УДК 517.988

А. Ю. Лучка

Вариационно-итеративный метод для нелинейных уравнений

Предложен новый вариант вариационно-итеративного метода решения нелинейных уравнений с неограниченными операторами и дано его обоснование.

Запропоновано новий варіант варіаційно-ітеративного методу розв'язування нелінійних рівнянь з необмеженими операторами та дано його обгрунтування.

Вариационно-итеративный метод возник на базе проекционно-итеративного метода, исследованию которого посвящен ряд работ, в частности [1—4]. Суть вариационно-итеративного метода для линейных уравнений изложена [4, 5]. Обоснование применения этого метода к нелинейным уравнениям с потенциальным сильно монотонным и ограниченным оператором дано в [6]. В настоящей работе исследуется применение вариационно-итеративного метода к нелинейным уравнениям с неограниченным оператором.

1. Вспомогательные утверждения. Пусть H — гильбертово пространство и H_0 — его подпространство. Пусть P и Q — операторы ортогонального проектирования пространства H на подпространства H_0 и $V = H \ominus H_0$ соответстенно. Пусть $A: H \to H$ — сильно монотонный потенциальный и липшиц-непрерывный оператор, т. е. существуют положительные постоянные γ и δ такие, что выполняются неравенства [7, 8]

$$\gamma \| u - v \|^2 \leqslant (Au - Av, u - v), \tag{1}$$

$$\| Au - Av \| \leqslant \delta \| u - v \| \quad \forall u, \quad v \in H, \tag{2}$$

и функционал $F: H \to \mathbb{R}$ — потенциал оператора A, который имеет вид

$$F(u) = F(0) + \int_0^1 (A(tu), u)\, dt \quad \forall u \in H. \tag{3}$$

Лемма 1. *Если A — сильно монотонный потенциальный оператор, то условие* (2) *равносильно условию*

$$(Au - Av, u - v) \leqslant \delta \| u - v \|^2 \quad \forall u, \ v \in H. \tag{4}$$

Доказательство. Из выполнения неравенства (2) неравенство (4) следует очевидным образом. Установим обратное утверждение. Для этой цели введем оператор T, определяемый формулой

$$Tu = u - \tau Au \tag{5}$$

и такой, что при $\tau > 0$ выполняется условие Липшица

$$\| Tu - Tv \| \leqslant \alpha \| u - v \| \quad \forall u, \ v \in H \tag{6}$$

с константой

$$\alpha = \alpha(\tau) = \max\{1 - \gamma\tau, \ \delta\tau - 1\}. \tag{7}$$

Этот факт с помощью условий (1) и (4) устанавливается так же, как и лемма 4.14 [7]. На основании формул (5), (6) для каждого $\tau > 0$ имеем

$$\tau \| Au - Av \| = \| \tau Au - u - \tau Av + v + u - v \| \leqslant$$
$$\leqslant \| Tu - Tv \| + \| u - v \| \leqslant (1 + \alpha) \| u - v \|. \tag{8}$$

Пусть теперь $\tau = 2/(\gamma + \delta)$. Тогда, во-первых, согласно формуле (7) $\alpha = (\delta - \gamma)/(\delta + \gamma)$ и, во-вторых, выполняя простые вычисления, находим

$$1 + \alpha = \delta\tau. \tag{9}$$

Из соотношений (8), (9) следует справедливость неравенства (2).

Лемма 2. *Уравнение*

$$PA(y+w)=Pg, \quad w\in H_0, \tag{10}$$

в котором A — сильно монотонный потенциальный липшиц-непрерывный оператор, имеет единственное решение при любых $g, y\in H$ при каждом H_0.

Доказательство. Принимая во внимание обозначение (5), легко усмотреть равносильность уравнения (10) уравнению

$$w=PT(y+w)-Py+\tau Pg. \tag{11}$$

Поскольку в силу свойства $\|P\|=1$ и неравенства (6) имеем

$$\|PT(y+w)-PT(y+z)\|\leqslant\|T(y+z)-T(y+w)\|\leqslant$$
$$\leqslant\alpha\|w-z\| \quad \forall w, \quad z\in H_0, \quad \forall y\in H,$$

то при соблюдении условия $\alpha<1$ оператор, стоящий в правой части уравнения (11), в пространстве H_0 является оператором сжатия. Последние условия, как это явствует из вида функции (7), выполняются при $\tau\in(0, 2/\delta)$. Следовательно, при таком выборе τ уравнение (11) (или же равносильное ему уравнение (10)) однозначно разрешимо при любых $g, y\in H$ и при каждом H_0.

