УДК 512.544

П. М. Гудивок, И. В. Шапочка (Ужгород. ун-т)

О ЧЕРНИКОВСКИХ p-ГРУППАХ

Extensions of divisible Abelian p-groups with minimality condition by means of a finite p-group H are investigated. The conditions are established under which the problem of describing all nonisomorphic extensions of this sort is wild. All the nonisomorphic Chernikov p-groups are described whose factor-group is a cyclic group of order p^s, $s \le 2$, with respect to the maximal divisible Abelian subgroup.

Досліджуються розширення повних абелевих p-груп з умовою мінімальності за допомогою скінченної p-групи H. Встановлено, коли задача опису всіх таких неізоморфних розширень є дикою. Описані всі неізоморфні черніковські p-групи, фактор-група яких за максимальною повною абелевою підгрупою є циклічною групою порядку p^s, $s \le 2$.

Пусть G — черниковская группа, т. е. группа, являющаяся расширением прямой суммы конечного числа квазициклических групп с помощью конечной группы. Исследованиям свойств черниковских групп посвящено много работ [1 – 7].

Пусть M — полная абелева p-группа с условием минимальности. В [7] на основании целочисленных p-адических представлений конечных групп изучаются расширения $G(M, H)$ группы M с помощью циклической p-группы H. В частности, с точностью до изоморфизма классифицированы все такие расширения, если H — группа порядка p.

Настоящая статья является продолжением работы [7]. В ней показано, что описание всех неизоморфных расширений произвольной группы M с помощью конечной p-группы H, $p \ne 2$, является дикой задачей, если H не является циклической группой порядка p^r, $r \le 2$. Дается также классификация всех неизоморфных p-групп Черникова, являющихся расширениями группы M с помощью циклической группы порядка p^2, $p \ge 2$. При доказательстве этих результатов существенно используются работы [8 – 12]. Отметим, что основные теоремы этой работы без доказательства приведены в [13].

1. О расширениях полных абелевых p-групп с условием минимальности. Пусть M — внешняя прямая сумма n экземпляров квазициклической p-группы T, т. е.

$$M = M_1 \dotplus \ldots \dotplus M_n, \quad M_i = T, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

Известно [2], что группа $\operatorname{Aut} M$ изоморфна полной линейной группе $GL(n, \mathbf{Z}_p)$, где $\mathbf{Z}_p$ — кольцо целых p-адических чисел. Отсюда и из теории расширений групп [2, 14] вытекает, что всякое расширение G группы M с помощью конечной группы H определяется некоторым матричным представлением Γ степени n группы H над кольцом $\mathbf{Z}_p$ и некоторой системой факторов $\{\mu_{u,v}\}$, $u, v \in H$; $\mu_{u,v} \in M$. Обозначим такое расширение через $G(M, H, \Gamma, \{\mu_{u,v}\})$.

Пусть $\{a_r \mid r = 0, 1, 2, \ldots\}$ — образующие элементы группы T, причем $pa_0 = 0$, $pa_r = a_{r-1}$, $r \in \mathbf{N}$. Если $A = \|\alpha_{ij}\| \in GL(n, \mathbf{Z}_p)$, $\alpha_{ij} \in \mathbf{Z}_p$, и $m = (m_1, \ldots$

$\ldots, m_n)$, $m_i \in M_i = T$, $i = 1, \ldots, n$, $\alpha_{ij} = x_{ij}^{(0)} + x_{ij}^{(1)} p + x_{ij}^{(2)} p^2 + \ldots$, $m_j = y_0^{(j)} a_0 + y_1^{(j)} a_1 + \ldots + y_{k_j}^{(j)} a_{k_j}$, $0 \le x_{ij}^{(r)}$, $y_i^{(s)} < p$, то $A(m) = (m_1', \ldots, m_n')$, где

$$m_i' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(m_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=0}^{k_j} \sum_{s=0}^{k_j} x_{ij}^{(r)} y_s^{(j)} p^r a_s, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Определение 1. *Матричные $\mathbf{Z}_p$-представления $\Gamma: h \to \Gamma_h$ и $\Delta: h \to \Delta_h$ степени n конечной группы H называются обобщенно эквивалентными, если существуют такие матрица $C \in GL(n, \mathbf{Z}_p)$ и автоморфизм ψ группы H, что*

$$C\Gamma_h = \Delta_{\psi(h)} C, \quad h \in H. \tag{2}$$

Пусть далее M — p-группа вида (1), H — произвольная конечная группа. Имеют место следующие леммы.

Лемма 1. *Из изоморфизма групп $G_1 = G(M, H, \Gamma, \{\mu_{u,v}\})$ и $G_2 = G(M, H, \Delta, \{\mu_{u,v}'\})$ вытекает обобщенная эквивалентность представлений Γ и Δ.*

Доказательство. Пусть ρ — изоморфное отображение группы G_1 на группу G_2, $\overline{h}\,(\overline{\overline{h}})$ — представитель смежного класса группы $G_1\,(G_2)$ по подгруппе M, соответствующий элементу h группы H. Очевидно, $\rho\,(M) = M$ и $\rho(\overline{h}) = \overline{\overline{\psi(h)}} + m_h$, где $m_h \in M$ и $\psi: h \to \psi(h)$ — некоторый автоморфизм группы H. Обозначим через C ограничение ρ на M. Можно считать, что $C \in GL(n, \mathbf{Z}_p)$. Теперь для произвольного $m \in M$ имеем

$$(C\Gamma_h)(m) = C(-\overline{h} + m + \overline{h}) = \rho(-\overline{h} + m + \overline{h}) = -m_h - \overline{\overline{\psi(h)}} + $$
$$+ \rho(m) + \overline{\overline{\psi(h)}} + m_h = -\overline{\overline{\psi(h)}} + C(m) + \overline{\overline{\psi(h)}} = (\Delta_{\psi(h)} C)(m).$$

Следовательно, для $\mathbf{Z}_p$-представлений Γ и Δ имеет место равенство (2), что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Пусть $\mathbf{Z}_p$-представления Γ и Δ степени n группы H обобщенно эквивалентны, т. е. существуют такие $C \in GL(n, \mathbf{Z}_p)$ и $\psi \in \operatorname{Aut} H$, что имеет место* (2). *Тогда группа $G_1 = G(M, H, \Gamma, \{\mu_{u,v}\})$ изоморфна группе $G_2 = G(M, H, \Delta, \{\mu_{u,v}'\})$, где $\mu_{u,v}' = C(\mu_{\psi^{-1}(u), \psi^{-1}(v)})$, $u, v \in H$.*

Доказательство. Докажем сначала, что $\{\mu_{u,v}'\}$ является системой факторов, которой соответствует некоторое расширение группы M с помощью группы H, определяющееся $\mathbf{Z}_p$-представлением Δ. Для этого необходимо доказать [2, 14] справедливость равенства

$$\mu_{u+v,w}' + \Delta_w(\mu_{u,v}') = \mu_{u,v+w}' + \mu_{v,w}', \quad u, v, w \in H. \tag{3}$$

Из условий леммы получаем

$$\mu_{u+v,w}' + \Delta_w(\mu_{u,v}') = C(\mu_{\psi^{-1}(u)+\psi^{-1}(v), \psi^{-1}(w)} + \Gamma_{\psi^{-1}(w)}(\mu_{\psi^{-1}(u), \psi^{-1}(v)})),$$
$$\mu_{u+v,w}' + \mu_{v,w}' = C(\mu_{\psi^{-1}(u), \psi^{-1}(v)+\psi^{-1}(w)} + \mu_{\psi^{-1}(v), \psi^{-1}(w)}).$$

Поскольку для произвольных элементов u, v, w группы H $\mu_{u+v,w} + \Gamma_w(\mu_{u,v})) = \mu_{u,v+w} + \mu_{v,w}$, то отсюда вытекает (3).

