УДК 517.5

В. А. Андриенко

О скорости сходимости кратных ортогональных рядов

Приведены оценки скорости сходимости почти всюду по Прингсхейму кратных ортогональных рядов из L^2 при заданной скорости убывания коэффициентов этих рядов, окончательные на классе всех ортогональных систем.

Наведені оцінки швидкості збіжності майже всюди за Прингсхеймом кратних ортогональних рядів із L^2 при заданій швидкості спадання коефіцієнтів цих рядів, остаточні на класі всіх ортогональних систем.

1. Введение. Пусть $Z_+^2 = \{n = (n_1, n_2)\}$ — множество точек плоскости с неотрицательными целыми координатами, $\varphi = \{\varphi_n(x) : n \in Z_+^2\}$ — двойная ортонормированная система на $X = [0, 1]^2$, Φ — множество всех таких систем, $\{a_n : n \in Z_+^2\}$ — двойная последовательность действительных чисел, для которой $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n^2 = \sum\limits_{n_1, n_2 = 0}^{\infty} a_{n_1 n_2}^2 < \infty$. Рассмотрим двойной ортогональный ряд

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n \varphi_n(x) = \sum_{n_1, n_2 = 0}^{\infty} a_{n_1 n_2} \varphi_{n_1 n_2}(x), \tag{1}$$

определяющий по теореме Риса — Фишера функцию $f(x) \in L^2 = L^2(X)$, к которой сходятся (по Прингсхейму) в метрике L^2 его прямоугольные частные суммы

$$s_n(x; f) = s_n(x) = s_{n_1 n_2}(x) = \sum_{k \leqslant n} a_k \varphi_k(x), \quad n, k \in Z_+^2, \tag{2}$$

где неравенство $k \leqslant n$ означает $k_i \leqslant n_i$, $i = 1, 2$.

Обобщенная теорема Меньшова — Радемахера [1—3] дает достаточное условие сходимости (и, более того, регулярной сходимости) почти всюду (п. в.) последовательности (2) к функции $f(x)$ по любой системе $\varphi \in \Phi$ (о сходимости и регулярной сходимости см., например, [4, с. 5-6]). Мориц получил частный результат о скорости сходимости п. в. последовательности (2), естественно дополняющий обобщенную теорему Меньшова — Радемахера (см. [5], теорема 1). В настоящей статье приведены, по мнению автора, исчерпывающие результаты о скорости сходимости по Прингсхейму п. в. кратных ортогональных рядов, окончательные на классе всех кратных систем. Они являются аналогами соответствующих одномерных результатов В. И. Коляды [6] и Швинна [7]. Для простоты изложения результаты сформулированы и доказаны для двойных ортогональных рядов.

Условимся в дальнейшем для заданной двойной последовательности $\{f_n(x) : n \in Z_+^2\}$ функций из L^2 и двойной последовательности $\{\gamma_n : n \in Z_+^2\}$ положительных чисел писать $f_n(x) = o_x(\gamma_n^{-1})$, если $\gamma_n f_n(x) \to 0$ п. в. при $n_1, n_2 \to \infty$ и существует функция $F(x) \in L^2$ такая, что $\sup\limits_{n \in Z_+^2} \gamma_n |f_n(x)| \leqslant F(x)$ п. в.

2. Оценки скорости сходимости. Пусть $\{\lambda(n) > 0 : n \in Z_+^2\}$ — неубывающая по каждой переменной последовательность, стремящаяся к бесконечности при $\max(n_1, n_2) \to \infty$. Положим $\lambda_1(n_1) = \lambda(n_1, 0)$ и $\lambda_2(n_2) = \lambda(0, n_2)$. Рассмотрим однозначно определяемые равенствами $\nu_{k+1}^{(i)} = \min\{l : \lambda_i(l) \geqslant 2\lambda_i(\nu_k^{(i)})\}$, $i = 1, 2$, строго возрастающие последовательности натуральных чисел $\{\nu_k^{(i)}\}_{k=0}^{\infty}$, $i = 1, 2$, со свойствами

$$\nu_0^{(1)} = \nu_0^{(2)} = 0, \quad \lambda_i(\nu_{k+1}^{(i)}) \geqslant 2\nu_i(\nu_k^{(i)}) \text{ и } \lambda_i(\nu_{k+1}^{(i)} - 1) < 2\lambda_i(\nu_k^{(i)}),$$
$$k = 0, 1, \ldots \tag{3}$$

