УДК 512.544

Л. А. Курдаченко, В. В. Пылаев

О группах, богатых почти нормальными подгруппами

Пусть G — группа, ν — какое-либо теоретико-подгрупповое свойство (например, свойство «быть нормальной подгруппой, дополняемой подгруппой» и т. п.). Будем говорить, что группа G удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, не удовлетворяющих свойству ν, или, короче, условию $\mathrm{Min} - \overline{\nu}$, если для всякой строго убывающей цепочки подгрупп $G_1 > G_2 > \ldots$ найдется такой номер n, что G_k — ν — подгруппа для любого $k \geqslant n$. Из определения видно, что группа с условием $\mathrm{Min} - \overline{\nu}$ включает в себя достаточно много ν-подгрупп (если она не удовлетворяет Min). С. Н. Черников изучал группы с условием минимальности для ненормальных абелевых подгрупп [1] и для недополняемых абелевых подгрупп [2]. Одним из обобщений нормальных подгрупп могут быть подгруппы с конечным множеством сопряженных — почти нормальные подгруппы. В настоящей работе изучаются группы с условием минимальности для подгрупп не являющихся почти нормальными, или, короче, группы с условием $\mathrm{Min} - \overline{an}$. Пусть G — группа. Обозначим через $FC(G)$ множество элементов группы G, каждый из которых имеет в G конечное множество сопряженных. Очевидно, $FC(G)$ — подгруппа G. Ее называют FC-центром G (см., например, [3]). Центр группы обозначим через $\zeta(G)$.

Лемма 1. *Если G — FC-группа с условием $\mathrm{Min} - \overline{an}$, то индекс $|G : \zeta(G)|$ конечен (т. е. G конечна над центром).*

Доказательство. Пусть H — произвольная подгруппа G, $H_{\mathfrak{F}}$ — пересечение всех подгрупп, имеющих в H конечный индекс. Если индекс $|H : H_{\mathfrak{F}}|$ конечен, то $H_{\mathfrak{F}}$ не включает в себя собственных подгрупп конечного индекса. Поскольку G — FC-группа, то отсюда следует, что $H_{\mathfrak{F}} \leqslant \zeta(G)$ (см., например, [4], теорема 1.9). Тогда $H = F \cdot H_{\mathfrak{F}}$, где F — конечнопорожденная подгруппа G. Но в FC-группе всякая конечнопорожденная подгруппа почти нормальна. Отсюда следует, что и $H = F \cdot H_{\mathfrak{F}}$ почти нормальна.

Пусть теперь индекс $|H:H_{\mathfrak{F}}|$ бесконечен. Пользуясь условием $\mathrm{Min}-\overline{an}$, можно доказать существование в H почти нормальной в G подгруппы H_1, имеющей в H конечный индекс. Снова $H = F_1H_1$, где $F_1 \lhd H$, F_1 — конечнопорожденная подгруппа, т. е. F_1 почти нормальна в G. Отсюда опять получаем, что $H = F_1H_1$ почти нормальна в G.

Итак, всякая подгруппа G почти нормальна в G. Тогда из теоремы Б. Неймана (см., например, [4], теорема 7.10) следует, что G конечна над центром. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть группа G удовлетворяет $\mathrm{Min}-\overline{an}$, g — ее элемент бесконечного порядка. Тогда $g \in FC(G)$.*

Доказательство. Пусть p_1, p_2 — два различных простых числа. Пользуясь условием $\mathrm{Min}-\overline{an}$, можно показать, что $\langle g_i^{p_i^{n_i}} \rangle$ почти нормальна для некоторых $n_i \in N$, $i = 1, 2$. Числа $p_1^{n_1}$ и $p_2^{n_2}$ взаимно просты, поэтому $\langle g \rangle = \langle g_1^{p_1^{n_1}} \rangle \langle g_2^{p_2^{n_2}} \rangle$, т. е. и $\langle g \rangle$ почти нормальна. В частности, $g \in FC(G)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть группа G удовлетворяет $\mathrm{Min}-\overline{an}$, g — ее элемент бесконечного порядка. Тогда $C_G(g) \leqslant FC(G)$.*