Искомый изоморфизм $\rho : G_1 \to G_2$ строим следующим образом: $\rho(\overline{h}+m) = \overline{\overline{\psi(h)}} + C(m)$, $h \in H$, $m \in M$, $\overline{h}\,(\overline{\overline{h}})$ — представитель смежного класса группы $G_1(G_2)$ по подгруппе M, соответствующий элементу $h \in H$. Лемма доказана.

Из лемм 1, 2 сразу вытекает следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть* M — p*-группа вида* (1), H — *произвольная конечная группа,* G_1, G_2 — *расщепляемые расширения группы* M *с помощью группы* H, *определяющиеся соответственно* $\mathbf{Z}_p$*-представлениями* Γ *и* Δ *группы* H. *Группы* G_1 *и* G_2 *изоморфны тогда и только тогда, когда представления* Γ *и* Δ *обобщенно эквивалентны.*

Пусть далее M — p-группа вида (1), $H = \langle a \rangle$ — циклическая группа порядка p^s, $s \geq 1$, $\Gamma : a \to \Gamma_a$ — матричное $\mathbf{Z}_p$-представление степени n группы H. Рассмотрим подгруппы $A(\Gamma)$, $B(\Gamma)$ группы M вида $A(\Gamma) = \{ m \in M \mid \Gamma_a(m) = m \}$, $B(\Gamma) = \{ (E + \Gamma_a + \ldots + \Gamma_a^{p^s-1})(m) \mid m \in M \}$, где E — единичная матрица порядка n. Известно [14, 15], что тогда произвольное расширение вида $G(M, H, \Gamma, \{\mu_{u,v}\})$ эквивалентно расширению $G(M, H, \Gamma, \{\mu'_{u,v}\})$, где

$$\mu'_{ia,\,ja} = \begin{cases} 0, & \text{если } i+j < p^s, \\ m_0, & \text{если } i+j \geq p^s, \end{cases} \qquad 0 \leq i, \quad j < p^s, \tag{4}$$

для некоторого $m_0 \in A(\Gamma)$. Поэтому циклические расширения группы M с помощью группы H, определяющиеся $\mathbf{Z}_p$-представлением Γ группы H и системой факторов вида (4), будем обозначать через $G(M, H, \Gamma, m_0)$ либо кратко $G(\Gamma, m_0)$. Расширения $G(M, H, \Gamma, m_0)$ и $G(M, H, \Gamma, m_1)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда $m_0 - m_1 \in B(\Gamma)$.

Лемма 4 [7]. *Группы* $G(M, H, \Gamma, m_0)$ *и* $G(M, H, \Gamma, m_1)$ *изоморфны тогда и только тогда, когда найдутся такие матрица* $C \in GL(n, \mathbf{Z}_p)$ *и натуральное число* r, *не делящееся на* p, *что* $C\Gamma_a C^{-1} = \Gamma_a^r$ *и* $m_0 - C^{-1}(rm_1) \in B(\Gamma)$.

2. Описание некоторых классов неизоморфных черниковских p-групп. Приведем необходимые для дальнейшего результаты из теории целочисленных p-адических представлений конечных p-групп.

Пусть $\mathbf{Q}_p$ — поле p-адических чисел. Будем говорить, что матричное $\mathbf{Z}_p$-представление Γ циклической p-группы H содержит d различных неприводимых компонент, если Γ $\mathbf{Q}_p$-эквивалентно представлению $\Gamma' = n_1\Delta_1 + \ldots + n_d\Delta_d$, $n_i \geq 1$, $i = 1, \ldots, d$, где $\Delta_1, \ldots, \Delta_d$ — попарно неэквивалентные неприводимые $\mathbf{Q}_p$-представления группы H.

Пусть далее $H = \langle a \rangle$ — циклическая p-группа порядка p^s, $s \geq 1$, и ε — первообразный корень степени p^{s_1} из 1, $0 \leq s_1 \leq s$. Для произвольного элемента θ кольца $\mathbf{Z}_p[\varepsilon]$ через $\tilde{\theta}$ обозначим матрицу, соответствующую оператору умножения на θ в $\mathbf{Z}_p$-базисе $1, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{k-1}$ кольца $\mathbf{Z}_p[\varepsilon]$, $k = \varphi(p^{s_1})$, φ — функция Эйлера. Тогда произвольное неприводимое $\mathbf{Z}_p$-представление группы $H = \langle a \rangle$ $\mathbf{Z}_p$-эквивалентно представлению вида $a \to \tilde{\varepsilon}$, $0 \leq s_1 \leq s$. В силу [10] неразложимое $\mathbf{Z}_p$-представление группы H с двумя неприводимыми компонентами $a \to \tilde{\varepsilon}$ и $a \to \tilde{\xi}$ (ξ — первообразный корень степени p^{s_2} из 1, $0 \le s_1 < s_2 \le s$) $\mathbf{Z}_p$-эквивалентно представлению вида

$$a \to \begin{pmatrix} \tilde{\xi} & \langle\delta\rangle \\ 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

где $\langle\delta\rangle$ — $\mathbf{Z}_p$-матрица, у которой все столбцы, кроме последнего, нулевые, а последний состоит из координат элемента $\delta \in \mathbf{Z}_p[\xi]$ в $\mathbf{Z}_p$-базисе $1, \xi, \ldots, \xi^{d-1}$ кольца $\mathbf{Z}_p[\xi]$ $(d = \varphi(p^{s_2}))$.

