УДК 517.9

В. А. Добрынский

О динамике систем с кооперативным эффектом

Допустим изучается некоторая динамическая система, состоящая из достаточно большого числа N одинаковых компонент x_i, $i = \overline{1, N}$, так что проследить, как взаимодействуют между собой составляющие ее элементы, не представляется возможным. Известно только, что динамика кооперативной переменной $\hat{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i$ описывается дифференциальным уравнением

$$d\hat{x}/dt = \Phi(\hat{x}) \tag{1}$$

и $\Phi(0) = 0$. Необходимо выяснить структуру взаимодействия между компонентами x_i. Очевидно, что, не используя дополнительные соображения относительно природы взаимодействия между компонентами, нельзя решить данную задачу. Но если априори предположить, что взаимодействие между x_i линейно и однородно на всех уровнях (т. е. при одновременном участии двух, трех, четырех и более элементов), то восстановить указанную структуру нетрудно. При этом однако появляется необходимость расширить класс билинейных динамических систем А. М. Молчанова [1] до полилинейных систем.

Определение. *Динамическая система*

$$dx_i/dt = a_1(x_i) + \sum_{j=1}^{N} a_2(x_i, x_j) + \ldots + \sum_{k=1}^{N} \ldots \sum_{j=1}^{N} a_M(x_i, x_j, \ldots, x_k) \qquad (2)$$

называется полилинейной, если функции $a_1(x_i)$, $a_2(x_i, x_j)$, ..., $a_M(x_i, x_j, \ldots, x_k)$ линейны по всем своим аргументам и одни и те же для любого набо-ра входящих в них переменных.

Определение. *Полилинейная функция $a_m(x_i, x_j, \ldots, x_l$ называется типичной, если неравенство нулю коэффициента при некото-ром члене p-го ($1 \leqslant p \leqslant m$) порядка линейности влечет за собой отличие от нуля суммы всех коэффициентов, стоящих при членах данного порядка ли-нейности.*

Определение. *Динамическая система, в правой части которо стоят типичные полилинейные функции, называется типичной полилине ной системой.*

Очевидно, что нетипичные полилинейные динамические системы об разуют в пространстве всех полилинейных систем нигде не плотное мно жество типа F_σ. Действительно, с одной стороны, каждое соотношение н коэффициенты (типа $\sum_j \alpha_j^{(p)} = 0$, где $\alpha_j^{(p)}$ — коэффициенты при p-го по рядка линейности членах) выделяет в пространстве всех полилинейных си стем замкнутое подпространство коразмерности не меньше 1. С друго стороны, у таких систем сумма коэффициентов при p-го порядка линейност членах равна 0, так что никакой набор такого сорта систем не в состояни подходящим образом аппроксимировать полилинейную систему, у которо сумма коэффициентов при p-го порядка линейности членах не равна 0

Объявленная линейность функций a_m, $m = \overline{1, M}$, позволяет преобра зовать (2) к виду

$$dx_i/dt = a_1(x_i) + a_2(x_i, \hat{x}) + \ldots + a_M(x_i, \hat{x}, \ldots, \hat{x}). \qquad (3)$$

из которого отчетливо видно, что на развитие эволюции каждого элемент динамической системы влияет не разрозненный набор значений други компонент, а только одна величина — значение кооперативной перемен ной $\hat{x}$.

Суммируя по i, получаем уравнение, описывающее динамику коопе ративной переменной

$$d\hat{x}/dt = a_1(\hat{x}) + a_2(\hat{x}, \hat{x}) + \ldots + a_M(\hat{x}, \hat{x}, \ldots, \hat{x}). \qquad (4)$$

Если считать, что на практике осуществляются только движения представленные типичными полилинейными системами, то полагая $a_m(\hat{x}, \ldots$ $\ldots, x) = \left.\frac{d^m\Phi}{(d\hat{x})^m}\right|_0 \hat{x}^m$ и выбирая $M \leqslant N$ столь большим, сколько это необ ходимо для достаточно точной аппроксимации $\Phi(\hat{x})$ отрезком ряда Макло рена длины M, мы тем самым полностью решаем задачу выявления внут ренней структуры взаимодействия между компонентами x_i. Действительно нет никаких оснований полагать, что форма зависимости полилинейны функций $a_m(x_i, x_j \ldots, x_k)$ отлична от суммы произведений $\frac{1}{m!}\left.\frac{d^m\Phi}{(d\hat{x})^m}\right|_0 x_i x_j \ldots$ $\ldots x_k$, где $x_i, x_j, \ldots, x_k \in \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$, поскольку полилинейная функци $a_m(x_i, x_j, \ldots, x_k)$ только тогда может обращаться в член $\left.\frac{d^m\Phi}{(d\hat{x})^m}\right|_0 \hat{x}^m \frac{1}{m!}$, не совпадая с указанной выше суммой, когда сумма коэффициентов при чле нах некоторого p-го ($p > m$) порядка линейности равна 0, а сами коэффи циенты при этом отличны от нуля, т. е. для нетипичных полилинейны динамических систем.

Зная динамику кооперативной переменной $\hat{x}$, нетрудно вычислить поведение каждого элемента, воссоздать фазовый портрет динамической системы и определить точки бифуркации его при изменении параметров, задающих взаимодействие.

Изложенный выше подход к выявлению гипотетической внутренней структуры взаимодействия между составляющими динамическую систему элементами иногда может быть применен и к системам, компоненты которых имеют разную природу и по-разному взаимодействуют между собой. Продемонстрируем это на простейшем примере динамической системы Вольтерра, компоненты которой образуют два отличных друг от друга подмножества однородных элементов. Элементы одного подмножества мы обозначим x_i, $i = \overline{1, N}$, а другого — y_j, $j = \overline{1, L}$. Числа N и L по-прежнему считаются достаточно большими и известен закон, определяющий эволюцию кооперативных переменных $\hat{x} = \sum_{i=1}^{N} x_i$ и $\hat{y} = \sum_{j=1}^{L} y_j$:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}} &= A\hat{x} + a\hat{x}\hat{y}, \\ \dot{\hat{y}} &= B\hat{y} + b\hat{x}\hat{y}. \end{aligned} \tag{5}$$

Если, как и раньше, предполагать линейность и однородность взаимодействия между компонентами динамической системы, то для описания такого рода взаимодействия можно употребить полилинейные системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= Ax_i + \sum_{k=1}^{L} ax_iy_k, \quad i = \overline{1, N}, \\ \dot{y}_j &= By_j + \sum_{k=1}^{N} bx_ky_j, \quad j = \overline{1, L}. \end{aligned} \tag{6}$$

В данном конкретном случае класс используемых полилинейных систем совпадает с классом билинейных. Указанный факт — прямое следствие вида правой части системы уравнений Вольтерра.

1. *Молчанов А. М.* Билинейные системы // Вероятностные методы в биологии.— Киев : Ин-т математики АН УССР, 1985.— С. 81—92.

Ин-т гидробиологии АН УССР, Киев Получено 14.11.86