2. Оператор Z и его свойства. Введем в рассмотрение оператор $Z: H\to H$, определяемый формулой

$$Zy=y+z, \quad y\in H, \quad z\in H_0, \tag{12}$$

где элемент z удовлетворяет уравнению

$$PA(y+z+w)=PAw, \tag{13}$$

в котором A — сильно монотонный потенциальный липшиц-непрерывный оператор и $w\in H_0$ — решение уравнения

$$PAw=Pg, \quad g\in H. \tag{14}$$

Оператор Z определен на всем H, так как согласно лемме 2 уравнения (13) и (14) однозначно разрешимы при любых $g, y\in H$, и обладает свойствами

$$QZ=Q, \quad ZQ=Z, \quad ZO=O, \tag{15}$$

которые непосредственно вытекают из определения.

Лемма 3. *Если потенциальный оператор A удовлетворяет неравенствам* (1) *и* (2), *то для любых $x, y\in H$ справедливы соотношения*

$$\|Q(x-y)\|\leqslant\|Zx-Zy\|\leqslant l\|Q(x-y)\|, \tag{16}$$

$$\|QT(w+Zx)-QT(w+Zy)\|\leqslant\alpha\|Q(x-y)\|, \tag{17}$$

где T — оператор, определяемый формулой (5), $\alpha<1$ *и* $l=(\gamma+\delta)/2\sqrt{\gamma\delta}$.

Доказательство. На основании формул (12), (14) с учетом равносильности уравнений (10) и (11) имеем

$$Zy=Qy+PT(w+Zy)-PTw. \tag{18}$$

Следовательно, для любых $x, y\in H$ справедливо соотношение

$$Zx-Zy=Q(x-y)+PT(w+Zx)-PT(w+Zy),$$

с помощью которого, полагая

$$h=PT(w+Zx)-PT(w+Zy), \tag{19}$$

легко получаем равенство

$$\|Zx-Zy\|^2=\|Q(x-y)\|^2+\|h\|^2. \tag{20}$$

В силу формул (6), (19) и (20) находим

$$\|Zx-Zy\|^2\leqslant\|Q(x-y)\|^2+\alpha^2\|Zx-Zy\|^2. \tag{21}$$

Положим теперь $\tau = 2/(\gamma + \delta)$. При таком выборе параметра согласно формуле (7) $\alpha = (\delta - \gamma)/(\delta + \gamma)$, а поэтому из неравенства (21), выполняя простые преобразования, с учетом соотношения (20) получаем оценки (16).

С помощью формулы (20) можно также получить неравенство (17), так как, учитывая обозначение (19) и неравенство (6), имеем

$$\| QT(w + Zx) - QT(w + Zy) \|^2 = \| T(w + Zx) - T(w + Zy) \|^2 - \| h \|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \alpha^2 \| Zx - Zy \|^2 - \| h \|^2 = \alpha^2 \| Q(x - y) \|^2 + (\alpha^2 - 1) \| h \|^2 \leqslant \alpha^2 \| Q(x - y) \|^2.$$

Замечание 1. Знак равенства в формуле (17) достигается лишь на тех элементах $x \neq y$, для которых $h = 0$. Последнее соотношение выполняется в исключительных случаях.

Замечание 2. В случае, когда A — линейный оператор, из выражений (12) и (13) видно, что оператор Z определяется посредством формул

$$Zy = y + z, \quad PA(y + z) = 0, \quad z \in H_0. \tag{22}$$

Если через R обозначить оператор, с помощью которого единственное решение $w \in H_0$ уравнения $PAw = Pg$ при каждом $g \in H$ задается формулой $w = Rg$, то на основании выражений (22) можно получить представление

$$Z = I - RA, \tag{23}$$

где I — единичный оператор в H. В данном случае, принимая во внимание соотношение (18), можно показать, что оператор Z удовлетворяет уравнению

$$Z = Q + PTZ. \tag{24}$$

Из изложенного следует, что в линейном случае уравнение (24) можно положить в основу определения оператора Z.

3. Оператор W и его свойства. Определим оператор W : $H \to H$ формулой

$$Wy = A(w + Zy) - Aw. \tag{25}$$

В силу соотношений (12)—(15), очевидно, этот оператор обладает свойствами

$$PW = 0, \quad QW = WQ = W. \tag{26}$$

Последнее соотношение позволяет нам трактовать оператор W как оператор, действующий в пространстве $V = H \ominus H_0$.