Доказательство. Пусть $1 \neq a \in C_G(g)$. Если a — элемент бесконечного порядка, то $a \in FC(G)$ ввиду леммы 2. Пусть $|a|$ конечен. Пользуясь условием $\mathrm{Min}-\overline{an}$, получаем, что подгруппа $H = \langle g^n \rangle \times \langle a \rangle$ почти нормальна в G. Тогда индекс $|G:N_G(H)|$ конечен. Подгруппа $\langle a \rangle$, будучи периодической частью H, характеристична в H. В частности, $\langle a \rangle \lhd N_G(H)$. Отсюда следует конечность индекса $|G:N_G(\langle a \rangle)|$, т. е. $\langle a \rangle$ почти нормальна в G. Следовательно, $a \in FC(G)$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть группа G удовлетворяет $\mathrm{Min}-\overline{an}$. Если G содержит элементы бесконечного порядка, то G почти абелева.*

В самом деле, из леммы 3 вытекает конечность индекса $|G:FC(G)|$, а из леммы 1 следует, что $FC(G)$ конечна над центром. В частности, G почти абелева.

Лемма 4. *Пусть группа G удовлетворяет $\mathrm{Min}-\overline{an}$, $g \in G$, $H = \underset{\lambda \in \Lambda}{\times} H_\lambda$ — подгруппа G, Λ — бесконечное множество, и H_λ — $\langle g \rangle$ — допустимая подгруппа при любом $\lambda \in \Lambda$. Тогда $g \in FC(G)$.*

Доказательство. Так как Λ бесконечно, то можно считать, не ограничивая общности, что $\langle g \rangle \cap (\underset{\lambda \in \Lambda}{\times} H_\lambda) = \langle 1 \rangle$. Пусть Λ_1, Λ_2 — бесконечные подмножества Λ, для которых $\Lambda_1 \cup \Lambda_2 = \Lambda$, $\Lambda_1 \cap \Lambda_2 = \varnothing$. Пользуясь условием $\mathrm{Min}-\overline{an}$, можно найти такие бесконечные подмножества $\Lambda_3 \subset \Lambda_1$ и $\Lambda_4 \subset \Lambda_2$, что подгруппы $\langle g \rangle \cdot (\underset{\lambda \in \Lambda_3}{\times} H_\lambda)$ и $\langle g \rangle \cdot (\underset{\lambda \in \Lambda_4}{\times} H_\lambda)$ почти нормальны в G. Но тогда и подгруппа $\langle g \rangle = \langle g \rangle \cdot (\underset{\lambda \in \Lambda_3}{\times} H_\lambda) \cap \langle g \rangle \times (\underset{\lambda \in \Lambda_4}{\times} H_\lambda)$ почти нормальна в G. Это означает, что $g \in FC(G)$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть группа G удовлетворяет $\mathrm{Min}-\overline{an}$. Если G включает в себя периодическую абелеву подгруппу, не являющуюся черниковской, то она конечна над центром.*

Доказательство. Пусть A — абелева подгруппа бесконечного ранга. Тогда A включает в себя подгруппу $C = \underset{n \in N}{\times} \langle c_n \rangle$, где $|c_n|$ конечен. Из леммы 4 получаем включение $A \leqslant FC(G)$. Учитывая лемму 1, убеждаемся в существовании в группе G нормальной абелевой подгруппы $D = \underset{n \in N}{\times} \langle d_n \rangle$, где $|d_n|$ — простое число при любом $n \in N$. Пусть $1 \neq x$ — произвольный элемент конечного порядка группы G. Если $\Pi(D)$ бесконечно, то из леммы 4 получаем включение $x \in FC(G)$. Пусть $\Pi(D)$ конечно. Тогда хотя бы для одного простого $p \in \Pi(D)$ силовская p-подгруппа D бесконечна. Поэтому можно считать, что D — элементарная абелева подгруппа. Пусть $1 \neq a_1 \in D$, $L_1 = \langle a_1 \rangle^G$. Подгруппа A_1 конечна, поэтому существует такое подмножество