и $\{\nu_k = (\nu_{k_1}^{(1)}, \nu_{k_2}^{(2)}) : k \in Z_+^2\}$ — решетку в Z_+^2. Полагая для точек $m, n, N \in Z_+^2$, $x \in R_+^2$, по определению, $m \pm n = (m_1 \pm n_1, m_2 \pm n_2)$, $\| x \| = x_1 \cdot x_2$, $N = (N, N)$, $(N = 0, 1, \ldots)$, $\mu(n) = (\mu_1(n_1), \mu_2(n_2)) = (\ln(n_1 - \nu_{k_1}^{(1)} + 2), \ \ln(n_2 - \nu_{k_2}^{(2)} + 2))$, $\nu_k \leqslant n \leqslant \nu_{k+1} - 1$; $k \in Z_+^2$, сформулируем основную теорему.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *Если выполняется условие*

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n^2 \lambda^2(n) \| \mu(n) \|^2 < \infty, \tag{4}$$

то для любой системы $\varphi \in \Phi$ имеет место оценка

$$f(x) - s_{n-1}(x) = o_x \{1/\lambda_1(n_1) + 1/\lambda_2(n_2)\} \equiv o_x(\gamma_n^{-1}). \tag{5}$$

2. *Существует ортогональный ряд* (1) *с*

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n^2 \lambda^2(n) \| \mu(n) \|^2 = \infty, \tag{6}$$

для которого всюду на X

$$\varlimsup_{n_1, n_2 \to \infty} \gamma_n | f(x) - s_{n-1}(x) | = +\infty. \tag{7}$$

3. *Оценка* (5) *окончательна, т. е. для любой последовательности $v(n) = v(n_1, n_2) \to \infty$ при $n_1, n_2 \to \infty$ найдется ортогональный ряд* (1), *удовлетворяющий условию* (4), *для которого всюду на X*

$$\varlimsup_{n_1, n_2 \to \infty} v(n) \gamma_n | f(x) - s_{n-1}(x) | = +\infty.$$

Замечание 1. Теорема 1 показывает, что скорость сходимости двойных ортогональных рядов зависит лишь от последовательностей $\lambda_i(n_i)$, $i = 1, 2$, и поэтому в условии (4), обеспечивающем скорость сходимости (5), вместо $\lambda(n)$ можно брать любую последовательность $\lambda^*(n)$ с $\lambda_i^*(n_i) = \lambda_i(n_i)$, $i = 1, 2$. Представляется целесообразным следующий выбор [5]: $\lambda^*(n) = \max\{\lambda_1(n_1), \lambda_2(n_2)\}$ с нормировкой $\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = 1$. Выбор обоснован соображениями «минимального роста» и «хорошими» свойствами последовательности $\lambda^*(n) \leqslant \lambda(n)$. Из теоремы 1 легко следует оценка Морица (см. [5], теорема 1), для которой утверждения типа 2 и 3, вообще говоря, не верны.

В качестве варианта теоремы 1 можно рассматривать следующее утверждение.

Теорема 2. 1. *Если выполнено условие*

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n^2 \lambda^2(n) < \infty, \tag{8}$$

то для любой системы $\varphi \in \Phi$ верна оценка

$$f(x) - s_{n-1}(x) = o_x \{\mu_1(n_1)/\lambda_1(n_1) + \mu_2(n_2)/\lambda_2(n_2)\} \equiv o_x(\delta_n^{-1}). \tag{9}$$

2. *Существует ортогональный ряд* (1) *с*

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n^2 \lambda^2(n) = \infty, \tag{10}$$

для которого всюду на X верхний предел

$$\varlimsup_{n_1, n_2 \to \infty} \delta_n | f(x) - s_{n-1}(x) | = +\infty.$$

3. *Для любой последовательности $v(n) = v(n_1, n_2) \to \infty$ при $n_1, n_2 \to \infty$ найдется ортогональный ряд* (1), *удовлетворяющий условию* (8), *для которо-*

го всюду на X верхний предел

$$\overline{\lim_{n_1,n_2\to\infty}} v(n)\,\delta_n\,|f(x)-s_{n-1}(x)| = +\infty.$$

Полученные выше результаты дают возможность исследовать вопрос о скорости сходимости подпоследовательностей частных сумм (2).