Лемма 4. *Если $A : H \to H$ — потенциальный оператор, удовлетворяющий неравенствам (2) и (4), то $W : V \to V$ — также потенциальный оператор, удовлетворяющий неравенствам*

$$\sigma \| u - v \|^2 \leqslant (Wu - Wv,\ u - v) \leqslant \eta \| u - v \|^2 \quad \forall u,\ v \in V, \tag{27}$$

причем

$$\gamma \leqslant \sigma \leqslant \eta \leqslant \delta. \tag{28}$$

Доказательство. По условию A — потенциальный оператор. Следовательно, согласно лемме 4.1 [7] верно равенство

$$\int_0^1 (A(sx), x)\, ds - \int_0^1 (A(sy), y)\, ds = \int_0^1 (A(y + s(x - y)), x - y)\, ds \ \forall x,\ y \in H. \tag{29}$$

Рассмотрим функционал

$$\Phi(v) = \int_0^1 (A(sw + sZv) - Aw,\ w + Zv)\, ds \quad \forall v \in V, \tag{30}$$

в котором оператор Z определяется формулами (12)—(14). Функционал Φ — потенциал оператора W, т. е. для всех $v, h \in V$ справедливо равенство

$$\lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \{\Phi(v + th) - \Phi(v)\} = (Wv, h). \tag{31}$$

В самом деле, согласно формулам (26), (15) и (25)

$$(Wv, th) = (Wv, Z(v+th) - Zv) = (A(w+Zv) - Aw,\ Z(v+th) - Zv),$$

а поэтому с учетом выражения (30) имеем

$$\Phi(v+th) - \Phi(v) - (Wh, th) = \int_0^1 (A(sw + sZ(v+th)) - Aw,$$

$$w + Z(v+th))\, ds - \int_0^1 (A(sw + sZv - Aw,\ w + Zv)\, ds -$$

$$-(A(w+Zv) - Aw,\ Z(v+th) - Zv).$$

Положим для простоты изложения

$$y_t = w + Z(v+th), \quad y = w + Zv \tag{32}$$

и воспользуемся свойством (29), заменив в нем x на y_t, и условием (4). Тогда

$$\Phi(v+th) - \Phi(v) - (Wv, th) = \int_0^1 (A(sy_t) - Aw, y_t)\, ds - \int_0^1 (A(sy) - Aw, y) ds -$$

$$-\int_0^1 (Ay - Aw,\ y_t - y)\, ds = \int_0^1 (A(sy_t), y_t)\, ds - \int_0^1 (A(sy), y)\, ds -$$

$$-\int_0^1 (Ay, y_t - y)\, ds = \int_0^1 (A(y + s(y_t - y)) - Ay,\ y_t - y)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \delta s \| y_t - y \|^2 ds = \frac{\delta}{2} \| y_t - y \|^2. \tag{33}$$

Воспользуемся теперь оценкой (16), согласно которой и формулам (32)

$$\| y_t - y \| = \| Z(v+th) - Zv \| \leqslant lt \| h \|. \tag{34}$$

На основании неравенств (33) и (34) имеем

$$\left| \frac{1}{t} [\Phi(v+th) - \Phi(v)] - (Wv, h) \right| \leqslant \frac{1}{2} \delta l^2 t \| h \|^2.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $t \to 0$, убеждаемся в справедливости соотношения (31).

Докажем справедливость неравенств (27). С этой целью воспользуемся формулами (15), (26), (25), (1) и (16), на основании которых имеем

$$(Wu - Wv,\ u - v) = (Wu - Wv,\ Zu - Zv) = (A(w+Zu) - A(w+Zv),$$

$$Zu - Zv) \geqslant \gamma \| Zu - Zv \|^2 \geqslant \gamma \| u - v \|^2 \quad \forall u,\ v \in V. \tag{35}$$

Далее, с помощью выражений (25), (5) и (15) для любых $u,\ v \in V$ находим

$$\tau(Wu - Wv,\ u - v) = \tau(A(w+Zu) - A(w+Zv),\ u - v) = (\tau A(w+Zu) -$$

$$- w - Zu - \tau A(w+Zv) + w + Zv,\ u - v) + (Zu - Zv,\ u - v) =$$

$$= (T(w+Zv) - T(w+Zu),\ u - v) + \| u - v \|^2 =$$

$$= (QT(w+Zv) - QT(w+Zu),\ u - v) + \| u - v \|^2.$$

Используя теперь формулу (17), получаем

$$\tau(Wu - Wv,\ u - v) \leqslant (1 + \alpha) \| u - v \|^2.$$

Пусть $\tau = 2/(\gamma + \delta)$. Тогда с учетом равенства (9) справедливо неравенство

$$(Wu - Wv,\ u - v) \leqslant \delta \| u - v \|^2 \quad \forall u, \quad v \in V. \tag{36}$$

На основании анализа неравенств (35) и (36) приходим к выводу: существуют постоянные σ и η, удовлетворяющие соотношению (28), такие, что верны неравенства (27).

