УДК 517.53

Н. В. Заболоцкий

Сферическая производная и пикаровские множества целых функций

Пусть $f(z)$ = целая функция, $\rho(f(z)) = |f'(z)|(|f(z)|^2 + 1)^{-1}$ — сферическая производная функции f, $\mu(r, f) = \max\{\rho(f(z)) : |z| = r\}$. По аналогии с [1], дадим следующее определение.

Определение. *Множество $E \subset \mathbb{C}$ назовем пикаровским для класса целых функций B, если каждая функция $f \in B$ принимает произвольное значение из $\mathbb{C}$, за исключением возможно одного, бесконечное число раз в $\mathbb{C} \setminus E$.*

Пусть H — класс целых трансцендентных функций, $H(\varphi)$ — подкласс функций f класса H таких, что $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \mu(r, f)/\varphi(r) = \infty$, где $\varphi(r)$ — неотрицательная, кусочно-непрерывная функция на $[r_0, \infty)$, $r_0 > 0$, удовлетворяющая условию

$$1/r = o(\varphi(r)),\ r \to \infty. \tag{1}$$

Заметим, что если $\varphi(r) \leqslant \ln r/r$, $r \geqslant r_1$, то $H \equiv H(\varphi)$, т. е. для целых трансцендентных функций выполняется соотношение [2, с. 122—123]: $\varlimsup_{r\to\infty} (\mu(r, f) \times r(\ln r)^{-1}) = \infty$.

Теорема 1. *Пусть $E = \{a_n\}$ — последовательность чисел из $\mathbb{C}$ с точкой сгущения на бесконечности. Если*

$$\begin{gathered}(\exists \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant n_0)\\ [\{z : 0 < |z - a_n| < \varepsilon/\varphi(|a_n|)\} \cap E = \varnothing],\end{gathered} \tag{2}$$

то множество E является пикаровским для класса функций $H(\varphi)$.

Положив $\varphi(r) = \ln r/r$ в теореме 1 и заметив, что $H \equiv H(\ln r/r)$, получим теорему Топпилы [3].

Пусть $\varphi(r) = r^{m-1}$. Для функции $g(z) = \exp(iz^m)$, $m \in \mathbb{N}$, имеем $\mu(r, g) = 0{,}5mr^{m-1} = 0{,}5m\varphi(r)$, 1-точки функции g равны $|a_n^{(k)}| = (2\pi n)^{1/m} \times \exp(\pi ki/m)$, $k = 0, 1, \ldots, 2m-1$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Обозначим через E_1 множество единичных точек функции g. Тогда для $k \neq k'$ имеем $|a_n^{(k)} - a_n^{(k')}| \geqslant C_1 |a_n^{(k)}|$, для $n \neq l$ и любых k и k' выполняется $|a_n^{(k)} - a_l^{(k')}| \geqslant (n+1)^{1/m} - n^{1/m} \geqslant \frac{1}{m} n^{1/m-1} \geqslant C_2 |a_n^{(k)}|^{1-m}$, где C_1, C_2 — некоторые положительные постоянные. Таким образом, найдется $\varepsilon > 0$ такое, что $\{z: 0 < |z - a_n^{(k)}| < \varepsilon/\varphi(|a_n^{(k)}|)\} \cap E_1 = \varnothing$.

Множество E_1 не является пикаровским для функции g, которая не имеет ни нулей, ни 1-точек в $\mathbb{C} \setminus E_1$. Этот пример показывает, что утверждение теоремы 1 неулучшаемо, т. е. множество E_1, которое удовлетворяет условиям теоремы 1 с $\varphi(r) = r^{m-1}$, $m \in \mathbb{N}$, не является пикаровским для целой функции g, для которой выполняется $\mu(r, g)/\varphi(r) = m/2 < \infty$.

Доказательство теоремы 1. Пусть множество E удовлетворяет условиям теоремы 1. Предположим, что теорема не верна, т. е. существует функция $f \in H(\varphi)$, которая принимает только конечное число раз значения нуль и единица вне множества E. Учитывая определение класса $H(\varphi)$, имеем последовательность точек (z_n), $z_n \to \infty$, $n \to \infty$, для которой выполняется $\rho(f(z_n))/\varphi(|z_n|) \to +\infty$, $n \to +\infty$, где $(\varphi(r))^{-1} = o(r)$, $r \to \infty$. Тогда из теоремы Лехто [4] следует, что на объединении любой подпоследовательности последовательности кругов $C(z_n, r_n) = \{z : |z - z_n| < r_n\}$, $r_n = (\varepsilon/16) \times (\varphi(|z_n|))^{-1}$, где $\varepsilon > 0$ такое, как в (2), функция f принимает каждое значение из $\mathbb{C}$, за исключением возможно одного, бесконечное число раз. Выберем $|z_n|$ настолько великим, чтобы в $C(z_n, r_n) \setminus E$ не было нулей и единиц f. Тогда существует n' такое, что для всех $n \geqslant n'$ в $C(z_n, r_n)$ функция f принимает не менее одного нуля или одной 1-точки. Как следует из (2), круги $C(z_n, 4r_n)$ содержат не более одной точки из E при $n \geqslant n''$. Пусть $n > \max\{n', n''\}$.