Теорема 3. *Пусть $\{m_n=(m^{(1)}_{n_1}, m^{(2)}_{n_2}): n\in Z^2_+\}$—произвольная решетка в Z^2_+ с $m_0=(0, 0)$, а решетка $\{\nu_n=(\nu^{(1)}_{n_1}, \nu^{(2)}_{n_2}): n\in Z^2_+\}$ определена неравенствами* (3) *по последовательности $\Lambda(n)=\lambda(m_n)$. Тогда:*

1) *если выполнено условие* (8), *то для любой системы $\varphi\in\Phi$ верна оценка*

$$f(x)-s_{m_n}(x)=o_x\{\mu_1(n_1)/\lambda_1(m^{(1)}_{n_1}+1)+\mu_2(n_2)/\lambda_2(m^{(2)}_{n_2}+1)\}\equiv o_x(\varepsilon_n^{-1}); \tag{11}$$

2) *существует ортогональный ряд* (1), *коэффициенты которого удовлетворяют условию* (10), *и всюду на X*

$$\overline{\lim_{n_1,n_2\to\infty}} \varepsilon_n\,|f(x)-s_{m_n}(x)| = +\infty; \tag{12}$$

3) *для любой последовательности $v(n)=v(n_1, n_2)\to\infty$ при $n_1, n_2\to\infty$ найдется ортогональный ряд* (1), *коэффициенты которого удовлетворяют условию* (8), *но всюду на X*

$$\overline{\lim_{n_1,n_2\to\infty}} v(n)\,\varepsilon_n\,|f(x)-s_{m_n}(x)| = +\infty.$$

Замечание 2. Отправляясь от теоремы 1, можно доказать также соответствующую теорему о скорости сходимости подпоследовательностей частных сумм (2) при условии (4), аналогичную теореме 3 по формулировке и доказательству.

Замечание 3. Анализ доказательств указанных выше теорем (см. также [6, 7]) показывает, что они остаются справедливыми, если в них $\mu_i(n_i)$ заменить на $\ln(\nu^{(i)}_{k_i+1}-\nu^{(i)}_{k_i}+1)$, $i=1, 2$. Тогда получим аналоги одномерных оценок В. И. Коляды [6]. Если же $\mu_i(n_i)$ заменить на $\ln(n_i+1)$, $i=1, 2$, то получим оценки типа Морица [5], вообще говоря, уже неокончательные. Вместе с тем для широкого класса последовательностей $\lambda(n)$ оценка Морица окончательна, что показывает следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть последовательности $0<\lambda_i(n_i)\uparrow\infty$ таковы, что $\lambda_i(n_i)\exp(-n_i^{-\alpha_i})$ убывают для некоторых $\alpha_i\in(0, 1)$, $i=1, 2$, и пусть $\theta_n^{-1}=\ln(n_1+1)/\lambda_1(n_1)+\ln(n_2+1)/\lambda_2(n_2)$. Тогда:*

1) *существует ортогональный ряд* (1), *удовлетворяющий условию* 10), *для которого всюду на X*

$$\overline{\lim_{n_1,n_2\to\infty}} \theta_n\,|f(x)-s_{n-1}(x)| = +\infty;$$

2) *для любой последовательности $v(n)\to\infty$ при $n_1, n_2\to\infty$ найдется ортогональный ряд* (1), *удовлетворяющий условию* (8), *для которого всюду на X*

$$\overline{\lim_{n_1,n_2\to\infty}} v(n)\,\theta_n\,|f(x)-s_{n-1}(x)| = +\infty.$$

Для последовательностей $\lambda(n)$ с более высоким порядком роста, чем в теореме 4, оценка Морица может быть улучшена. Действительно, верна следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть последовательности $\lambda_i(n_i)>0$ таковы, что $n_i^{-\alpha_i}\ln\lambda_i(n_i)$ не убывают для некоторых $\alpha_i\in(0, 1)$, а $n_i^{-1}\ln\lambda_i(n_i)$, $i=1, 2$, не возрастают. Тогда:*

1) *условие* (8) *влечет оценку для любой системы* $\varphi \in \Phi$

$$f(x) - s_{n-1}(x) = o_x\left\{\frac{1}{\lambda_1(n_1)} \ln\left(1 + \frac{n_1}{\lambda_1(n_1)}\right) + \frac{1}{\lambda_2(n_2)} \times \right.$$
$$\left. \times \ln\left(1 + \frac{n_2}{\lambda_2(n_2)}\right)\right\} \equiv o_x(\zeta_n^{-1});$$