$\Delta_1 \subseteq N$, что $N \setminus \Delta_1$ конечно и $L_1 \cap \underset{n\in\Delta_1}{\times} \langle d_n \rangle = \langle 1 \rangle$. Пользуясь условием $\mathrm{Min} - \overline{an}$ выделим в Δ_1 такое подмножество Γ_1, что $\Delta_1 \setminus \Gamma_1$ конечно и подгруппа $K_1 = \underset{n\in\Gamma_1}{\times} \langle d_n \rangle$ почти нормальна в G. В частности, из конечности множества $N \setminus \Gamma_1$ следует конечность индекса $|D : K_1|$. Подгруппа K_1 имеет конечное множество сопряженных, каждая из которых входит в D и имеет в D конечный индекс. Поэтому подгруппа $M_1 = \bigcap_{g\in G} K^g$ имеет в D конечный индекс. Итак, в подгруппе D выделена нормальная подгруппа M_1, для которой индекс $|D : M_1|$ конечен и $L_1 \cap M_1 = \langle 1 \rangle$. Пусть $1 \neq a_2 \in M_1$, $L_2 = \langle a_2 \rangle^G$. Повторяя предыдущие рассуждения, приходим к существованию в D такой подгруппы $M_2 \lhd G$, что индекс $|D : M_2|$ конечен и $L_1 L_2 \cap M_2 = \langle 1 \rangle$. Аналогично рассуждая, выделим в D такое бесконечное семейство подгрупп $L_n \lhd G$, $n \in N$, что $\mathrm{гр}\,(L_n \mid n \in N) = \underset{n\in N}{\times} L_n$. Из леммы 4 получаем снова включение $x \in FC(G)$. Всякий элемент бесконечного порядка также содержится в FC-центре (см. лемму 2), поэтому $G = FC(G)$. Осталось применить лемму 1. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть A — свободная абелева группа конечного ранга, F — ее конечная группа автоморфизмов, B — F-допустимая подгруппа A. Тогда существует такая F-допустимая подгруппа C, что $B \cap C = \langle 1 \rangle$ и индекс $|A : BC|$ конечен.*

Доказательство этой леммы получается либо почти дословным повторением теоремы Машке (см., например, [5], теорема 10,8), либо переходом к делимой оболочке A и последующим применением теоремы Машке.

Лемма 7. *Пусть группа G удовлетворяет условию $\mathrm{Min} - \overline{an}$, g — ее элемент конечного порядка, A_1, A_2 — две свободные абелевы $\langle g \rangle$-допустимые подгруппы. Если $A_1 \cap A_2 = \langle 1 \rangle$, то $g \in FC(G)$.*

Доказательство. Пользуясь условием $\mathrm{Min} - \overline{an}$, можно найти такие натуральные числа n_1, n_2, что $\langle g \rangle A_i^{n_i}$ почти нормальна в G, $i = 1, 2$. Но тогда и подгруппа $\langle g \rangle = \langle g \rangle A_1^{n_1} \cap \langle g \rangle A_2^{n_2}$ почти нормальна в G, т. е. $g \in FC(G)$. Лемма доказана.

Пусть A — абелева группа, G — ее группа автоморфизмов. Группу G назовем рационально неприводимой, если всякая неединичная G-допустимая подгруппа A определяет периодическую фактор-группу (см., например, [3, с. 80]). Если $G = \langle \varphi \rangle$ — рационально неприводимая группа автоморфизмов A, то автоморфизм φ назовем рационально неприводимым.

Лемма 8. *Пусть V — конечномерное векторное пространство над полем Q рациональных чисел, α — его невырожденное линейное преобразование, $|\alpha| = p$ — простое число. Если α действует на V неприводимо, то $\dim V = p - 1$.*

Доказательство. Векторное пространство V можно рассматривать как модуль над кольцом $Q[x]$, полагая $v(a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n) = a_0 v + a_1 v\alpha + \ldots + a_n v\alpha^n$ для любого $v \in V$. Так как α действует на V неприводимо, то V—циклический $Q[x]$-модуль. Пусть u — некоторый порождающий его элемент. Тогда отображение $f(x) \to uf(x)$ будет, очевидно, гомоморфизмом $Q[x]$ на V. Ядро H этого гомоморфизма порождается минимальным многочленом $g(x)$ линейного преобразования α. Так как α действует на V неприводимо, то $g(x)$ неприводим над Q. Далее, α является, очевидно, корнем многочлена $\frac{x^p - 1}{x - 1} = \Phi_p(x)$, т. е. многочлены $g(x)$ и $\Phi_p(x)$ имеют общие корни, но многочлен $\Phi_p(x)$ неприводим над Q (см., например, [5] теорема 21.13), и из неприводимости $g(x)$ получаем равенство $bg(x) = \Phi_p(x)$, b — целое число. Но $g(x)$ — делитель характеристического многочлена $h(x)$ линейного преобразования α. Отсюда следует $\deg h(x) = \dim V \geqslant p - 1$.

С другой стороны, $u + u\alpha + \ldots + u\alpha^{p-1}$ — неподвижная точка преобразования α, так что $u + u\alpha + \ldots + u\alpha^{p-1} = 0$. Отсюда следует $\dim V \leqslant p - 1$. Итак, $\dim V = p - 1$. Лемма доказана.