Замечание 3. В силу замечания 1 знак равенства в формулах (35) и (36) возможен только в исключительных случаях. Исключая их, в неравенстве (28) будем иметь $\gamma < \sigma$, $\eta < \delta$.

Замечание 4. В случае, когда A — линейный оператор, функционал (3) — квадратичная форма, а из формул (25) и (23) следует

$$W = AZ = A - ARA. \tag{37}$$

Если оператор A самосопряжен, то, как это видно из представления (37), оператор W также самосопряжен. Более того, на основании леммы 4 оператор W будет положительно определенным и ограниченным, если такими же свойствами обладает исходный оператор A, причем границы их спектров σ, η и γ, δ удовлетворяют неравенству (28).

Лемма 5. *Если оператор A потенциален, сильно монотонен и липшиц-непрерывен, то справедлива оценка*

$$\| Zx - Zy \| \leqslant \sqrt{\eta/\gamma}\, \| Q(x - y) \| \quad \forall x, \quad y \in H, \tag{38}$$

в которой γ и η — постоянные, фигурирующие в неравенствах (1) *и* (27).

Действительно, на основании соотношения (25) и свойств (26), (15) имеем

$$(A(w + Zx) - A(w + Zy),\ Zx - Zy) = (Wx - Wy,\ Zx - Zy) =$$
$$= (Wx - Wy,\ Q(x - y)) = (Wx - Wy,\ x - y), \tag{39}$$

откуда с учетом неравенств (1) и (27), полагая в последнем $u = Qx$, $v = Qy$, получаем

$$\gamma \| Zx - Zy \|^2 \leqslant \eta \| Q(x - y) \|^2,$$

т. е. оценка (38) выполняется.

4. Описание задачи. Ряд задач математической физики сводится к уравнению

$$Lx = f, \tag{40}$$

в котором L — нелинейный оператор, определенный на линейном множестве $D(L)$, плотном в банаховом пространстве X, и отображающий это множество в пространство X^*, сопряженное к X, $f \in X^*$ —заданный и $x \in X$ — искомый элементы.

Предположим, что оператор L радиально непрерывен, потенциален и для любых $x, y \in D(L)$ выполняется неравенство

$$\gamma \langle Bx - By,\ x - y \rangle \leqslant \langle Lx - Ly,\ x - y \rangle \leqslant \delta \langle Bx - By,\ x - y \rangle, \tag{41}$$

где $0 < \gamma \leqslant \delta < \infty$, B — линейный оператор, отображающий множество $D(B) = D(L)$ в X^*, и $\langle \psi, x \rangle$ — значение функционала $\psi \in X^*$ на элементе $x \in X$.

Пусть G — некоторый линейный оператор, определенный на множестве $D(G) \supset D(B)$ и отображающий это множество в некоторое гильбертово пространство H, такой, что верно представление

$$B = CG, \quad C = G^*, \quad G = C^*. \tag{42}$$

Пусть уравнение

$$Gx = u \tag{43}$$

однозначно разрешимо при всех $u \in H$, т. е. существует ограниченный обратный оператор G^{-1}. Следовательно, существуют ограниченные операторы C^{-1} и B^{-1}.

Наряду с уравнением (40) рассмотрим уравнение

$$Au = g, \tag{44}$$

в котором $A : H \to H$ — некоторый оператор, являющийся замыканием в H оператора $C^{-1}LG^{-1}$, т. е.

$$A = \overline{C^{-1}LG^{-1}}, \quad g = C^{-1}f, \tag{45}$$

причем считается, что в результате замыкания получается непрерывный в H оператор.

При таких предположениях, используя неравенства (41) и представление

$$\langle Bx, y\rangle = (Gx, Gy) \quad \forall x, \quad y \in D(B), \tag{46}$$

непосредственно вытекающее из соотношений (42), легко убедиться в том, что A — потенциальный сильно монотонный и липшиц-непрерывный оператор, т. е. с учетом замены (43) и леммы 1 справедливы неравенства (1) и (2). Следовательно, уравнение (44) имеет единственное решение $u^* \in H$ при каждом $g \in H$ (см., например, § 4 гл. III [7]).