2) *существует ортогональный ряд* (1), *удовлетворяющий условию* (10), *для которого всюду на* X

$$\overline{\lim_{n_1, n_2 \to \infty}} \zeta_n |f(x) - s_{n-1}(x)| = +\infty;$$

3) *для любой последовательности* $v(n) \to \infty$ *при* $n_1, n_2 \to \infty$ *найдется ортогональный ряд* (1), *удовлетворяющий условию* (8), *для которого всюду на* X

$$\overline{\lim_{n_1, n_2 \to \infty}} v(n) \zeta_n |f(x) - s_{n-1}(x)| = +\infty.$$

Очевидно, оценка $o_x(\zeta_n^{-1})$ сильнее оценки Морица. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример. Пусть

$$\lambda_i(n_i) = \exp(n_i/\ln^{\alpha_i}(n_i + 2)), \quad \alpha_i > 0, \quad i = 1, 2.$$

Тогда условие (8) влечет оценку

$$f(x) - s_{n-1}(x) = o_x\{\ln\ln(n_1 + 3)/\lambda_1(n_1) + \ln\ln(n_2 + 3)/\lambda_2(n_2)\},$$

в то время как теорема Морица дает лишь порядок $o_x(\theta_n^{-1})$.

3. Вспомогательные утверждения. Лемма 1. *Пусть* $\{m_n = (m_{n_1}^{(1)}, m_{n_2}^{(2)}) : n \in Z_+^2\}$ — *произвольная решетка в* Z_+^2, *а двойная последовательность* $\lambda(n_1, n_2) > 0$, *неубывающая по каждой переменной, такова, что* $\lambda_i(m_{n_i}^{(i)} + 1)/\lambda_i(m_{n_i}^{(i)}) \geqslant q > 1$, $i = 1, 2$. *Тогда* (8) *влечет для любой системы* $\varphi \in \Phi$ *оценку*

$$f(x) - s_{m_n}(x) = o_x\{1/\lambda_1(m_{n_1}^{(1)} + 1) + 1/\lambda_2(m_{n_2}^{(2)} + 1)\}.$$

Доказательство. Рассмотрим на плоскости множества точек с целочисленными координатами

$$P_1(n) = \{k \in Z_+^2 : m_{n_1}^{(1)} + 1 \leqslant k_1 < \infty, 0 \leqslant k_2 < \infty\},$$
$$P_2(n) = \{k \in Z_+^2 : 0 \leqslant k_1 \leqslant m_{n_1}, m_{n_2}^{(2)} + 1 \leqslant k_2 < \infty\}.$$

Тогда

$$f(x) - s_{m_n}(x) = \left(\sum_{k \in P_1(n)} + \sum_{k \in P_2(n)}\right) a_k \varphi_k(x).$$

Поскольку

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \lambda_1^2(m_{n_1}^{(1)} + 1) \int_X \Big(\sum_{k \in P_1(n)} a_k \varphi_k(x)\Big)^2 dx = \sum_{n_1=0}^{\infty} \lambda_1^2(m_{n_1}^{(1)} + 1) \sum_{k \in P_1(n)} a_k^2 =$$
$$= \sum_{k \geqslant 0} a_k^2 \sum_{m_{n_1}^{(1)} \leqslant k_1 - 1} \lambda_1^2(m_{n_1}^{(1)} + 1) = O(1) \sum_{k \geqslant 0} a_k^2 \lambda^2(k) < \infty,$$

то по теореме Леви отсюда следует

$$\sum_{k \in P_1(n)} a_k \varphi_k(x) = o_x\{1/\lambda_1(m_{n_1}^{(1)} + 1)\}.$$

Аналогично получаем соотношение

$$\sum_{k \in P_2(n)} a_k \varphi_k(x) = o_x\{1/\lambda_2(m_{n_2}^{(2)} + 1)\}.$$

Лемма 2. *Пусть* $0<\lambda(n)\uparrow\infty$, $n=0,1,\ldots$, *последовательность* $\nu_k\leftarrow\uparrow\infty$ *определена по* $\lambda(n)$ *неравенствами* (3) *и* $\mu(n)=\ln(n-\nu_k+2)$, $(\nu_k\leqslant n<\nu_{k+1};\ k=0,1,\ldots)$. *Тогда для любой последовательности* $\omega(n)\to\infty$ *найдется ортогональный ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n\psi_n(x)$, $x\in[0,1]$, *у которого* $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n^2\lambda^2(n)\mu^2(n)<\infty$, *но*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\omega(n)\lambda(n)|f(x)-s_{n-1}(x)|=+\infty, \tag{13}$$