Следствие. *Пусть A — свободная абелева группа конечного ран-*

га, $\alpha \in \operatorname{Aut} A$, $|\alpha| = p$ — простое число. Если α — рационально неприводимый автоморфизм A, то ранг A равен $p - 1$.

Лемма 9. *Пусть G — группа с условием $\mathrm{Min} - \overline{an}$. Если $A = FC(G)$ — неединичная подгруппа без кручения, $A \neq G$, то $G = A \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|b| = p$ — простое число, $A = C_G(A)$ — свободная абелева подгруппа ранга $p - 1$, элемент b индуцирует на A рационально неприводимый автоморфизм.*

Доказательство. Пусть $b \in G \setminus A$. Из леммы 2 следует, что b — элемент конечного порядка. Пусть $1 \neq a \in A$, $H = \langle a \rangle^{(b)}$. Если ранг H строго меньше ранга A, то пусть $1 \neq d$ — элемент, не содержащийся в сервантном замыкании H, $L = H \cdot (\langle d \rangle^{(b)})$. Из леммы 6 следует существование в L двух таких $\langle b \rangle$-допустимых K_1, K_2, что $K_1 \cap K_2 = \langle 1 \rangle$. Из леммы 7 получаем тогда, что $b \in FC(G)$, а это противоречит выбору элемента b. Отсюда следует, что b индуцирует на A рационально неприводимый автоморфизм. Взяв в качестве b элемент простого порядка p, получим из следствия предыдущей леммы, что ранг A равен $p - 1$. Отсюда следует, что всякий элемент из множества $G \setminus A$ будет p-элементом, в частности, $U = G/A$ — p-группа.

Покажем, что A — конечнопорожденная подгруппа. Пользуясь условием $\mathrm{Min} - \overline{an}$, можно выделить в A такую нормальную в G конечнопорожденную подгруппу E, что $E\langle b \rangle$ почти нормальна в G. В частности, в фактор-группе G/E элемент bE содержится в FC-центре, т. е. индекс $|G/E : C_{G/E}(bE)|$ конечен. Пусть $xE \in C_{A/E}(bE)$. Имеем тогда $xx^b \ldots x^{b^{p-1}} = 1$, и, переходя к фактор-группе, получаем равенство $x^pE = E$. Это означает, что $C_{A/E}(bE)$ — группа конечного периода. Будучи абелевой подгруппой конечного ранга, она конечна. Отсюда следует, что индекс $|A : E|$ конечен, т. е. подгруппа A конечно порождена.

Если $p = 2$, то A — бесконечная циклическая, а поскольку $C_G(A) = A$ (см. лемму 3), то G — бесконечная диэдральная группа.

Пусть $p > 2$. Обозначим через $\hat{A}$ делимую оболочку группы A. Всякий автоморфизм A можно однозначно продлить до автоморфизма $\hat{A}$. Поэтому U можно рассматривать как группу невырожденных линейных преобразований $\hat{A}$. Любой элемент U действует на $\hat{A}$ неприводимо, в частности он не имеет в $\hat{A}$ неподвижных точек. Но тогда U — циклическая группа (см., например, [6], лемма V.8.12). Итак, G/A — циклическая p-группа, т. е. $G = A \leftthreetimes \langle b_1 \rangle$. Пусть $|b_1| = p^n$. Как и в лемме 8, можно получить $\dim \hat{A} = \deg \Phi_{p^n}(x)$, где $\Phi_t(x)$ — многочлен деления круга. Но $\dim \hat{A} = p - 1$, и отсюда следует $n = 1$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть G — непериодическая группа с условием $\mathrm{Min} - \overline{an}$, причем всякая периодическая подгруппа G является черниковской. Если $G \neq FC(G)$, то G включает в себя такую конечную нормальную подгруппу F, что $G/F = H \times K$, K — делимая черниковская группа, $H = A \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|b| = p$ — простое число, $A = C_G(A)$ — свободная абелева группа ранга $p - 1$, b индуцирует на A рационально неприводимый автоморфизм.*