Теорема 1 [10]. *Пусть $H = \langle a \rangle$ — циклическая p-группа порядка p^s, $s \ge 2$, и Δ_i, $i = 1, 2, 3$, — неприводимые $\mathbf{Z}_p$-представления вида $\Delta_1 : a \to 1$, $\Delta_2 : a \to \tilde{\varepsilon}$, $\Delta_3 : a \to \tilde{\xi}$, $\xi^{p^{s_2}} = \xi^{p^{s_1}} = 1$, $0 < s_1 < s_2 \le s$. Тогда неразложимые матричные $\mathbf{Z}_p$-представления группы H с неприводимыми компонентами из множества $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$ с точностью до эквивалентности исчерпываются следующими представлениями:*

$$\Gamma_1 : a \to 1, \quad \Gamma_2 : a \to \tilde{\varepsilon}, \quad \Gamma_3 : a \to \tilde{\xi},$$

$$\Gamma_4 : a \to \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon} & \langle 1 \rangle \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_5 : a \to \begin{pmatrix} \tilde{\xi} & \langle 1 \rangle \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_6^{(j)} : a \to \begin{pmatrix} \tilde{\xi} & \langle t^j \rangle \\ 0 & \tilde{\varepsilon} \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_7^{(j)} : a \to \begin{pmatrix} \tilde{\xi} & \langle t^j \rangle & 0 \\ 0 & \tilde{\varepsilon} & \langle 1 \rangle \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_8^{(j)} : a \to \begin{pmatrix} \tilde{\xi} & \langle t^j \rangle & 0 \\ 0 & \tilde{\varepsilon} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_9 : a \to \begin{pmatrix} \tilde{\xi} & 0 & \langle 1 \rangle \\ 0 & \tilde{\varepsilon} & \langle 1 \rangle \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_{10}^{(i)} : a \to \begin{pmatrix} \tilde{\xi} & \langle t^i \rangle & 0 & \langle 1 \rangle \\ 0 & \tilde{\varepsilon} & \langle 1 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $t = \xi - 1$; $j = 0, 1, \ldots, \varphi(p^{s_1}) - 1$; $i = 1, 2, \ldots, \varphi(p^{s_1}) - 1$, причем $\Gamma_{10}^{(j)}$ отсутствует, если $p^{s_1} = 2$.

До конца пункта, если не оговорено противное, M — p-группа вида (1), $H = \langle a \rangle$ — циклическая p-группа порядка p^s, $s \ge 2$, и Δ_i, $i = 1, 2, 3$, — неприводимые $\mathbf{Z}_p$-представления вида $\Delta_1 : a \to 1$, $\Delta_2 : a \to \tilde{\varepsilon}$, $\Delta_3 : a \to \tilde{\xi}$, $\xi^{p^{s_2}} = \xi^{p^{s_1}} = 1$, $0 < s_1 < s_2 \le s$. Обозначим через $\mathscr{W}$ множество всех неизоморфных нерасщепляемых расширений вида $G(M, H, \Gamma, m_0)$, где Γ пробегает множество всех неэквивалентных неразложимых матричных $\mathbf{Z}_p$-представлений группы H с неприводимыми компонентами из множества $\{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3\}$. Если $\Phi_{p^{s_1}}(x) = -\alpha_1 - \alpha_2 x - \ldots - \alpha_k x^{k-1} + x^k$, $k = \varphi(p^{s_1})$, $\Phi_{p^{s_2}}(x) = -\beta_1 - \beta_2 x - \ldots$ $\ldots - \beta_d x^{d-1} + x^d$, $d = \varphi(p^{s_2})$ — полиномы деления круга соответственно порядков p^{s_1}, p^{s_2}, и $(\xi-1)^i = \gamma_0^{(i)} + \gamma_1^{(i)}\xi + \ldots + \gamma_{d-1}^{(i)}\xi^{d-1}$, $\gamma_j^{(i)} \in \mathbf{Z}_p$, $j = 0, \ldots, d-1$, то из [7] вытекает, что множество $\mathcal{W}$ исчерпывается такими группами:

$$G(\Gamma_2, m_2), \quad m_2 = (\alpha_1 a_0, (\alpha_1+\alpha_2)a_0, \ldots, (\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{k-1})a_0, a_0);$$

$$G(\Gamma_3, m_3), \quad m_3 = (\beta_1 a_0, (\beta_1+\beta_2)a_0, \ldots, (\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{d-1})a_0, a_0);$$

$$G(\Gamma_6^{(0)}, m_4), \quad m_4 = (a_0+\beta_1 a_1, a_0+(\beta_1+\beta_2)a_1, \ldots$$
$$\ldots, a_0+(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{d-1})a_1, a_1, m_2);$$

$$G(\Gamma_6^{(j)}, m_5), \quad m_5 = (m_3, 0, \ldots, 0), \quad j = 0, 1, \ldots, k-1;$$

$$G(\Gamma_6^{(j)}, m_6^{(j)}), \quad m_6^{(j)} = (\gamma_0^{(j)}a_0, (\gamma_0^{(j)}+\gamma_1^{(j)})a_0, \ldots$$
$$\ldots, (\gamma_0^{(j)}+\gamma_1^{(j)}+\cdots+\gamma_{d-2}^{(j)})a_0, 0, m_2), \quad j = 1, 2, \ldots, k-1;$$

$$G(\Gamma_7^{(j)}, m_7), \quad m_7 = (m_3, 0, \ldots, 0), \quad j = 1, 2, \ldots, k-1;$$

$$G(\Gamma_8^{(0)}, m_8), \quad m_8 = (0, \ldots, 0, m_2, -a_0);$$

$$G(\Gamma_8^{(j)}, m_8^{(j)}), \quad m_8^{(j)} = (m_6^{(j)}, 0, \ldots, 0), \quad j = 1, 2, \ldots, k-1;$$

$$G(\Gamma_9, m_9), \quad m_9 = (m_3, 0, \ldots, 0),$$

где $\{a_r\}$ — образующие элементы квазициклической p-группы T $\{pa_0 = 0, pa_r = a_{r-1}, r \in \mathbf{N}\}$.

Введем отношение порядка $\prec$ на множестве $\mathcal{W}$:

$$G(\Gamma_6^{(0)}, m_4) \prec G(\Gamma_8^{(0)}, m_8) \prec G(\Gamma_6^{(1)}, m_6^{(1)});$$

$$G(\Gamma_6^{(i)}, m_6^{(i)}) \prec G(\Gamma_8^{(j)}, m_8^{(j)}), \quad \text{если} \quad i \le j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, k-1;$$

$$G(\Gamma_8^{(i)}, m_8^{(i)}) \prec G(\Gamma_6^{(j)}, m_6^{(j)}), \quad \text{если} \quad i < j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, k-1;$$

$$G(\Gamma_8^{(k-1)}, m_8^{(k-1)}) \prec G(\Gamma_2, m_2); \quad G(\Gamma_8^{(k-1)}, m_8^{(k-1)}) \prec G(\Gamma_3, m_3);$$

$$G(\Gamma_2, m_2) \prec G(\Gamma_9, m_9); \quad G(\Gamma_3, m_3) \prec G(\Gamma_9, m_9);$$

$$G(\Gamma_9, m_9) \prec G(\Gamma_6^{(k-1)}, m_5); \quad G(\Gamma_6^{(i)}, m_5) \prec G(\Gamma_7^{(j)}, m_7), \quad \text{если} \quad i \ge j,$$
$$i = 0, 1, \ldots, k-1, \quad j = 1, 2, \ldots, k-1;$$

$$G(\Gamma_7^{(i)}, m_7) \prec G(\Gamma_6^{(j)}, m_5), \quad \text{если} \quad i > j, \quad i = 1, 2, \ldots, k-1,$$
$$j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Пусть Γ — произвольное матричное $\mathbf{Z}_p$-представление группы $H = \langle a \rangle$ и $\Gamma = \Gamma_1' + \Gamma_2'$, где Γ_i' – некоторое $\mathbf{Z}_p$-представление группы H, $i = 1, 2$. Тогда в расширении $G(M, H, \Gamma, m)$ H-модуль M имеет вид $M = T_1 \dot{+} T_2$, где T_i — H-модуль, соответствующий представлению Γ_i', $ax_i = \Gamma_{i_a}'(x_i)$, $x_i \in T_i$; $i = 1, 2$. Поэтому расширение $G(\Gamma, m) = G(M, H, \Gamma, m)$ можно записывать также в виде $G(\Gamma_1' + \Gamma_2', (v_1, v_2))$, где $v_i \in A(\Gamma_i') \subset T_i$, $i = 1, 2$.