где $s_n(x)$ *и* $f(x)$ — *соответственно частные суммы и* L^2 — *сумма этого ряда.*

Доказательство. Положим $\Lambda(n)=\lambda(n)\omega(n)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $\omega(n)\uparrow\infty$ и для $\Lambda(n)$ последовательность $\{\nu_k\}$ остается той же, что и для $\lambda(n)$. В противном случае достаточно определить $\omega_1(n)\leqslant\omega(n)$ так, чтобы $\omega_1(n)$ оставалась постоянной для $\nu_k\leqslant n<\nu_{k+1}$, $k=0,1,\ldots$, и $\omega_1(n)\uparrow\infty$. Используя схему доказательства леммы 1 из [9], в которой надо $\log n$ заменить на $\mu(n)$, определим последовательность $\{c_n\}$, удовлетворяющую следующим условиям: $c_n\geqslant c_{n+1}$ для $\nu_k\leqslant n\leqslant\nu_{k+1}-2$, $k=0,1,\ldots$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n^2\lambda^2(n)\mu^2(n)<\infty$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n^2\Lambda^2(n)\times\mu^2(n)=\infty$. Но тогда в силу теоремы 4 из [7] выполняется соотношение (13).

4. Доказательства теорем. Доказательство теоремы 1. Докажем первое утверждение. Пусть $n\in B_k$, где

$$B_k=\{n\in Z_+^2:\nu_k\leqslant n\leqslant\nu_{k+1}-1\},\quad k\in Z_+^2. \tag{14}$$

Рассмотрим множества

$$Q_1(k)=\{m\in Z_+^2:\nu_{k_1}^{(1)}+1\leqslant m_1\leqslant n_1-1,\ 0\leqslant m_2\leqslant\nu_{k_2}^{(2)}\},$$
$$Q_2(k)=\{m\in Z_+^2:0\leqslant m_1\leqslant\nu_{k_1}^{(1)},\ \nu_{k_2}^{(2)}+1\leqslant m_2\leqslant n_2-1\},$$
$$Q_3(k)=\{m\in Z_+^2;\ \nu_{k_1}^{(1)}+1\leqslant m_1\leqslant n_1-1,\ \nu_{k_2}^{(2)}+1\leqslant m_2\leqslant n_2-1\}.$$

Тогда

$$f(x)-s_{n-1}(x)=f(x)-s_{\nu_k}(x)+\sum_{i=1}^{3}\sum_{m\in Q_i(k)}a_m\varphi_m(x). \tag{15}$$

Из (3), (14) и леммы 1 следует оценка

$$f(x)-s_{\nu_k}(x)=o_x\{1/\lambda_1(n_1)+1/\lambda_2(n_2)\}. \tag{16}$$

Далее полагаем

$$f_{p,k_1}(x)=\max_{\nu_{k_1}^{(1)}+1\leqslant n_1\leqslant\nu_{k_1+1}^{(1)}}\Bigl|\sum_{m_1=\nu_{k_1}^{(1)}+1}^{n_1}\ \sum_{m_2=0}^{\nu_p^{(2)}}a_m\varphi_m(x)\Bigr|,\quad p,k_1\geqslant 0,$$

$$g_{k_1}(x)=\sup_{p\geqslant 0}f_{p+1,k_1}^2(x)\leqslant f_{1,k_1}^2(x)+\sum_{p=1}^{\infty}(f_{p,k_1}(x)+f_{p+1,k_1}(x))\times$$

$$\times\max_{\nu_{k_1}^{(1)}+1\leqslant n_1\leqslant\nu_{k_1+1}^{(1)}}\Bigl|\sum_{m_1=\nu_{k_1}^{(1)}+1}^{n_1}\ \sum_{m_2=\nu_p^{(2)}+1}^{\nu_{p+1}^{(2)}}a_m\varphi_m(x)\Bigr|.$$

