, x^g)$, $g \in G$, конечны, то в G выполняется $\mathfrak{N}$-условие и по доказанному выше $N_G((y)) \cap \mathfrak{N}$ непусто. Предположим, что для некоторого $c \in G$ подгруппа $H = \text{гр}(y, x^c)$ бесконечна. Из $\mathfrak{H}$-условия вытекает $|C_G(y):C_G(x^c) \cap C_G(y)| < \infty$ и $|C_H(y):Z(H)| < \infty$.

Тройка (H, x^c, y) удовлетворяет всем условиям леммы 7 и по лемме 9 в H выполняется $\mathfrak{N}$-условие. Но тогда по доказанному выше $N_H((y)) \cap (H \cap$

$\cap \mathfrak{N}$) непусто и по лемме 7 $N_G((y))$ обладает конечной периодической частью. Лемма доказана.

Лемма 11. *Если* $|C_G(x):Z(G)|<\infty$, *то* $|C_G(y):Z(G)|<\infty$ *и в* G *выполняются* $\mathfrak{N}$-, $\mathfrak{H}$-*условия.*

Доказательство. По лемме 10 $N_G((y))\cap\mathfrak{N}$ обладает инволюцией t и она содержится в конечной периодической части подгруппы $N_G((y))$, а это очевидно, означает, что

$$|C_G(y):C_G(t)\cap C_G(y)|<\infty. \tag{8}$$

Но t и x сопряжены в G и по условию леммы $|C_G(x):Z(G)|<\infty$. Отсюда и из неравенства (8) вытекает $|C_G(y):Z(G)|<\infty$. На основании двух неравенств легко доказывается выполнимость $\mathfrak{N}$-, $\mathfrak{H}$-условий в группе G. Лемма доказана.

Лемма 12. *Если для некоторых* $s\in\mathfrak{N}$, $k\in\mathfrak{H}$ *подгруппа* $M=\text{гр}(s,k)$ *бесконечна, то* $|C_M(s):Z(M)|$, $|C_M(k):Z(M)|<\infty$ *и в* M *выполняются* $\mathfrak{N}$-, $\mathfrak{H}$-*условия.*

Доказательство. По лемме 7 M удовлетворяет всем условиям основной леммы (относительно пары элементов s, k). Если в G выполняется $\mathfrak{N}$-условие, то, очевидно, $|C_M(s):C_M(k)\cap C_M(s)|<\infty$, т. е. $|C_M(s):Z(M)|<$ $<\infty$. Отсюда по лемме 11 (применяем ее к тройке (M, s, k)) получаем $|C_M(k):Z(M)|<\infty$ и в M выполняются $\mathfrak{N}$-, $\mathfrak{H}$-условия.

Пусть теперь в G выполняется $\mathfrak{H}$-условие. В этом случае $|C_M(k):Z(M)<$ $<\infty$ и по лемме 9 (применяем ее к тройке (M, s, k)) в M выполняется $\mathfrak{N}$-условие. Но тогда по доказанному выше $|C_M(s):Z(M)|<\infty$ и по лемме 11 в M выполняются $\mathfrak{N}$-, $\mathfrak{H}$-условия. Лемма доказана.

Лемма 13. *Справедливы утверждения:*

1) $|C_G(x):Z(G)|$ *бесконечен:*

2) *все подгруппы вида* $\text{гр}(x, y^a)$, $a\in G$, *конечны.*

Доказательство. Предположим, что

$$|C_G(x):Z(G)|<\infty. \tag{9}$$

По лемме 11

$$|C_G(y):Z(G)|<\infty \tag{10}$$

и в G выполняются $\mathfrak{N}$-, $\mathfrak{H}$-условия. Очевидно, ввиду неравенств (9), (10) и $\mathfrak{N}$-, $\mathfrak{H}$-условий из конечности $\mathfrak{P}_{xy}$ следует конечность $\tilde{\mathfrak{P}}_{xy}$, а из бесконечности $\mathfrak{B}_{xy}$ — бесконечность $\tilde{\mathfrak{B}}_{xy}$ и наоборот. По лемме 1 $\mathfrak{P}_{xy}$ — конечное множество и, значит, $\tilde{\mathfrak{P}}_{xy}$ — также конечное множество. Если бы $\tilde{\mathfrak{B}}_{xy}$ было бесконечным, то, как отмечалось выше, $\tilde{\mathfrak{B}}_{xy}$ было бы также бесконечным вопреки лемме 8. Следовательно, $\mathfrak{B}_{xy}$, $\tilde{\mathfrak{B}}_{xy}$, $\mathfrak{P}_{xy}$, $\tilde{\mathfrak{P}}_{xy}$ — конечные множества и по лемме 1 $\mathfrak{M}_{xy}\setminus\mathfrak{A}_{xy}$, $\tilde{\mathfrak{M}}_{xy}\setminus\tilde{\mathfrak{A}}_{xy}$ — также конечные множества. Но тогда по лемме 3 в G выполняется сильное условие (x, x)-конечности и по лемме 5 G обладает конечной периодической частью вопреки лемме 7. Полученное противоречие означает, что $|C_G(x):Z(G)|$ бесконечен и утверждение 1 леммы доказано.