В дальнейшем элемент $x^* = Gu^*$, где u^* — решение уравнения (44), будем называть обобщенным решением уравнения (40). Таким образом, уравнение (40), в котором L — радиально непрерывный потенциальный оператор, удовлетворяющий условию (41), имеет единственное обобщенное решение $x^* \in D(G) \subset X$.

5. Суть стационарного вариационно-итеративного метода. К уравнению (40) применим вариационно-итеративный метод [6], согласно которому приближения к искомому решению строятся по формуле

$$x_k = y_k + \Delta_k, \quad \Delta_k \in X_0, \tag{47}$$

в которой элемент y_k определяется из уравнения

$$By_k = Bx_{k-1} + \tau(f - Lx_{k-1}), \tag{48}$$

где τ — некоторый положительный параметр и $X_0 \subset D(L)$, а поправка Δ_k находится из условия минимума функционала

$$\Phi(x_k) = \int\limits_0^1 \langle L(tx_k) - f, x_k\rangle\, dt. \tag{49}$$

В качестве начального приближения берем элемент $x_0 = y_0 + \Delta_0$, $y_0 \in D(B)$, определяя $\Delta_0 \in X_0$ из условия минимума функционала $\Phi(x_0)$.

В случае, когда подпространство X_0 порождается системой линейно независимых элементов $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, принадлежащих множеству $D(L)$, поправка имеет вид $\Delta_k = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^k \eta_i$ и задача минимизации функционала (49) сводится к решению системы нелинейных алгебраических или трансцендентных уравнений. Как будет установлено в дальнейшем, при сделанных предположениях относительно оператора L эта система уравнений однозначно разрешима при каждом n.

Заметим, что при $\Delta_k = 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, вариационно-итеративный метод вырождается в итерационный процесс

$$By_k = By_{k-1} + \tau(f - Ay_{k-1}). \tag{50}$$

6. Сходимость метода. Для обоснования метода (47)—(49) и исследования его скорости сходимости нам понадобится вспомогательное уравнение

$$Wv = h, \tag{51}$$

в котором $v \in V$, оператор W определяется формулой (25) и

$$h = g - Aw \in V, \tag{52}$$

где $A : H \to H$ — потенциальный сильно монотонный и липшиц-непрерывный оператор, $w \in H_0$ — решение уравнения (14) и $V = H \ominus H_0$.

Лемма 6. *Уравнение* (44) *равносильно уравнению* (51). *Их решения связаны формулами*

$$u^* = w + Zv^*, \quad v^* = Qu^*. \tag{53}$$

Доказательство. Пусть u^* — решение уравнения (44). Тогда справедливо соотношение (53), непосредственно вытекающее из определения оператора Z, т. е. из формул (12)—(14) и второго свойства (15), так как в данном случае $Zu^* = u^* + z$, $z = -w$. В силу формул (53), (52) и (25) имеем

$$h - Wv^* = g - Aw - A(w + Zv^*) + Aw = g - A(w + Zv^*) = g - Au^* = 0,$$

т. е. $v^* = Qu^*$ — решение уравнения (51).

Пусть теперь v^* — решение уравнения (51). Тогда $u^* = w + Zv^*$ — решение уравнения (44), так как, учитывая обозначения (25) и (52), имеем

$$g - Au^* = g - A(w + Zv^*) = h - Wv^* = 0.$$

Теорема 1. *Пусть $L : D(L) \subset X \to X^*$ — радиально непрерывный потенциальный оператор, удовлетворяющий условию* (41), *и оператор $A : H \to H$, определяемый формулой* (45), *непрерывен. Тогда при любом $f \in X^*$ уравнение* (40) *имеет единственное обобщенное решение $x^* \in D(G)$ и последовательность $\{x_k\}$, построенная согласно методу* (47)—(49) *при $\tau \in (0, 2/\eta)$, сходится по норме в X к этому решению.*

Скорость сходимости характеризуется оценкой

$$\| x^* - x_k \|_X \leqslant \beta l q^k \| QG(x^* - y_0) \|, \tag{54}$$

в которой

$$q = q(\tau) = \max\{1 - \sigma\tau, \ \eta\tau - 1\}, \quad l = \sqrt{\eta/\gamma}, \tag{55}$$

$\|\cdot\|$ — норма в пространстве H и $Q = I - P$, где P — оператор ортогонального проектирования пространства H на его подпространство $H_0 = GX_0$, $\beta = \| G^{-1} \|_{H \to X}$.