Предположим, что $C(z_n, r_n)$ содержит 1-точку функции f. Учитывая, что $C(z\ , 4r_n)$ содержит не более одной точки из E, получаем, что f не имеет нулей в $C(z_n, 4r_n)$. Из принципа максимума для аналитической функции $1/f$ следует, что существует точка $\xi_n \in \{z : |z - z_n| = 2r_n\}$ такая, что $|f(\xi_n)| \leqslant 1$. Учитывая, что целая функция f не принимает ни нулей, ни 1-точек в кольце $\{z : r_n < |z - z_n| < 4r_n\}$, из теоремы Шоттки получаем $|f(z)| < M$ на окружности $\{z : |z - z_n| = 2r_n\}$, где M — абсолютная константа (см., например, [5]). Тогда $|f(z)| < M$ в $C(z_n, r_n)$.

Если $C(z_n, r_n)$ содержит нуль функции f, то рассмотрим функцию $1 - f(z)$. Тогда $|f(z)| < M + 1$ в $C(z_n, r_n)$, $n > \max\{n', n''\}$. Это противоречит тому, что для функции f выполняется теорема Пикара на объединении кругов $C(z_n, r_n)$. Теорема 1 доказана.

Классы целых функций естественно задавать ограничениями на рост $M(r, f)$ максимума модуля функции f в круге радиуса r. Следующая теорема устанавливает связь между $\mu(r, f)$ и $M(r, f)$ целой функции f.

Всюду в дальнейшем под ψ' будем понимать левостороннюю производную функции ψ.

Теорема 2. *Пусть $\Phi(r)$ — выпуклая относительно логарифма на $[1, \infty)$ функция, удовлетворяющая для достаточно больших r условиям:*

1) $r\Phi'(r)/\Phi(r) \geqslant q > 0$, $q \in \mathbb{R}$;

2) $(\exists C > 1) \max\{\Phi'(t) : r \leqslant t \leqslant r + 4\Phi(r)/\Phi'(r)\} \leqslant C\Phi'(r)$. *Если для всех больших r $\mu(r, f) \leqslant \Phi'(r)$, то $\ln M(r, f) \leqslant AC\Phi(r)$, где $A = 80 \ln 2$.*

Положив $\Phi(r) = r^{\sigma+1}/(\sigma+1)$, $\sigma > -1$, в теореме 2, получим теорему Хеймана и Клуни [2] (теорема 3).

Сначала докажем лемму.

Лемма. *Пусть α и β — непрерывные, положительные, возрастающие, кусочно-дифференцируемые функции на $[1, +\infty)$, $\beta(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Если $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, \alpha(r)/\beta(r) > K > 0$, то для произвольного числа ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует последовательность (r_k), $r_k \to \infty$, $k \to \infty$, такая, что*

$$\alpha(r_k)/\beta(r_k) \geqslant K, \tag{3}$$

$$\alpha'(r_k)/\alpha(r_k) \geqslant (1-\varepsilon)\beta'(r_k)/\beta(r_k). \tag{4}$$

Доказательство. Функция $\alpha(r)(\beta(r))^{\varepsilon-1}$, $0 < \varepsilon < 1$, является неограниченной при $r \to \infty$. Поэтому существуют сколь угодно большие значения r, для которых выполняется

$$\left(\frac{\alpha(r)}{(\beta(r))^{1-\varepsilon}}\right)' = \frac{\alpha(r)}{(\beta(r))^{1-\varepsilon}}\left[\frac{\alpha'(r)}{\alpha(r)} - \frac{(1-\varepsilon)\beta'(r)}{\beta(r)}\right] > 0.$$

Отсюда $\alpha'(r)/\alpha(r) \geqslant (1-\varepsilon)\beta'(r)/\beta(r)$.

Если для всех $r \geqslant r_0$ выполняется $\alpha(r) \geqslant K\beta(r)$, то получаем нужный результат. Если существуют как угодно большие значения r, для которых $\alpha(r) < K\beta(r)$, то обозначим $R = \min\{t \geqslant r : \alpha(t) = K\beta(t)\}$. Тогда $\alpha'(R)/\alpha(R) \geqslant \beta'(R)/\beta(R)$ и $\alpha(R) = K\beta(R)$.

Доказательство теоремы 2. Предположим, что теорема не верна, т. е.

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M(r, f)}{\Phi(r)} > C_1,$$

где C_1 — произвольная постоянная, $C_1 > AC$. Пусть $r = r_k$ — последовательность из леммы с $\alpha(r) = \ln M(r, f)$, $\beta(r) = \Phi(r)$, $K = C_1$, $\varepsilon = 1/2$. Пусть точка $z_0 = re^{i\varphi}$ такая, что $|f(z_0)| = M(r, f)$. Тогда (см., например [6]) $|f'(z_0)/f(z_0)| = (\ln M(r, f))'$.