Применяя теорему 8 из [8] с $d=1$, получаем

$$\int_X g_{k_1}(x)\,dx = O(1)\Big\{\sum_{m_1=\nu_{k_1}^{(1)}+1}^{\nu_{k_1+1}^{(1)}} \sum_{m_2=0}^{\infty} a_m^2 \mu_1^2(m_1)\Big\}^{1/2} \times$$

$$\times \Big\{\sum_{m_1=\nu_{k_1}^{(1)}+1}^{\nu_{k_1+1}^{(1)}} \sum_{m_2=0}^{\infty} a_m^2 \lambda^2(m)\, \mu_1^2(m_1)\Big\}^{1/2},$$

откуда с учетом (4) находим

$$\sum_{k_1=0}^{\infty} \lambda_1^2(\nu_{k_1}^{(1)}) \int_X g_{k_1}(x)\,dx = O(1) \sum_{m\geqslant 0} a_m^2 \lambda^2(m)\,\|\mu(m)\|^2 < \infty.$$

В итоге по теореме Леви $g_{k_1}(x) = o_x\{1/\lambda_1^2(\nu_{k_1}^{(1)})\}$, и, следовательно (см. (3) и (14)),

$$\sum_{m\in Q_1(k)} a_m \varphi_m(x) = o_x\{1/\lambda_1(n_1)\}. \tag{17}$$

Аналогично получаем

$$\sum_{m\in Q_2(k)} a_m \varphi_m(x) = o_x\{1/\lambda_2(n_2)\}. \tag{18}$$

Наконец, применяя теорему 8 из [8] с $d=2$, имеем

$$\sum_{k\geqslant 0} \lambda^2(\nu_k) \int_X \Big\{\max_{(n-1)\in B_k} \Big| \sum_{m\in Q_3(k)} a_m \varphi_m(x)\Big|^2 dx = O(1) \sum_{m\geqslant 0} a_m^2 \lambda^2(m)\,\|\mu(m)\|^2 < \infty.$$

Отсюда по теореме Леви следует (см. (3) и (14))

$$\sum_{m\in Q_3(k)} a_m \varphi_m(x) = o_x\{1/\lambda(\nu_k)\} = o_x\{1/\lambda_1(n_1) + 1/\lambda_2(n_2)\}. \tag{19}$$

Из (15) — (19) следует оценка (5).

Докажем второе утверждение теоремы 1. Рассмотрим последовательность $\{c_{n_1}\}_0^\infty$ и систему

$$\{\varphi_n(x) = \psi_{n_1}(x_1)\, r_{n_2}(x_2)\}, \quad (n_1, n_2)\in Z_+^2, \quad x\in X, \tag{20}$$

где $\{c_{n_1}\}_0^\infty$ и $\{\psi_{n_1}(x_1)\}_0^\infty$ определены в теореме 4 из [7], а $\{r_{n_2}(x_2)\}_0^\infty$ — система Радемахера, дополненная функцией $r_0(x_2)\equiv 1$.

Положим

$$a_n = a_{n_1n_2} = c_{n_1}, \text{ если } n_2 = 0, \ a_n = a_{n_1n_2} = 0, \text{ если } n_2 > 0. \tag{21}$$

Обозначим ниже через $f(x)$ и $g(x_1)$ L^2-суммы соответствующих рядов. Ряд

$$f(x) \overset{L^2}{=} \sum_{n\geqslant 0} a_n \varphi_n(x) = \sum_{n_1=0}^{\infty} c_{n_1} \psi_{n_1}(x_1) \overset{L^2}{=} g(x_1), \tag{22}$$

очевидно, удовлетворяет условию (6) и в силу теоремы 4 из [7] для $x\in X$ выполняется соотношение (7), поскольку

$$\varlimsup_{n_1,n_2\to\infty} \gamma_n\,|f(x) - s_{n-1}(x; f)| = \varlimsup_{n_1,n_2\to\infty} \gamma_n\,|g(x_1) - s_{n_1-1}(x_1; g)| \geqslant$$

$$\geqslant \varlimsup_{n_1\to\infty} \lambda_1(n_1)\,|g(x_1) - s_{n_1-1}(x_1; g)| = +\infty.$$

Докажем третье утверждение теоремы 1. Рассмотрим систему (20) и последовательность (21), где $\{\psi_{n_1}(x_1)\}$ и $\{c_{n_1}\}$ определены в лемме 2, а