Лемма 5. *Пусть* $G(\Gamma', m')$, $G(\Gamma'', m'') \in \mathscr{W}$. *Если* $G(\Gamma', m') \prec G(\Gamma'', m'')$, *то* $G(\Gamma' + \Gamma'', (m', m'')) \cong G(\Gamma' + \Gamma'', (m', 0))$.

Доказательство. Из леммы 4 следует, что для доказательства данной леммы достаточно показать, что для произвольных расширений $G(\Gamma', m')$, $G(\Gamma'', m'')$ из $\mathscr{W}$ таких, что $G(\Gamma', m') \prec G(\Gamma'', m'')$, существует обратимая $\mathbf{Z}_p$-матрица C такая, что $C\Gamma_a = \Gamma_a C$ и $C((m', m'')) - (m', 0) \in B(\Gamma)$, где $\Gamma = \Gamma' + \Gamma''$. Рассмотрим ряд наиболее типичных случаев.

Покажем, что для произвольного $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$

$$G(\Gamma_6^{(j)} + \Gamma_2, (m_5, m_2)) \cong G(\Gamma_6^{(j)} + \Gamma_2, (0, m_2)). \tag{5}$$

Введем следующие обозначения: $\omega_2 = \zeta \varepsilon^{k-1} u^{k-1}$, $\omega_2' = \eta t^{k-1} - \tau \xi^{k-1} t^{d-1}$, $\omega_3 = \tau \xi^{d-1} t^{d-1}$, где $u = \varepsilon - 1$, $t = \xi - 1$, $p = \zeta u^k = \tau t^d$, $\Phi_{p^{s_1}}(\xi) = \eta t^k$ для некоторых $\zeta \in \mathbf{Z}_p[\varepsilon]^*$, $\eta, \tau \in \mathbf{Z}_p[\xi]^*$ (K^* — мультипликативная группа кольца K с единицей). Тогда из [7] следует, что $m_2 = \tilde{\omega}_2(e_k)$, $m_5 = (\tilde{\omega}_3(e_d), 0)$, где e_r — элемент p-группы $M_1 \dotplus \ldots \dotplus M_r$, $M_i = T$, вида $e_r = (a_0, 0, \ldots, 0)$. Для произвольного элемента $\lambda = x_0 + x_1\varepsilon + \ldots + x_{k-1}\varepsilon^{k-1}$, $x_i \in \mathbf{Z}_p$, кольца $\mathbf{Z}_p[\varepsilon]$ через $\hat{\lambda}$ будем обозначать элемент кольца $\mathbf{Z}_p[\xi]$, который получается из λ путем замены ε на ξ. Пусть θ — такой элемент из $\mathbf{Z}_p[\varepsilon]$, что $\hat{\theta} = \xi^{d-k} \eta t^{k-j-1}$. Используя [10], нетрудно показать, что существует $\mathbf{Z}_p$-матрица S_1, удовлетворяющая равенству $\tilde{\xi} S_1 + \langle t^j \rangle \tilde{\theta} = \langle t^j \hat{\theta} \rangle + S_1 \tilde{\varepsilon}$. Положим

$$C = \begin{pmatrix} E_d & 0 & S \\ 0 & E_k & \widetilde{\theta u} \\ 0 & 0 & E_k \end{pmatrix},$$

где $S = S_1 \tilde{u} + \langle t^j \hat{\theta} \rangle + S_2$, S_2 — $\mathbf{Z}_p$-матрица, у которой все столбцы состоят из координат соответственно элементов $-\xi^{d-k}, -\xi^{d-k+1}, \ldots, -\xi^{d-1}$ кольца $\mathbf{Z}_p[\xi]$ в $\mathbf{Z}_p$-базисе $1, \xi, \ldots, \xi^{d-1}$. В силу [10] получаем $\tilde{\xi} S_1 \tilde{u} + \langle t^j \rangle \widetilde{\theta u} = \langle t^j \hat{\theta} \rangle \tilde{u} + S_1 \tilde{u} \tilde{\varepsilon}$, $\tilde{\xi} S_2 + \tilde{\xi} \langle t^j \hat{\theta} \rangle - \langle t^j \hat{\theta} \rangle = S_2 \tilde{\varepsilon}$. Отсюда $C\Gamma_a = \Gamma_a C$, где $\Gamma = \Gamma_6^{(j)} + \Gamma_2$, $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$ Далее имеем $C((m_5, m_2)) = (m_5', m_2)$, где $m_5' = (m_3 + S(m_2), \widetilde{\theta u}(m_2))$. Очевидно, $\tilde{u}(m_2) = \tilde{u}\tilde{\omega}_2(e_k) = \tilde{\varepsilon}^{k-1} p(e_k) = 0$, $m_3 + S(m_2) = (\tilde{\omega}_3 + \widetilde{(t^j \hat{\theta})} - \tilde{\xi}^{d-k} \tilde{\omega}_2')(e_d) = 0$. Следовательно, $C((m_5, m_2)) = (0, m_2)$, т. е. справедливо (5).

Установим теперь, что для произвольных $i, j \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$, $i \le j$, имеет место изоморфизм

$$G(\Gamma_6^{(i)} + \Gamma_8^{(j)}, (m_6^{(i)}, m_8^{(j)})) \cong G(\Gamma_6^{(i)} + \Gamma_8^{(j)}, (m_6^{(i)}, 0)).$$

Положим $\Gamma = \Gamma_6^{(i)} + \Gamma_8^{(j)}$,

$$S = \begin{pmatrix} -\tilde{t}^{\,j-i} & 0 \\ 0 & -E_k \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E_{d+k} & 0 & 0 \\ S & E_{d+k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что $C\Gamma_a = \Gamma_a C$ и $C(m_6^{(i)}, m_8^{(j)}) = (m_6^{(i)}, 0)$.