Предположим, что для некоторого $a\in G$ подгруппа $M=\text{гр}(x, y^b)$ бесконечна. По лемме 7 тройка (M, x, y^a) является контрпримером к основной лемме, а поэтому, не нарушая общности рассуждений, будем предполагать, что $G=\text{гр}(x, y)$. По лемме 12 $|C_G(x):Z(G)|<\infty$, вопреки доказанному выше утверждению 1. Следовательно, все подгруппы вида гр (x, y^c), $c\in G$, конечны и утверждение 2 доказано, а вместе с ним завершено доказательство леммы.

Лемма 14. *Справедливы утверждения*:

1) *множества* $\tilde{\mathfrak{B}}_{sk}$, $\tilde{\mathfrak{P}}_{sk}$ *конечны*;

2) $C_G(k)\cap\mathfrak{N}$ *непусто для любого* $k\in\mathfrak{H}$.

Доказательство. По лемме 8 $\tilde{\mathfrak{B}}_{sk}$ — конечное множество. Докажем конечность множества $\tilde{\mathfrak{P}}_{sk}$. Предположим, что $\tilde{\mathfrak{P}}_{sk}$ — бесконечное множество и $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$ — некоторая бесконечная последовательность различных подгрупп из $\tilde{\mathfrak{P}}_{sk}$, где $L_n = \text{гр}(k, s_n)$, $s_n \in \mathfrak{N}$, $n = 1, 2, \ldots$. Из лемм 1, 13 и определения множества $\mathfrak{P}_{sk}$, как легко видеть, вытекает, что число различных подгрупп вида L_n^r, $r \in C_G(s_n)$, конечно, а поэтому, очевидно, выполняется неравенство

$$|C_G(s_n) : C_G(k) \cap C_G(s_n)| < \infty. \tag{11}$$

По лемме 10 $N_G((k))$ обладает конечной периодической частью V и инволюцией i из $V \cap \mathfrak{N}$. Рассмотрим подгруппы $H_n = \text{гр}(L_n, V)$, $n = 1, 2, \ldots$. Если бы для некоторого номера m подгруппа H_m была бесконечной, то по лемме 7 тройка (H_m, s_m, k) была бы контрпримером к основной лемме, причем ввиду неравенства (11) выполнялось бы условие $|C_{H_m}(s_m) : Z(H_m)| < \infty$, что противоречило бы лемме 13 и замечанию 1. Следовательно, все подгруппы вида H_n, $n = 1, 2, \ldots$, конечны и k, $i \in V \leqslant \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$, где i — инволютивная точка. На основании леммы 1 и свойств групп Фробениуса заключаем, что бесконечное множество $\{L_n \leqslant H_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ из $\tilde{\mathfrak{P}}_{sk}$ почти целиком состоит из подгрупп множества $\tilde{\mathfrak{A}}_{sk} \cup \mathfrak{B}_{sk}$ вопреки определению множества $\tilde{\mathfrak{P}}_{sk}$. Полученное противоречие означает, что $\tilde{\mathfrak{P}}_{sk}$ — конечное множество и утверждение 1 леммы доказано. Далее, по лемме 13 в G выполняется $\mathfrak{H}$-условие и по лемме 7 множество $\tilde{\mathfrak{M}}_{sk}$-бесконечно и $\tilde{\mathfrak{M}}_{sk} = \tilde{\mathfrak{A}}_{sk} \cup \tilde{\mathfrak{B}}_{sk} \cup \tilde{\mathfrak{P}}_{sk}$, а по утверждению 1 настоящей леммы $\tilde{\mathfrak{B}}_{sk} \cup \tilde{\mathfrak{P}}_{sk}$ — конечное множество. Следовательно, $\tilde{\mathfrak{A}}_{sk}$ непусто. Но тогда, используя определение множества $\tilde{\mathfrak{A}}_{sk}$, предложение 4 и свойства групп Фробениуса [10] докажем, что $C_G(K) \cap \mathfrak{N}$ также непусто. Утверждение 2 доказано и лемма доказана.

Лемма 15. *$\mathfrak{M}_{xy} \setminus \mathfrak{A}_{xy}$ и $\tilde{\mathfrak{M}}_{xy} \setminus \tilde{\mathfrak{A}}_{xy}$ — конечные множества.*