$\{r_{n_2}(x_2)\}$ — в п. 2. Тогда ряд (22) удовлетворяет условию (4) и в силу леммы 2 для $x \in X$ имеем

$$\overline{\lim_{n_1, n_2 \to \infty}} v(n) \gamma_n |f(x) - s_{n-1}(x; f)| = \overline{\lim_{n_1, n_2 \to \infty}} v(n) \gamma_n |g(x_1) - s_{n_1-1}(x_1; g)| \geqslant$$
$$\geqslant \overline{\lim_{n_1 \to \infty}} v(n_1, \infty) \lambda_1(n_1) |g(x_1) - s_{n_1-1}(x_1; g)| = +\infty.$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1, хотя в деталях имеются отличия. Прежде всего из (14) и леммы 1 следует оценка (16). Далее рассмотрим ряд $\sum_{m \geqslant 0} b_m \varphi_m(x)$, где $b_m = a_m \mu_1^{-1}(m_1)$. Тогда, как и в теореме 1,

$$\sum_{m \in Q_1(k)} b_m \varphi_m(x) = o_x \{1/\lambda_1(n_1)\}, \tag{23}$$

откуда, применяя преобразование Абеля по m_1, получаем оценку

$$\sum_{m \in Q_1(k)} a_m \varphi_m(x) = \sum_{m \in Q_1(k)} \mu_1(m_1) b_m \varphi_m(x) = o_x \{\mu_1(n_1)/\lambda_1(n_1)\}. \tag{24}$$

Аналогично имеем

$$\sum_{m \in Q_2(k)} a_m \varphi_m(x) = o_x \{\mu_2(n_2)/\lambda_2(n_2)\}. \tag{25}$$

Далее построим последовательность $\{\Lambda(n) : n \in Z_+^2\}$ со свойствами

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n^2 \Lambda^2(n) < \infty, \quad \lambda(\nu_k) = O\{\Lambda(\nu_k)\}, \quad \Lambda(n)/\|\mu(n)\| \uparrow, \quad n \in B_k;\ k \in Z_+^2.$$

Пусть $r_k = \min_{n \in B_k} \lambda(n)/\|\mu(n)\| \equiv l(n)/\|\mu(n)\|$, $n \in B_k$; $k \in Z_+^2$. Тогда $\lambda(n) \geqslant l(n) = r_k \|\mu(n)\|$, $n \in B_k$; $k \in Z_+^2$. Рассмотрим последовательность $\{L(n) : n \in Z_+^2\}$ такую, что $L(n)/\lambda(n) \uparrow$ и $\sum_{n \geqslant 0} a_n^2 L^2(n) < \infty$. Тогда выполняется одно из неравенств $\lambda(n)/l(n) \leqslant L(n)/\lambda(n) \leqslant L(n)/l(n)$ либо $L(n)/\lambda(n) < \lambda(n)/l(n) \leqslant L(n)/l(n)$.

Положим $\omega(\nu_k) = \lambda(\nu_k)/l(\nu_k)$, а для $n \in B_k \setminus \nu_k$ определим $\omega(n) \uparrow$ так, чтобы выполнялось неравенство $\omega(n) \leqslant L(n)/l(n)$. Это возможно в силу $L(n)/\lambda(n) \uparrow$. Последовательность $\Lambda(n) = l(n)\omega(n)$ обладает требуемыми свойствами.

Теперь, как и в теореме 1, получаем

$$\sum_{m \in Q_3(k)} a_m \varphi_m(x) = o_x \{1/\Lambda(\nu_k)\} = o_x \{1/\lambda_1(n_1) + 1/\lambda_2(n_2)\}. \tag{26}$$

Из (24)—(26) следует оценка (9).

Утверждения 2 и 3 теоремы 2 доказываются так же, как и соответствующие утверждения теоремы 1, на основе теоремы 6 из [7] и теоремы 3 из [9].

Доказательство теоремы 3. 1. Разобьем Z_+^2 на счетное множество блоков

$$B_n = \{m \in Z_+^2 : m_n \leqslant m \leqslant m_{n+1} - 1\},\ n \in Z_+^2.$$

Пусть ряд (1) сходится в среднем к функции $f(x)$. Положим

$$c_n = \Big\{\sum_{k \in B_n} a_k^2\Big\}^{1/2}, \quad \Phi_n(x) = c_n^{-1} \sum_{k \in B_n} a_k \varphi_k(x), \quad n \in Z_+^2$$