Докажем, что

$$G(\Gamma_7^{(i)} + \Gamma_7^{(j)}, (m_7, m_7)) \cong G(\Gamma_7^{(i)} + \Gamma_7^{(j)}, (m_7, 0))$$

для произвольных $i, j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$, $i > j$. Пусть $\Gamma = \Gamma_7^{(i)} + \Gamma_7^{(j)}$, $\theta = -u^{i-j}$. Тогда $\hat{\theta} = -t^{i-j}$ и существует $\mathbf{Z}_p$-матрица S_1, удовлетворяющая равенству $\tilde{\xi} S_1 + \langle t^j \rangle \tilde{\theta} = \langle t^j \hat{\theta} \rangle + S_1 \tilde{\varepsilon}$. Положим

$$S = \begin{pmatrix} -E_d & S_1 & 0 \\ 0 & \tilde{\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E_{d+k+1} & 0 \\ S & E_{d+k+1} \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $C\Gamma_a = \Gamma_a C$ и $C((m_7, m_7)) = (m_7, 0)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично предыдущим. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть* $H = \langle a \rangle$ — *циклическая группа порядка* p^s, $s \geq 2$; ε, ξ — *первообразные корни соответственно степеней* p^{s_1}, p^{s_2}, $0 < s_1 < s_2 \leq s$; $\mathcal{V}$ — *множество всех неэквивалентных матричных* $\mathbf{Z}_{\bar{p}}$-*представлений группы* H, *содержащих неприводимые компоненты* $\Delta_1 : a \to 1$, $\Delta_2 : a \to \tilde{\varepsilon}$, $\Delta_3 : a \to \tilde{\xi}$; $\mathcal{V}' = \mathcal{V} \cup \varnothing$. *Тогда все неизоморфные расширения произвольной полной абелевой* p-*группы с условием минимальности с помощью группы* H, *определяющиеся* $\mathbf{Z}_p$-*представлениями из множества* $\mathcal{V}$, *исчерпываются следующими группами:*

1) $G(\Gamma, 0)$; 2) $G(\Gamma_2 + \Gamma', (m_2, 0))$; 3) $G(\Gamma_3 + \Gamma', (m_3, 0))$;

4) $G(\Gamma_6^{(0)} + \Gamma', (m_4, 0))$; 5) $G(\Gamma_6^{(i)} + \Gamma', (m_5, 0))$;

6) $G(\Gamma_6^{(j)} + \Gamma', (m_6^{(j)}, 0))$; 7) $G(\Gamma_7^{(j)} + \Gamma', (m_7, 0))$;

8) $G(\Gamma_8^{(0)} + \Gamma', (m_8, 0))$; 9) $G(\Gamma_8^{(j)} + \Gamma', (m_8^{(j)}, 0))$;

10) $G(\Gamma_9 + \Gamma', (m_9, 0))$; 11) $G(\Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma', (m_2, m_3, 0))$, *где* $\Gamma \in \mathcal{V}$; $\Gamma' \in \mathcal{V}'$; $i = 0, 1, \dots, k-1$; $j = 1, 2, \dots, k-1$.

Доказательство. Из лемм 4–5, теоремы 1 и из [7] (теорема 2, предложение 1) вытекает, что для доказательства данной теоремы достаточно показать, что расширение $G(\Gamma_2 + \Gamma_3, (m_2, m_3))$ не изоморфно ни одному из расширений $G(\Gamma_2 + \Gamma_3, (0, m_3))$, $G(\Gamma_2 + \Gamma_3, (m_2, 0))$. Последнее же утверждение следует из того факта, что произвольная матрица $C \in GL(k+d, \mathbf{Z}_p)$, удовлетворяющая равенству $C\Gamma_a = \Gamma_a^r C$ ($\Gamma = \Gamma_2 + \Gamma_3$, $r \in \mathbf{N}$, $(r, p) = 1$), имеет вид $C = \operatorname{diag}(C_1, C_2)$, где $C_1 \in GL(k, \mathbf{Z}_p)$, $C_2 \in GL(d, \mathbf{Z}_p)$. Поскольку $B(\Gamma) = 0$, то

$$(m_2, m_3) - C^{-1}(r(0, m_3)) \notin B(\Gamma), \qquad (m_2, m_3) - C^{-1}(r(m_2, 0)) \notin B(\Gamma),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Если в условиях теоремы 2 H — циклическая группа порядка p^2, то представлениями из множества $\mathcal{V}$ исчерпываются все неэквивалентные $\mathbf{Z}_p$-представления группы H. Поэтому теорема 2 дает описание всех неизоморфных черниковских p-групп, фактор-группа которых по максимальной полной абелевой подгруппе является циклической группой порядка p^2.

3. О дикости задачи классификации расширений произвольной полной абелевой p-группы с условием минимальности с помощью конечной p-группы.

Лемма 6. *Пусть H — циклическая p-группа порядка p^s, $s > 2$, $\mathcal{W}_k$ — множество всех расширений вида $G(M, H, \Gamma, m)$, где M — произвольная полная абелева p-группа с условием минимальности, а Γ пробегает все неэквивалентные матричные $\mathbf{Z}_p$-представления группы H, содержащих k неэквивалентных неприводимых компонент $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Тогда задача классификации всех неизоморфных групп из множества $\mathcal{W}_k$ является дикой, т. е. включает задачу описания с точностью до подобия пар $n \times n$-матриц над некоторым полем для произвольного натурального n, если выполняется одно из следующих условий: 1) $s > 3$, $k > 4$; 2) $s > 2$, $k = 3$, $p > 3$ и степень представления Δ_i больше 1, $i = 1, 2, 3$; 3) $s > 2$, $k > 3$, $p > 2$.*

Доказательство. В случае, когда выполняется первое условие, доказательство леммы вытекает из [7] (теорема 1).

Пусть теперь p — произвольное простое число больше 3, $H = \langle a \rangle$ — циклическая группа порядка p^s, $s > 2$. Из леммы 3 следует, что для доказательства данной леммы в случае 2 достаточно показать, что является дикой задача описания с точностью до обобщенной эквивалентности $\mathbf{Z}_p$-представлений группы H, содержащих три неприводимые неэквивалентные компоненты, каждая из которых имеет степень, отличную от 1.

Введем далее следующие обозначения: E_n — единичная матрица порядка n; $A^{(n)} = A \otimes E_n$ — тензорное произведение матриц A и E_n (A — произвольная $\mathbf{Z}_p$-матрица); ε_i — первообразный корень степени p^{s_i} из 1, $t_i = \varepsilon_i - 1$, $i = 0, 1, 2, 3$; $0 = s_0 < s_1 < s_2 < s_3 \le s$.

Рассмотрим $\mathbf{Z}_p$-представление группы H вида

$$\Gamma(A, B)\colon\ a \to \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_3^{(2n)} & \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ 0 & \tilde{\varepsilon}_2^{(2n)} & \langle t_2^2 E_{2n} \rangle \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon}_1^{(2n)} \end{pmatrix},$$

где

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \langle t_3^{p+1} E_n \rangle & 0 \\ 0 & \langle t_3^{p-1} E_n \rangle \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} \langle t_3 A \rangle & \langle B \rangle \\ \langle E_n \rangle & 0 \end{pmatrix},$$

A, B — произвольные $\mathbf{Z}_p$-матрицы порядка n и $\langle D \rangle = \| \langle \delta_{ij} \rangle \|$, $D = \| \delta_{ij} \|$.