Доказательство. Введем замены

$$Gx_k = u_k, \quad Gy_k = z_k, \quad G\Delta_k = w_k, \tag{56}$$

с помощью которых и представлений (42), (45) формулы (47) и (48) можно представить в виде

$$u_k = z_k + w_k, \quad w_k \in H_0, \tag{57}$$

$$z_k = u_{k-1} + \tau(g - Au_{k-1}), \tag{58}$$

а, учитывая соотношение (46), задачу минимизации функционала (49) можно заменить задачей нахождения минимума функционала

$$F(u_k) = \int_0^1 (A(tu_k) - g, u_k)\, dt. \tag{59}$$

Итак, сходимость метода (47)—(49) решения уравнения (40) с неограниченным оператором сводится к исследованию сходимости метода (57)—(59) для уравнения (44) с непрерывным оператором

Как известно [7, 8], задача минимизации функционала (59) равносильна решению уравнения

$$PA(z_k + w_k) = Pg, \quad w_k \in H_0. \tag{60}$$

С помощью формул (12)—(14) и (60) метод (57)—(59) можно представить в виде

$$u_k = w + Zz_k, \quad z_k = u_{k-1} + \tau(g - Au_{k-1}). \tag{61}$$

Учитывая свойства (15) и первое выражение в (61), легко усмотреть справедливость соотношений

$$v_k = Qu_k = Qz_k, \quad u_k = w + Zv_k, \tag{62}$$

а поэтому второй формуле в (61) можно придать вид

$$z_k = u_{k-1} + \tau g - \tau A\,(w + Zv_{k-1}). \tag{63}$$

Применяя слева к равенству (63) оператор Q и учитывая формулы (62), (25), (26) и (52), убеждаемся в справедливости соотношения

$$v_k = v_{k-1} - \tau \mathbb{W} v_{k-1} + \tau h. \tag{64}$$

Введем в рассмотрение оператор S, определяемый формулой

$$Sv = v - \tau \mathbb{W} v, \quad v \in V. \tag{65}$$

Из условий теоремы, как отмечалось в п. 4, вытекает, что $A : H \to H$ — потенциальный оператор, обладающий свойствами (1) и (4), а поэтому согласно лемме 4 оператор $\mathbb{W} : V \to V$ потенциален и справедливы неравенства (27). Следовательно, оператор $S : V \to V$ тоже потенциален и с учетом леммы 4.14 [7] справедливо неравенство

$$\| Sv - Sh \| \leqslant q \| v - h \| \quad \forall v, \quad h \in V \tag{66}$$

с константой q, имеющей вид (55), причем $q < 1$ при $\tau \in (0, 2/\eta)$.

Пусть u^* — решение уравнения (44), которое при соблюдении условий теоремы, как упоминалось выше, существует и единственно при любом $g \in \in H$. Следовательно, существует единственное обобщенное решение $x^* \in \in D\,(G)$ уравнения (40) при каждом $f \in X^*$ и верно соотношение

$$Gx^* = u^*. \tag{67}$$

Далее, учитывая лемму 6, легко убедиться в справедливости соотношения

$$v^* = v^* - \tau \mathbb{W} v^* + \tau h. \tag{68}$$

На основании формул (64) — (66) и (68) имеем

$$\| v^* - v_k \| = \| Sv^* - Sv_{k-1} \| \leqslant q \| v^* - v_{k-1} \|. \tag{69}$$

Стало быть, с учетом обозначений (53), (62) из оценки (69) непосредственно вытекает оценка

$$\| v^* - v_k \| \leqslant q^k \| Q\,(u^* - z_0) \|. \tag{70}$$

Используя теперь формулы (53), (62), (38) и (55), получаем

$$| u^* - u_k \| = \| Zv^* - Zv_k \| \leqslant l \| v^* - v_k \|. \tag{71}$$

Итак, с учетом формул (70) и (71) справедлива оценка

$$\| u^* - u_k \| \leqslant lq^k \| Q\,(u^* - z_0) \|, \tag{72}$$

из которой следует

$$\lim_{k \to 0} \| u_k - u^* \| = 0 \tag{73}$$

при $\tau \in (0, 2/\eta)$, так как при таких значениях параметра $q < 1$, т. е. вариационно-итеративный метод (57)—(59) решение уравнения (44) сходится при любом выборе параметра $\tau \in (0, 2/\eta)$ и подпространства H_0.