(если $c_n = 0$, то полагаем, по определению, $c_n^{-1} = 1$). Поскольку $S_n(x) = \sum_{k \leqslant n} c_k \Phi_k(x) = \sum_{k \leqslant m_n} a_k \varphi_k(x) = s_{m_n}(x; f)$, то $\|f(x) - S_n(x)\|_{L^2} \to 0$. Далее (см. (8))

$$\sum_{n\geqslant 0} c_n^2\Lambda^2(n) = \sum_{n\geqslant 0} \lambda^2(m_n) \sum_{m\in B_n} a_m^2 \leqslant \sum_{m\geqslant 0} a_m^2\lambda^2(m) < \infty$$

и в силу теоремы 2 получаем оценку (11)

$$f(x) - S_n(x) = o_x\{\mu_1(n_1)/\Lambda_1(n_1+1) + \mu_2(n_2)/\Lambda_2(n_2+1)\} =$$

$$= o_x\left\{\frac{\mu_1(n_1)}{\lambda_1(m_{n_1}^{(1)}+1)} + \frac{\mu_2(n_2)}{\lambda_2(m_{n_2}^{(2)}+1)}\right\}.$$

2. В силу теоремы 2 существует ортогональный ряд $\sum_{n\geqslant 0} c_n\Phi_n(x)$ с $\sum_{n\geqslant 0} c_n^2\Lambda^2(n) = \infty$, сходящийся в среднем к функции $f(x)\in L^2$, для которого всюду на X

$$\overline{\lim_{n_1,n_2\to\infty}}\, \varepsilon_{n+1}(\Lambda)\,|f(x) - S_n(x;f)| = +\infty,$$

где

$$\varepsilon_{n+1}^{-1}(\Lambda) = \mu_1(n_1)/\Lambda_1(n_1+1) + \mu_2(n_2)/\Lambda_2(n_2+1).$$

Кроме того, из (20) вытекает существование системы функций $\{\chi_n(x): n\in \in Z_+^2\}$, ортогональных на X к функциям $\varphi_n(x)$. Построим искомый ортогональный ряд $\sum_{n\geqslant 0} a_n\varphi_n(x)$, полагая

$$a_{m_n} = c_n,\quad \varphi_{m_n}(x) = \Phi_n(x),\quad n\in Z_+^2,\quad a_k = 0,\quad \varphi_k(x) = \chi_k(x),\quad k\neq m_n.$$

Тогда $s_{m_n}(x) = \sum_{k\leqslant m_n} a_k\varphi_k(x) = S_n(x;f)$ и $\sum_{n\geqslant 0} a_n^2\lambda^2(n) = \sum_{n\geqslant 0} c_n^2\Lambda^2(n) = \infty$, так что в итоге получаем (12)

3. Последнее утверждение теоремы 3 доказывается аналогично утверждению 2.

Доказательства теорем 4 и 5 проводятся по схемам В. И. Коляды (см. [6], теоремы 3 и 4) и Швинна (см. [7], теорема 4) без существенных изменений с учетом теоремы 2 и замечания 3. Их легко можно восстановить, используя фрагменты доказательств предыдущих теорем.

1. *Agnew P. R.* On double orthogonal series // Proc. London Math. Soc.—1932.— **33**, N 6.— P. 420—434.
2. *Панджакидзе Ш. П.* О теореме Меньшова—Радемахера для двойных ортогональных рядов // Сообщ. АН ГССР — 1965.— **39**, № 2.— С. 277—282.
3. *Moricz F.* On the convergence in a restricted sense of multiple series // Anal. math.— 1979.— **5**, N 2.— P. 135—147.
4. *Янушаускас А. И.* Двойные ряды.— Новосибирск : Наука, 1980.— 224 с.
5. *Moricz F.* Approximation theorems for double orthogonal series // J. Approxim. Theory.— 1984.— **42**, N 2.— P. 107—137.
6. *Коляда В. И.* О скорости сходимости ортогональных рядов // Укр. мат. журн.— 1953.— **25**, № 1.— С. 25—38.
7. *Schwinn H.* On the rate of approximation by orthogonal series // Acta Sci. math.— 1985.— **48**, N 1—4.— P. 417—430.
8. *Moricz F., Tandori K.* On the a. e. convergence of multiple orthogonal series. II (Unrestricted convergence of the rectangular partial sums) // Ibid.— 1984.— **47**, N 3-4.—P. 349—369.
9. *Андриенко В. А.* О быстроте сходимости ортогональных рядов // Вест. Моск. ун-та. Мат., мех.— 1967.— № 1.— С, 17—24.

Одес. пед. ин-т

Получено 15.04.88