Предположим, что представления $\Gamma(A, B)$ и $\Gamma(A', B')$ — обобщенно эквивалентны. Тогда существует натуральное число r, не делящееся на p, и обратимая матрица C такие, что

$$C\Gamma(A, B)_a = \Gamma(A', B')_{ra} C. \tag{6}$$

Используя [10], можно показать, что представление $\Gamma' : a \to \Gamma(A', B')_a^r$ $\mathbf{Z}_p$-эквивалентно представлению $\Gamma(A'', B'')$ для некоторых $\mathbf{Z}_p$-матриц A'', B'' порядка n. Тогда из (6) получаем, что существует обратимая $\mathbf{Z}_p$-матррица C_1 такая, что $C_1 \Gamma(A, B)_a = \Gamma(A'', B'')_a C_1$. Из [12] вытекает, что задача классификации всех неэквивалентных $\mathbf{Z}_p$-представлений группы H вида $\Gamma(A, B)$ является дикой. Отсюда следует утверждение леммы в этом случае.

Пусть теперь p — произвольное нечетное простое число, $H = \langle a \rangle$ — циклическая группа порядка p^s, $s > 2$. Аналогично предыдущему случаю можно показать, используя [12], что является дикой задача описания с точностью до обобщенной эквивалентности $\mathbf{Z}_p$-представлений группы H вида

$$\Gamma(A, B)\colon\ a \to \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}_3^{(2n)} & \Lambda_1 & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & \tilde{\varepsilon}_2^{(2n)} & \langle t_2 E_{2n} \rangle & \langle E_{2n} \rangle \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon}_1^{(2n)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{\varepsilon}_0^{(2n)} \end{pmatrix},$$

где

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \langle t_3^{p+1} E_n \rangle & 0 \\ 0 & \langle t_3^{p-1} E_n \rangle \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} \langle t_3 A \rangle & \langle t_3 B \rangle \\ \langle E_n \rangle & 0 \end{pmatrix},$$

A, B — произвольные $\mathbf{Z}_p$-матрицы порядка n. Лемма доказана.

Предложение 1. *Пусть G — произвольная конечная группа, N — нормальная подгруппа группы G. Если является дикой задача описания с точностью до обобщенной эквивалентности точных $\mathbf{Z}_p$-представлений группы G/N, то дикой будет и задача описания с точностью до обобщенной эквивалентности $\mathbf{Z}_p$-представлений группы G.*

Доказательство. Пусть $\Gamma\colon g + N \to \Gamma_{g+N}$ и $\Delta\colon g + N \to \Delta_{g+N}$ — произвольные точные Z_p-представления степени n группы G/N. Рассмотрим Z_p-представления $\overline{\Gamma}$ и $\overline{\Delta}$ группы G вида $\overline{\Gamma}\colon g \to \Gamma_{g+N}$, $\overline{\Delta}\colon g \to \Delta_{g+N}$, $g \in G$. Предположим, что представления $\overline{\Gamma}$ и $\overline{\Delta}$ обобщенно эквивалентны, т. е. существуют $C \in GL(n, \mathbf{Z}_p)$ и $\psi \in \operatorname{Aut} G$ такие, что

$$C\overline{\Gamma}_g = \overline{\Delta}_{\psi(g)} C, \quad g \in G. \tag{7}$$

Поскольку Γ и Δ — точные Z_p-представления, то $\psi(N) = N$. Пусть ρ — автоморфизм группы G/N, определенный следующим образом: $\rho\,(g + N) = \psi(g) + N$, $g + N \in G/N$. Тогда из (7) получим $C\Gamma_{g+N} = \Delta_{\rho(g+N)} C$, $g + N \in G/N$. Отсюда и вытекает утверждение предложения.

Теорема 3. *Описание всех неизоморфных расширений произвольной полной абелевой p-группы с условием минимальности с помощью конечной p-группы H является дикой задачей, если выполняется одно из следующих условий:* 1) *H — нециклическая p-группа, $p \neq 2$;* 2) *H — нециклическая 2-группа порядка $|H| > 4$;* 3) *H — циклическая p-группа порядка p^s, $s > 2$ при $p \neq 2$, $s > 3$ при $p = 2$.*

Доказательство. Отметим сразу, что доказательство теоремы в случае, когда выполняется условие 3, вытекает из леммы 6.

Пусть p — произвольное нечетное простое число и H — нециклическая p-группа. Поскольку группа H содержит нормальную подгруппу N, для которой H/N — группа типа (p, p), то из предложения 1 следует, что для доказательства теоремы в данном случае достаточно показать, что является дикой задача описания с точностью до обобщенной эквивалентности точных Z_p-представлений группы $H_0 = \langle a, b\rangle$, $p\,a = 0$, $p\,b = 0$.

Нетрудно проверить, что точным Z_p-представлением группы H_0 является представление вида

$$\Gamma(A,B):\ a \to \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}^{(3n)} & \Lambda(A,B) \\ 0 & E_{(2q+1)n} \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_3 \\ 0 & \Lambda_2 \end{pmatrix},$$

где

$$\Lambda(A,B) = \begin{pmatrix} E_{qn} & 0 & \langle A\rangle \\ E_{qn} & 0 & \langle E_n\rangle \\ E_{qn} & 0 & \langle B\rangle \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & \left(\tilde{\varepsilon}^2\right)^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & E_{qn} \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_2 = \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}^{(n)} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\varepsilon}^{(n)} & 0 \\ 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \langle A\rangle \\ \tilde{\varepsilon}^{(n)} & 0 & \langle \lambda A\rangle \\ -E_{qn} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$q = p-1$; ε — первообразный корень степени p из 1; $\lambda = 1+\varepsilon$; A, B — произвольные необратимые Z_p-матрицы порядка n.

Предположим, что для некоторых необратимых Z_p-матриц A, B, A', B' представления $\Gamma(A,B)$ и $\Gamma(A',B')$ обобщенно эквивалентны. Тогда существуют такие $C \in GL((5q+1)n, \mathbf{Z}_p)$ и $\psi \in \operatorname{Aut} H_0$ ($\psi: a \to ia + jb,\ b \to ka + lb$), что

$$C\Gamma(A,B)_g = \Gamma(A',B')_{\psi(g)}C, \qquad g \in H_0. \tag{8}$$

Обозначим через $tr(L)$ след произвольной квадратной Z_p-матрицы L. Тогда

$$tr(\Gamma(A',B')_{ia+jb}) = n((\sigma_{i+j} + \sigma_{i+2j} + \sigma_i + 2\sigma_j)q + 1),$$

где

$$\sigma_r = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad r \equiv 0 \pmod p, \\ 0, & \text{если} \quad r \not\equiv 0 \pmod p. \end{cases}$$

Отсюда и из (8) получим $(\sigma_{i+j} + \sigma_{i+2j} + \sigma_i + 2\sigma_j)q + 1 = 2q+1$. Следовательно, $j \equiv 0 \pmod p$ и $i \not\equiv 0 \pmod p$, $l \not\equiv 0 \pmod p$. Теперь на основании (8) и необратимости матриц A, B, A', B', используя [10], можно показать, что представление $\Gamma': a \to \Gamma(A',B')_{ia}$, $b \to \Gamma(A',B')_{ka+lb}$ Z_p-эквивалентно представлению

$$\Gamma''(A'',B''):\ a \to \begin{pmatrix} \tilde{\varepsilon}^{(3n)} & \Lambda(A'',B'') \\ 0 & E_{(2q+1)n} \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_3' \\ 0 & \Lambda_2^l \end{pmatrix},$$