Обозначим через $D(z_0, \delta(r)) = \{z : |z - z_0| < \delta(r)\}$ круг, в котором $|f(z)| \geqslant 1$. По лемме 1 из [2] существует точка $z' \in D(z_0, \delta(r))$ такая, что

$$\rho(f(z')) \geqslant \frac{\ln M(r, f)}{10 \ln 2\delta(r)} = \frac{8 \ln M(r, f)}{A\delta(r)}, \tag{5}$$

и

$$\delta(r) \leqslant 2 \ln M(r, f)/(\ln M(r, f))'. \tag{6}$$

Учитывая (3) и (4), из неравенств (5) и (6) получаем

$$\mu(R, f) \geqslant \frac{8C_1\Phi(r)}{A \cdot 4 \cdot \Phi(r)/\Phi'(r)} > 2C\Phi'(r), \tag{7}$$

где $r - 4\Phi(r)/\Phi'(r) \leqslant |z'| = R \leqslant r + 4\Phi(r)/\Phi'(r)$.

Если $R \geqslant r$, то, учитывая свойство 2 функции $\Phi(r)$, из (7) имеем

$$\mu(R, f) > 2C\Phi'(r) \geqslant 2\Phi'(R). \tag{8}$$

Пусть $R < r$. Предположим, что

$$r\Phi'(r)/\Phi(r) \geqslant 8. \tag{9}$$

Учитывая, что функция $\Phi(r)$ выпуклая относительно логарифма, т. е. $r\Phi'(r)$ — неубывающая функция, из (7) получаем

$$\mu(R, f) \geqslant 2C \frac{\Phi'(r) r}{r} \geqslant 2C \frac{\Phi(R) R}{r} \geqslant 2C\Phi'(R)\left(1 - 4\frac{\Phi(r)}{\Phi'(r) r}\right) \geqslant C\Phi'(R). \tag{10}$$

Если множество значений r, для которых выполняется (9), неограничено, то из (8) и (10) имеем $(R \geqslant r/2 \to \infty)$ $\mu(R, f) \geqslant \min\{2, C\}\Phi'(R)$, что противоречит условию теоремы.

Предположим, что множества тех значений r, для которых или $R \geqslant r$, или $R < r$ и выполняется условие (9), являются ограниченными. Тогда множество $\{r : 8 > r\Phi'(r)/\Phi(r) \geqslant q > 0\}$ неограничено.

Рассмотрим функцию $F(z) = f(z^n)$, где $n \in \mathbb{N}$, выбрано так, чтобы $n \times \times q \geqslant 8$. Учитывая, что для больших значений r выполняется $\mu(r, f) \leqslant \Phi'(r)$, имеем

$$\rho(F(z)) = \frac{nr^{n-1}|f'(z^n)|}{1 + |f(z^n)|^2} = nr^{n-1}\rho(f(z^n)) < nr^{n-1}\Phi'_{r^n}(r^n) = \tilde{\Phi}'(r), \tag{11}$$

где $\tilde{\Phi}(r) = \Phi(r^n)$.

Так как для функции $\tilde{\Phi}(r)$ выполняется

$$\frac{\tilde{\Phi}'(r) r}{\tilde{\Phi}(r)} = \frac{\Phi'_r(r^n) r}{\Phi(r^n)} = \frac{\Phi'_{r^n}(r^n) r^n n'}{\Phi(r^n)} \geqslant qn \geqslant 8,$$

то с учетом (11) имеем $\ln M(r, F) \leqslant AC\tilde{\Phi}(r) = AC\Phi(r^n)$. Учитывая, что для всех r выполняется соотношение $\ln M(r, F) = \ln M(r^n, f)$, получаем $\ln M(t, f) \leqslant AC\Phi(t)$ для $t \geqslant t_0$.

Теорема 2 полностью доказана.

1. *Lehto O.* A generalization of Picard's theorem//Ark. mat.—1958.— **3**.— P.—495—500.
2. *Clunie J., Hayman W.* The spherical derivative of integral and meromorphic functions / Comment. math. helv.— 1966.— **40**.— P. 117—148.
3. *Toppila S.* Some remarks on the value distribution of meromorphic functions // Ark. mat.— 1971.— **9**.— P. 1—9.
4. *Lehto O.* The spherical derivative of functions meromorphic in the neighbourhood of an isolated singularity // Comment. math. helv.—1959.— **33**.— P. 196—205.
5. *Baker J., Liverpool L.* Picards sets of entire functions // Math. Z.— 1972.— **126**.— P. 230—238.
6. *Macintyre A.* Wiman's method and the «flat regions» of integral functions // Quart. J. Math. —1938.— **9**.— P. 81—88.

Львов. ун-т Получено 25.06.86