Доказательство. Поскольку G содержит элементы бесконечного порядка, то из леммы 2 следует, что $FC(G)$ неединична. Пусть $1 \neq g$ — элемент бесконечного порядка, C — квазициклическая группа. Так как $g \in FC(G)$, то индекс $|C : C_C(g)|$ конечен, т. е. $C \leqslant C_G(g)$. Но ввиду леммы 3 $C_G(g) \leqslant FC(G)$. Отсюда получаем, что FC-центр включает в себя всякую делимую черниковскую подгруппу. Пусть L — максимальная делимая черниковская подгруппа $FC(G)$; $L \leqslant \zeta(FC(G))$, g — элемент бесконечного порядка. Тогда $H = \langle g \rangle^G$ — конечнопорожденная подгруппа. В частности, пересечение $H \cap L$ конечно. Пусть $b \in G \setminus FC(G)$. Пользуясь условием $\mathrm{Min} - \overline{an}$, можно выделить в H такую нормальную в G подгруппу без кручения U, что $U \cap L = \langle 1 \rangle$, индекс $|H : U|$ конечен и $U\langle b \rangle$ почти нормальна в G. В фактор-группе G/U элемент bU содержится в FC-центре, а потому $bU \in C_{G/U}(LU/U)$. Отсюда следует, что $[b, L] \leqslant U$. С другой стороны, $L \triangleleft G$, так что $[b, L] \leqslant L$. Итак, $[b, L] \leqslant U \cap L = \langle 1 \rangle$, т. е. $L \leqslant \zeta(G)$.

Пусть T — периодическая часть $FC(G)$. Нетрудно доказать равенство $FC(G/T) = FC(G)/T$. Но тогда G — группа из леммы 9. В частности, существует такая нормальная конечнопорожденная подгруппа $B \leqslant FC(G)$, что $FC(G) = B \cdot T$. Пусть $F = B \cap T$. Не ограничивая общности можно считать, что $T = FL$. Тогда $FC(G)/F = B/F \times LF/F$. Положим $K = LF/F$, $A = B/F$. Из леммы 9 следует, что $G = AK \cdot \langle b_1 \rangle$, где $b_1^p \in AK$. Так как b — элемент конечного порядка, то $b_1^p \in K$, а поскольку $K \leqslant \zeta(G/F)$, то $\text{гр}(b_1, K) = \langle b \rangle \times K$. Но тогда $G/F = K \times (A \rightthreetimes \langle b \rangle)$ и $A \rightthreetimes \langle b \rangle$ — группа из леммы 9. Лемма доказана.

Теорема 1. *Пусть G — непериодическая группа. Группа G тогда и только тогда удовлетворяет условию* $\text{Min} - \overline{an}$, *когда она либо конечна над центром, либо включает в себя такую конечную нормальную подгруппу F, что $H = G/F$ — группа одного из следующих типов:*

1) $H = A \rightthreetimes \langle b \rangle$, $|b| = p$ — *простое число,* $A = C_G(A)$ — *свободная абелева группа ранга $p - 1$, b индуцирует на A рационально неприводимый автоморфизм;*

2) $H = K \times (A \rightthreetimes \langle b \rangle)$, K — *делимая черниковская группа,* $A \rightthreetimes \langle b \rangle$ — *группа типа* (1).

Доказательство. Так как G содержит элементы бесконечного порядка, то из следствия леммы 3 получаем, что G почти абелева. Если G включает в себя абелеву подгруппу, не являющуюся черниковской, то G конечна над центром ввиду леммы 5. Пусть всякая периодическая подгруппа G является черниковской. Тогда утверждение теоремы вытекает из лемм 9 и 10. Достаточность доказывается нетрудно.

Теорема 2. *Пусть G — локально конечная группа. Группа G тогда и только тогда удовлетворяет условию* $\text{Min} - \overline{an}$, *когда она либо черниковская, либо периодическая конечная над центром группа.*

В самом деле, если G не является черниковской, то она включает в себя абелеву подгруппу, не являющуюся черниковской [7]. Тогда из леммы 5 следует, что G конечна над центром.

1. *Черников С. Н.* Бесконечные неабелевы группы с условием минимальности для неинвариантных абелевых подгрупп // Группы с ограничениями для подгрупп.— Киев : Наук. думка, 1971.— С. 106—115.
2. *Черников Н. С.* ωA-факторизуемые группы // Некоторые вопросы теории групп.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1975.— С. 100—122.
3. *Robinson D. J. S.* Finiteness condition and generalized soluble groups, Pt. 1.— Berlin etc : Springer, 1972.— 210 p.
4. *Tomkinson M. J.* *FC*-groups.— Boston etc : Pitman Advanced Publ. Program, 1984.— 1972 p.
5. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.— М. : Наука, 1969.— 668 с.
6. *Huppert B.* Endliche gruppen I.— Berlin etc : Springer, 1967.— 793 p.
7. *Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика.— 1970.— **9**, № 5.— С. 579—615.

Киев. политехн. ин-т

Получено 05.05.85,
после доработки — 29.08.85