где A, B — некоторые необратимые Z_p-матрицы порядка n и Λ_3' — некоторая Z_p-матрица. Следовательно, существует такая матрица $C' \in GL((5q+1)n, \mathbf{Z}_p)$, что $\Gamma(A,B)_a C' = C'\Gamma''(A'',B'')_a$, $\Gamma(A,B)_b C' = C'\Gamma''(A'',B'')_b$. Отсюда

$$C' = \begin{pmatrix} \Theta & C_0' \\ 0 & S \end{pmatrix},$$

где

$$\Theta = \begin{pmatrix} \tilde{\Theta}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{\Theta}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\Theta}_3 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & 0 \\ S_3 & S_4 & 0 \\ 0 & 0 & S_5 \end{pmatrix}, \quad C_0' = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_4 & C_5 & C_6 \\ C_7 & C_8 & C_9 \end{pmatrix},$$

$\Theta_i \in GL(n, \mathbf{Z}_p[\varepsilon])$, $i = 1, 2, 3$, $\tilde{\Lambda} = \left\| \tilde{\lambda}_{ij} \right\|$, $\Lambda = \left\| \lambda_{ij} \right\|$ и выполняются следующие соотношения:

$$\tilde{\varepsilon}^{(n)} C_1 + S_1 = \tilde{\Theta}_1 + C_1, \qquad \tilde{\varepsilon}^{(n)} C_3 + \langle A \rangle S_5 = \tilde{\Theta}_1 \langle A'' \rangle + C_3,$$

$$\tilde{\varepsilon}^{(n)} C_4 + S_1 = \tilde{\Theta}_2 + C_4, \qquad \tilde{\varepsilon}^{(n)} C_6 + \langle E_n \rangle S_5 = \tilde{\Theta}_2 \langle E_n \rangle + C_6,$$

$$\tilde{\varepsilon}^{(n)} C_7 + S_1 = \tilde{\Theta}_3 + C_7, \qquad \tilde{\varepsilon}^{(n)} C_9 + \langle B \rangle S_5 = \tilde{\Theta}_3 \langle B'' \rangle + C_9.$$

Отсюда $A \equiv \Theta_1 A'' \Theta_1^{-1} \pmod V$, $B \equiv \Theta_1 B'' \Theta_1^{-1} \pmod V$, где $V = (\varepsilon - 1)\,\mathbf{Z}_p[\varepsilon]$. Очевидно, задача описания с точностью до подобия пар необратимых матриц над полем из p элементов является дикой.

Рассмотрим случай, когда H — нециклическая 2-группа порядка $|H| > 4$. Хорошо известно, что тогда существует нормальная подгруппа N группы H, для которой фактор-группа H/N изоморфна одной из следующих групп:

$$D_8 = \langle a, b \mid 4a = 2b = 0,\ -b + a + b = -a \rangle,$$

$$Q_8 = \langle a, b \mid 4a = 0,\ 2b = 2a,\ -b + a + b = -a \rangle,$$

$$H_1 = \langle a, b \mid 4a = 2b = 0,\ -b + a + b = a \rangle,$$

$$H_2 = \langle a_i \mid 2a_i = 0,\ a_i + a_j = a_j + a_i;\ i, j = 1, 2, 3 \rangle.$$

Поэтому аналогично предыдущему случаю достаточно показать, что является дикой задача описания с точностью до обобщенной эквивалентности всех точных Z_2-представлений каждой из групп D_8, Q_8, H_1, H_2.

Рассмотрим Z_2-представление $\Gamma(A, B)$ группы D_8 вида

$$\Gamma(A, B)\colon\ a \to \begin{pmatrix} \tilde{i}^{(n)} & 0 & \Lambda(A) \\ 0 & \Lambda_1 & E_{2n} \\ 0 & 0 & -\Lambda_1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} F^{(n)} & 0 & \Lambda'(A) \\ 0 & \Lambda_1 & \Lambda''(B) \\ 0 & 0 & \Lambda_1 \end{pmatrix},$$

где i — первообразный корень степени 4 из 1,

$$\Lambda(A) = \left(\langle E_n \rangle \langle A \rangle \right), \quad \Lambda'(A) = \left(S^{(n)}\ S_1 \otimes (-A) \right),$$

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & -E_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda''(B) = \begin{pmatrix} 0 & B \\ E_n & 0 \end{pmatrix},$$

$A,\ B$ — произвольные $\mathbf{Z}_2$-матрицы порядка n.

Очевидно, $\Gamma(A,B)$ — точное $\mathbf{Z}_2$-представление группы D_8. Покажем, что является дикой задача описания с точностью до обобщенной эквивалентности представлений $\Gamma(A,B)$ группы D_8, где матрицы $A,\ B$ пробегают множество Ω_n всех необратимых $\mathbf{Z}_2$-матриц C порядка $n = 4n_1,\ n_1 \in \mathbf{N}$, таких, что матрица $C + E_n$ необратима.

Предположим, что для некоторых матриц $A, B, A', B' \in \Omega_n$ представления $\Gamma(A,B)$ и $\Gamma(A', B')$ обобщенно эквивалентны, т. е. существуют такие $C \in GL(6n, \mathbf{Z}_2)$ и $\psi \in \operatorname{Aut} D_8$ ($\psi :\ a \to ja,\ b \to la + b$), что

$$\Gamma(A,B)_g C = C\Gamma(A',B')_{\psi(g)}, \quad g \in D_8. \tag{10}$$

Поскольку $B' \in \Omega_n$, то из (10) следует, что $l \equiv 0 \pmod 2$. Учитывая последнее, можно показать, что представление $\Gamma' :\ g \to \Gamma(A',B')_{\psi(g)}$ $\mathbf{Z}_2$-эквивалентно представлению

$$\Gamma''(A'',B'') :\ a \to \begin{pmatrix} \tilde{i}^{(n)} & 0 & \Lambda(A'') \\ 0 & \Lambda_1 & E_{2n} \\ 0 & 0 & -\Lambda_1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} F^{(n)} & 0 & \Lambda_2 \\ 0 & \Lambda_1 & \Lambda''(B'') \\ 0 & 0 & \Lambda_1 \end{pmatrix}$$

для некоторых матриц A'', B'' из Ω_n и некоторой $\mathbf{Z}_2$-матрицы Λ_2. Следовательно, из (10) вытекает существование обратимой матрицы C' такой, что $\Gamma(A,B)_a C' = C'\Gamma''(A'',B'')_a$, $\Gamma(A,B)_b C' = C'\Gamma''(A'',B'')_b$. Отсюда получаем

$$C' = \begin{pmatrix} \tilde{\Theta} & 0 & 0 & S_{14} & S_{15} \\ 0 & S_{22} & 0 & S_{24} & S_{25} \\ 0 & 0 & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} \end{pmatrix},$$