Наконец, используя формулы (56) и (67), имеем

$$\| x^* - x_k \|_X = \| G^{-1} (u^* - u_k) \|_X \leqslant \beta \| u^* - u_k \|, \tag{74}$$

откуда с учетом соотношения (73) следует $x_k \to x^*$ при $k \to \infty$. Справедливость оценки (54) очевидным образом вытекает из неравенств (72), (74) и формул (56), (67).

7. **Оптимальный стационарный вариационно-итеративный метод**. Поскольку функция $q\,(\tau)$, определяе-

мая формулой (55), принимает наименьшее значение

$$q = (\eta - \sigma)/(\eta + \sigma) \text{ при } \tau = \tau_* = 2/(\eta + \sigma), \tag{75}$$

то такое значение параметра, как это непосредственно следует из неулучшаемой оценки (72), будет наилучшим в стационарном вариационно-итеративном методе.

Пользоваться оптимальным выбором параметра затруднительно, так как нет конструктивных алгоритмов нахождения границ σ и η. Правда, для специальных классов уравнений можно дать оценки соответственно снизу и сверху указанных границ [6]. В связи с этим следует обратить внимание на значение параметра $\tau = \tau_0 = 2/(\delta + \gamma)$, являющееся оптимальным в стационарном процессе (50). Последний факт следует из оценки

$$\| x^* - y_k \|_X \leqslant \beta \rho^k \| G(x^* - y_0) \|, \tag{76}$$

являющейся частным случаем оценки (54) при $H_0 = 0$, где

$$\rho = \rho(\tau) = \max\{1 - \gamma\tau,\ \delta\tau - 1\}, \tag{77}$$

так как функция $\rho(\tau)$ принимает наименьшее значение

$$\rho = (\delta - \gamma)/(\delta + \gamma) \text{ при } \tau = \tau_0 = 2/(\delta + \gamma). \tag{78}$$

Подставляя в выражение (55) $\tau = \tau_0$ и выполняя несложные преобразования с учетом формул (28), (75), (78), получаем

$$q = \rho - \nu\tau_0, \quad \nu = \min\{\sigma - \gamma,\ \delta - \eta\}. \tag{79}$$

Следовательно, при таком выборе параметра стационарный вариационно-итеративный метод, вообще говоря, сходится быстрее, чем оптимальный стационарный итерационный процесс, так как с учетом замечания 3 в формуле (79) $\nu = 0$ лишь в исключительных случаях.

На основе анализа формул (55), (77) с учетом соотношений (28) убеждаемся в справедливости неравенства

$$q(\tau) \leqslant \rho(\tau) \quad \forall \tau \in (0, 2/\delta). \tag{80}$$

Таким образом, стационарный вариационно-итеративный метод, как это явствует из оценок (54), (76) и неравенства (80), ускоряет сходимость стационарного итеративного процесса. Более того, первый метод сходится и при $\tau \in [2/\delta, 2/\eta)$, в то время как второй при таких значениях параметра расходится.

8. Оценка погрешности. Оценка (54) хотя и характеризует скорость сходимости метода, однако не конструктивна. В связи с этим возникает потребность в установлении конструктивных оценок погрешности.

Теорема 2. *Если радиально непрерывный и потенциальный оператор L удовлетворяет условию* (41), *то справедлива оценка*

$$\| x^* - x_k \|_X \leqslant \frac{\beta q^{k-m}}{\sqrt{\gamma\sigma}} \| C^{-1}(f - Lx_m) \|, \tag{81}$$

где x^* — обобщенное решение уравнения (40), *x_k — его приближение, построенное согласно стационарному вариационно-итеративному методу* (47)—(49), $0 \leqslant m \leqslant k$, $q < 1$ *при* $\tau \in (0, 2/\eta)$ *и C — линейный оператор, фигурирующий в формуле* (42)

Доказательство. Согласно лемме 6 справедливо тождество $h = Wv^*$, где $v^* = Qu^*$, $u^* = Gx^*$, в силу которого и формул (45), (56), (62), (52), (25) имеем

$$C^{-1}(f - Lx_k) = g - Au_k = h + Aw - A(w + Zv_k) = h - Wv_k = W\nu^* - Wv_k. \tag{82}$$

На основании соотношений (27) и (82) получаем

$$\sigma \| v^* - v_k \|^2 \leqslant (Wv^* - Wv_k,\ v^* - v_k) =$$
$$= (g - Au_k,\ v^* - v_k) \leqslant \| g - Au_k \| \| v^* - v_k \|,$$

откуда следует

$$\sigma\,\| v^* - v_k \| \leqslant \| g - Au_k \| = \| C^{-1}(f - Lx_k)\|. \tag{83}$$