Доказательство. Конечность $\tilde{\mathfrak{M}}_{xy} \setminus \tilde{\mathfrak{A}}_{xy}$ доказана в лемме 14. Докажем конечность $\mathfrak{M}_{xy} \setminus \mathfrak{A}_{xy} = \mathfrak{B}_{xy} \cup \mathfrak{P}_{xy}$. Так как x — инволютивная точка в G, то из леммы 1 вытекает конечность $\mathfrak{P}_{xy}$. Предположим, что $\mathfrak{B}_{xy}$ — бесконечное множество и L_1 $L_2, \ldots, L_n, \ldots$ — некоторая бесконечная последовательность различных подгрупп из $\mathfrak{B}_{xy}$, где $L_n = \text{гр}(x, y_n)$, $y_n \in \mathfrak{H}$, $n = 1, 2, \ldots$. По лемме 14 $\mathfrak{B}_{xy_n}$ — конечное множество и отсюда, очевидно, вытекает

$$|C_G(y_n) : C_G(x) \cap C_G(y_n)| < \infty. \tag{12}$$

Пусть V_n — конечная периодическая часть подгруппы $N_G((y_n))$ (лемма 10). Если бы для некоторого m подгруппа $H_m = \text{гр}(V_m, L_m)$ была бесконечной, то по лемме 7 тройка (H_m, x, y_m) была бы контрпримером к основной лемме, причем ввиду неравенства (12) выполнялось бы условие

$$|C_{H_m}(y_m) : Z(H_m)| < \infty, \tag{13}$$

а ввиду лемм 7, 14 для некоторой инволюции $t_m \in C_{H_m}(y_m)$, сопряженной с x в H_m, условие

$$|C_{H_m}(t) : C_{H_m}(y_m) \cap C_{H_m}(t_m)| < \infty. \tag{14}$$

Из (13), (14) вытекало бы $|C_{H_m}(x) : Z(H_m)| < \infty$ вопреки лемме 13. Следовательно, все группы вида H_n конечны и $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} H_n$, причем каждая подгруппа H_n, $n = 1, 2, \ldots$, содержит инволюцию $t_n \in C_H(y_n) \cap V_n$, сопряженную с x в G. Отсюда на основании леммы 1, предложения 4 и свойств группы Фробениуса [10] заключаем, что множество $\{H_n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ бесконечно и почти целиком состоит из подгрупп Фробениуса с ядрами, не содержащими x и элементы вида y_n, $n = 1, 2, \ldots$. Но тогда, очевидно, найдется такой номер q, что $L_q \notin \mathfrak{B}_{xy}$, вопреки предложению. Следовательно, $\mathfrak{B}_{xy}$ — конечное множество, то и $\mathfrak{M}_{xy} \setminus \mathfrak{A}_{xy}$ также конечное множество. Лемма доказана. Итак, по лемме 13 множество всех подгрупп вида гр(y, x^a), $a \in G$, совпадает с $\mathfrak{M}_{xy}$, а множество всех подгрупп вида гр(y, x^a), $a \in G$, — с $\tilde{\mathfrak{M}}$. Далее, согласно лемме 15 $\mathfrak{M}_{xy}$ почти целиком совпадает с $\mathfrak{A}_{xy}$, а $\tilde{\mathfrak{M}}_{xy}$ — с $\mathfrak{A}_{xy}$. Отсюда ввиду леммы 3 вытекает, что в G выполняется условие (x, x)-конечности. Но тогда в силу леммы 5 G обладает конечной периодической частью вопреки лемме 7. Полученное противоречие доказывает справедливость основной леммы.

1. *Черников С. Н.* О группах с конечными классами сопряженных элементов // Докл. АН СССР.— 1957.— **114**, № 6.— С. 1177—1179.
2. *Черников С. Н.* О строении групп с конечными классами сопряженных элементов // Там же. — **115**, № 1.— С. 60—63.
3. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах.—М. : Наука, 1975.— 336 с.
4. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп — 3-е изд.— М. : Наука, 1982.— 288 с.
5. *Gorenstein D.* Finite Groups.— New York : Chelsea, 1980.— 528 p.
6. *Курош А. Г.* Теория групп.— 3-е изд., доп.— М. : Наука, 1967.— 648 с.
7. *Горчаков Ю. М.* Группы с конечными классами сопряженных элементов.— М. : Наука, 1978.— 120 с.
8. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика.— 1972.— **11**, № 4.— С. 470—494.
9. *Холл М.* Теория групп.— М. : Изд-во иностр. лит ., 1962.— 468 с.
10. *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы.— М. : Наука, 1968.— 112 с.
11. *Bender H.* Transitive gruppen gerader ordnung, in denen jede involution genau einen, Punkt festlässt // J. Algebra.— 1971.— **17**, N 4.— P. 527—554.
12. *Feit W., Thompson T. G.* Solvability of groups of odd order // Pacif. J. Math.— 1963.— **13**, N 3.— p. 775—1025.
13. *Шунков В. П.* Группы с инволюциями. Ч. 1.— Красноярск, 1986.— 27 с.— (Препринт/ АН СССР. Сиб. отд-ние, ВЦ ; 4).
14. *Шунков В. П.* О некотором обобщении теоремы Фробениуса на периодические группы // Алгебра и логика.— 1967.— **6**, № 3.— С. 113—123.
15. *Сенашов В. И.* Характеризация слойно конечных групп : Автореф. ... канд. физ.-мат. наук.— Красноярск, 1985.— 102 с.

ВЦ СО АН СССР, Красноярск

Получено 29.07.87