где $\Theta \in GL(n, \mathbf{Z}_2[i])$ и выполняются соотношения

$$\tilde{i}^{(n)} S_{14} + \langle E_n \rangle S_{44} = \tilde{\Theta}\langle E_n \rangle - S_{14}, \qquad S_{24} + S_{44} = S_{22} - S_{24},$$

$$\tilde{i}^{(n)} S_{15} + \langle A \rangle S_{55} = \tilde{\Theta}\langle A'' \rangle + S_{15}, \qquad S_{25} + B S_{55} = S_{22} B'' - S_{25},$$

$$-S_{35} + S_{55} = S_{33} + S_{35}, \qquad -S_{34} + S_{44} = S_{33} - S_{34}.$$

Следовательно, $A \equiv \Theta A'' \Theta^{-1} \pmod V$, $B \equiv \Theta B'' \Theta^{-1} \pmod V$, где $V = (i - 1)\,\mathbf{Z}_2[i]$. Задача же описания с точностью до подобия пар матриц из множества Ω_n является дикой [16, с. 48].

Аналогично предыдущему случаю можно доказать, что является дикой задача описания всех обобщенно неэквивалентных точных $\mathbf{Z}_2$-представлений групп H_1, Q_8. Для этого достаточно рассмотреть $\boldsymbol{Z}_2$-представления $\Gamma(A,B)$, $\Gamma'(A',B')$ соответственно групп H_1, Q_8 вида

$$\Gamma(A,B):\ a \to \begin{pmatrix} \tilde{i}^{(2n)} & 0 & \Phi & 0 \\ 0 & \Lambda_n & E_{2n} & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} E_{2n} & 0 & \Phi' & 0 \\ 0 & \Lambda_n & \Upsilon_n(E_n) & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix},$$

$$\Gamma'(A',B'):\ a \to \begin{pmatrix} \tilde{i}^{(2n')} & 0 & \Psi & 0 \\ 0 & \Lambda_{n'} & E_{2n'} & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda_{n'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_{n'} \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} F' & 0 & \Psi' & 0 \\ 0 & \Lambda_{n'} & \Upsilon_{n'}(B') & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{n'} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -E_{n'} \end{pmatrix},$$

где n — произвольное натуральное число, $n'=4n_1$, $n_1\in\mathbf{N}$,

$$\Lambda_r = \begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_r \end{pmatrix}, \quad F' = \begin{pmatrix} 0 & -F^{(n')} \\ F^{(n')} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon_r(X) = \begin{pmatrix} 0 & X \\ E_r & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \langle A\rangle & \langle E_n\rangle \\ \langle E_n\rangle & \langle B\rangle \end{pmatrix}, \quad \Phi' = \begin{pmatrix} 0 & (-S-S_1)^{(n)} \\ (S-S_1)^{(n)} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \langle E_{n'}\rangle & \langle -A'\rangle \\ \langle -E_{n'}\rangle & \langle -A'\rangle \end{pmatrix}, \quad \Psi' = \begin{pmatrix} S^{(n')} & S_1\otimes A' \\ S_1^{(n')} & S_1\otimes A' \end{pmatrix},$$

A, B — произвольные $\boldsymbol{Z}_2$-матрицы порядка n, а A, B — $\boldsymbol{Z}_2$-матрицы, принадлежащие множеству $\Omega_{n'}$ (см. обозначения (9)).

Наконец рассмотрим случай группы H_2. Можно показать, используя [16, с. 48], что является дикой задача описания с точностью до обобщенной эквивалентности всех $\boldsymbol{Z}_2$-представлений $\Gamma(A,B)$ группы H_2 вида

$$\Gamma(A,B):\ a_1 \to \begin{pmatrix} \Lambda_1' & \Lambda_1 \\ 0 & \Lambda_2' \end{pmatrix}, \quad a_2 \to \begin{pmatrix} \Lambda_1' & \Lambda_2 \\ 0 & -\Lambda_2' \end{pmatrix}, \quad a_3 \to \begin{pmatrix} \Lambda_3' & \Lambda_3 \\ 0 & \Lambda_3' \end{pmatrix},$$

где

$$\Lambda_1' = \begin{pmatrix} E_n & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2' = \begin{pmatrix} -E_n & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3' = \begin{pmatrix} -E_n & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & -E_n \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ E_n & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & E_n & 0 \\ 0 & B & 0 \\ E_n & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 & -E_n & 0 \\ E_n & 0 & 0 \\ 0 & E_n & 0 \end{pmatrix},$$

$n=5n_1$, $n_1\in\mathbf{N}$, A, B — $\boldsymbol{Z}_2$-матрицы порядка n такие, что матрицы B, $B+E_n$

$(A^T + E_n,\ B^T + E_n)$, по модулю 2 имеют ранг меньше n (C^T — матрица, транспонированная к матрице C). Теорема доказана.

1. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.
2. *Курош А. Г.* Теория групп. – М.: Наука, 1967. – 648 с.
3. *Robinson D. J. S.* Finitness conditions and generalized soluble groups. – Berlin: Springer, 1972. – 464 p.
4. *Kegel O., Wehrfritz B. A.* Locally finite groups. – Amsterdam: North Holland Publ. Co., 1973. – 210 p.
5. *Hartley B.* A dual approach to Černikov modules // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1977. – P. 215 – 239.
6. *Гудивок П. М., Дроботенко В. С.* Про циклічні розширення повних абелевих груп // Допов. АН УРСР. Сер. А. – 1966. – № 10. – С. 1239 – 1242.
7. *Гудивок П. М., Ващук Ф. Г., Дроботенко В. С.* Черниковские p-группы и целочисленные p-адические представления конечных групп // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 6. – С. 742 – 753.
8. *Ройтер А. В.* О представлениях группы четвертого порядка целочисленными матрицами // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1960. – № 19. – С. 65 – 74.
9. *Берман С. Д., Гудивок П. М.* О целочисленных представлениях конечных групп // Докл. АН СССР. – 1962. – **145**, № 6. – С. 1199 – 1201.
10. *Берман С. Д., Гудивок П. М.* Неразложимые представления конечных групп над кольцом целых p-адических чисел // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1964. – **28**, № 4. – С. 875 – 910.
11. *Heller A., Reiner I.* Representations of cyclic groups in rings of integers // Ann. Math. – 1962. – **76**. – P. 73 – 92; – 1963. – **77**. – P. 318 – 328.
12. *Гудивок П. М.* О представлениях конечных групп над полным дискретно нормированным кольцом // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1978. – **148**. – С. 96 – 105.
13. *Гудивок П. М., Шапочка И. В.* О расширениях абелевых p-групп // Допов. НАН України. – 1995. – № 2. – С. 8 – 9.
14. *Холл М.* Теория групп. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 468 с.
15. *Маклейн С.* Гомология. – М.: Мир, 1966. – 543 с.
16. *Гудивок П. М.* Целочисленные представления конечных групп. – Ужгород: Ужгород. ун-т, 1978. – 82 с.

Получено 20.12.96