Далее, в силу равенства

$$(Au^* - Au_k,\ u^* - u_k) = (Wv^* - Wv_k,\ v^* - v_k), \tag{84}$$

получающегося из выражения (39), если в нем положить $x = v^*$, $y = v_k$ и учесть формулы (53), (62), а также соотношений (1), (82)—(84) находим

$$\gamma\sigma \| u^* - u_k \|^2 \leqslant \sigma (Au^* - Au_k,\ u^* - u_k) = \sigma (g - Au_k,\ v^* - v_k) \leqslant \sigma \| g -$$

$$- Au_k \| \| v^* - v_k \| \leqslant \| g - Au_k \|^2 = \| C^{-1} (f - Lx_k) \|^2,$$

откуда с учетом формулы (74) вытекает справедливость оценки

$$\| x^* - x_k \|_X \leqslant \frac{\beta}{\sqrt{\gamma\sigma}} \| C^{-1} (f - Lx_k) \|. \tag{85}$$

С помощью соотношений (65) и (82) формулу (64) можно представить в одном из видов

$$v_k = \tau h + Sv_{k-1}, \quad v_k - v_{k-1} = \tau (g - Au_{k-1}). \tag{86}$$

Учитывая выражения (66) и (86), имеем

$$\| C^{-1} (f - Lx_k) \| = \| g - Au_k \| = \frac{1}{\tau} \| v_{k+1} - v_k \| = \frac{1}{\tau} \| Sv_k - Sv_{k-1} \| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{q}{\tau} \| v_k - v_{k-1} \| = q \| g - Au_{k-1} \| = q \| C^{-1} (f - Lx_{k-1}) \|. \tag{87}$$

Из неравенств (85) и (87) оценка (81) вытекает очевидным образом.

З а м е ч а н и е 5. Как частные случаи из оценки (81) получаются при $m = 0$ априорная и при $m = k$ апостериорная (85) оценки погрешности.

9. Н е с т а ц и о н а р н ы й в а р и а ц и о н н о-и т е р а т и в н ы й м е т о д. Представляет интерес нестационарный вариационно-итеративный метод, согласно которому приближения строятся по формулам

$$By_k = Bx_{k-1} + \tau_k (f - Lx_{k-1}), \tag{88}$$

$$x_k = y_k + \Delta_k, \quad \Delta_k \in X_0 \subset D(L), \tag{89}$$

а динамический параметр τ_k и поправка Δ_k определяются из условия минимума функционала

$$\Phi (u_k) = \int_0^1 \langle L (tx_k) - f,\ x_k \rangle\, dt. \tag{90}$$

Начальное приближение x_0 определяется так же, как и в стационарном методе.

Задача минимизации функционала (90) с учетом формул (56), (45) и использованием обозначений

$$r_k = C^{-1} (f - Lx_{k-1}) = g - Au_{k-1},$$

равносильна решению системы уравнений

$$PA (u_{k-1} + \tau_k r_k + w_k) = Pg, \quad w_k \in H_0 = GX_0, \tag{91}$$

$$(g - A (u_{k-1} + \tau_k r_k + w_k), r_k) = 0. \tag{92}$$

Согласно предположениям оператор A потенциален, сильно монотонен и липшиц-непрерывен, а поэтому параметр τ_k и элемент w_k из системы (91) и (92) определяются однозначно. Следовательно, так как $w_k = G\Delta_k$, приближения по формулам (88) и (89) строятся однозначно.

Используя методику работы [6], можно установить сходимость нестационарного вариационно-итеративного метода и показать, что его скорость сходимости лучше, чем скорость сходимости известного метода наискорейшего спуска. Более подробно этот вопрос освещен в работах [5, 6] для случая, когда A — линейный самосопряженый положительно определенный оператор.

1. *Соколов Ю. Д.* Метод осреднения функциональных поправок.— Киев : Наук. думка, 1967.— 336 с.
2. *Лучка А. Ю.* Теория и применение метода осреднения функциональных поправок.— Киев : Изд-во АН УССР, 1963.— 128 с.
3. *Курпель Н. С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1968.— 244 с.
4. *Лучка А. Ю.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1960.— 264 с.
5. *Лучка А. Ю., Нощенко О. Э., Тукалевская Н. И.* Вариационно-градиентный метод // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1984.— **24**, № 7.— С. 963—971.
6. *Лучка А. Ю.* Вариационно-итеративный метод.— Киев, 1983.— 52 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 83.55).
7. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М. : Мир, 1978.— 336 с.
8. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов.— М. : Наука, 1972.— 416 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 08.06.89