УДК 517.9

Я. С. Барис, О. Б. Лыкова

Интегральные многообразия и принцип сведения в теории устойчивости. II

Доказаны теоремы о сведении, согласно которым задача об устойчивости нулевого решения системы дифференциальных уравнений

$$dx/dt = A(t)x + B(t)z + g(t, x, z), \quad dz/dt = C(t)z + h(t, x, z)$$

сводится к задаче об устойчивости нулевого решения уравнения

$$dx/dt = A(t)x + B(t)\varphi(t, x) + g(t, x, \varphi(t, x)),$$

в котором вектор-функция $y = \varphi(t,x)$ задает локальное или нелокальное интегральное многообразие, содержащее график нулевого решения.

Доведені теореми про зведення, згідно з якими задача про стійкість нульового розв'язку системи диференціальних рівнянь

$$dx/dt = A(t)x + B(t)z + g(t, x, z), \qquad dz/dt = C(t)z + h(t, x, z)$$

зводиться до задачі про стійкість нульового розв'язку рівняння

$$dx/dt = A(t)x + B(t)\varphi(t, x) + g(t, x, \varphi(t, x)),$$

в якому вектор-функція $y = \varphi(t,x)$ задає локальний або нелокальний інтегральний многовид, що містить в собі графік нульового розв'язку.

В работах [1, 2] доказана теорема (обобщенный принцип сведения), формулирующая условия, при выполнении которых задача об устойчивости (асимптотической устойчивости, неустойчивости) нулевого решения системы векторных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = X(t, x, y), \quad dy/dt = Y(t, x, y) \tag{1}$$

сводится к аналогичной задаче для уравнения

$$dx/dt = X(t, x, \varphi(t, x)),$$

в котором вектор-функция $y = \varphi(t, x)$ задает локально устойчивое (локально асимптотически устойчивое или локально неустойчивое) интегральное многообразие (ИМ).

Выделив в (1) линейные члены, получим систему

$$dx/dt = A_0(t)x + B(t)y + g_0(t, x, y), \quad dy/dt = C_0(t)y + D(t)x + h_0(t, x, y). \tag{2}$$

Если соответствующая линейная однородная система имеет ИМ $y = Q(t)x$, то с помощью замены $y = Q(t)x + z$ система (2) приводится к системе вида

$$dx/dt = A(t)x + B(t)z + g(t, x, z), \quad dz/dt = C(t)z + h(t, x, z), \tag{3}$$

где

$$A = A_0 + BQ, \quad C = C_0 - QB, \quad g = g_0(t, x, Q(t)x + z),$$
$$h = h_0(t, x, Q(t)x + z) - Qg.$$

Предполагаем, что матричные функции A, B, C непрерывны на интервале $I \supset [0, \infty)$, а вектор-функции g, h непрерывны на множестве $I \times R^m \times V$, где V — некоторая область из пространства R^n, содержащая замкнутый шар V_ρ радиуса ρ с центром в нуле.

Настоящая работа посвящена конкретизации полученных в [1, 2] результатов на примере системы (3).

Определение 1. *Будем говорить, что для системы* (3) *имеет место критический случай, если существуют такие постоянные* N, K, $\nu > 0$, $0 \leqslant \chi < \nu$, *что нормированные при* $t = s$, $s \in I$, *фундаментальные* *матрицы* $X(t, s)$, $Z(t, s)$ *уравнений*

$$dx/dt = A(t)x, \quad dz/dt = C(t)z$$

подчинены оценкам

$$\| X(t, s) \| \leqslant K e^{\chi|t-s|}, \quad \| Z(t, s) \| \leqslant N e^{-\nu(t-s)}, \quad t \geqslant s.$$

Замечание 1. Если постоянную χ можно выбрать как угодно малой или равной нулю, то приходим к определению критического случая в смысле Ляпунова.

Обозначим через $C_\rho(\eta)$ множество вектор-функций $\varphi : I \times R^m \to V_\rho$, удовлетворяющих по x условию Липшица с некоторой постоянной $\eta > 0$. Расстояние на этом множестве определим с помощью нормы $|\cdot| = \sup \|\cdot\|$. Тогда $C_\rho(\eta)$ — полное метрическое пространство.

Если $\varphi^* \in C_\rho(\eta)$, то интегральное многообразие

$$\mathfrak{M} = \{(t, x, y) : y = \varphi^*(t, x), t \in I, x \in R^m\} \tag{4}$$

называется интегральным многообразием класса $C_\rho(\eta)$ или (ρ, η)-многообразием.

Справедлива следующая теорема о существовании (ρ, η)-многообразия системы (3).

Теорема 1. *Пусть для системы* (3) *имеет место критический случай и выполняются следующие условия:*

1. *Вектор-функции* $f = B(t)z + g$, h *непрерывны и удовлетворяют неравенствам*

$$\| f(t, \bar{x}, \bar{z}) - f(t, x, z) \| \leqslant \Lambda_1 \| \bar{x} - x \| + \Lambda \| \bar{z} - z \|,$$

$$\| h(t, \bar{x}, \bar{z}) - h(t, x, z) \| \leqslant \mathscr{L}_1 \| \bar{x} - x \| + \mathscr{L} \| \bar{z} - z \|,$$

$\| h(t, x, 0) \| \leqslant N_0$ ($\Lambda_1, \Lambda, \mathscr{L}_1, \mathscr{L}$ — *постоянные, причем* $\Lambda > 0$).

2. *Справедливы неравенства*

$$(\mathscr{L}\rho + N_0) N < \rho N, \quad \nu - \chi - K\Lambda_1 - KN\mathscr{L} > 2K\sqrt{N\mathscr{L}_1\Lambda}.$$

3. *Система* (3) *имеет нулевое решение.*

Тогда система (1) *имеет* (ρ, η)*-многообразие* (4), *содержащее график нулевого решения*: $\varphi^*(t, 0) \equiv 0$, $t \in I$.

Доказательство. Оценим сначала разность $x_1(t) - x_2(t)$, где $x_i(t) = \Psi(t, \tau, \zeta_i(\varphi_i))$ — решение задачи Коши

$$dx/dt = A(t)x + f(t, x, \varphi_i(t, x)), \quad x|_{t=\tau} = \zeta_i, \quad \varphi_i \in C_\rho(\eta), \quad i = 1, 2.$$

Так как

$$x_i(t) = X(t, \tau)\zeta_i + \int_\tau^t X(t, s) f(s, x_i(s), \varphi_i(s, x_i(s))) ds,$$

то из условий теоремы при $t \geqslant \tau$ вытекает неравенство

$$\| x_1(t) - x_2(t) \| \leqslant K e^{\chi(t-\tau)} \| \zeta_1 - \zeta_2 \| + K(\Lambda_1 + \Lambda\eta) \int_\tau^t e^{\chi(t-s)} \times$$

$$\times \| x_1(s) - x_2(s) \| ds + K\Lambda |\varphi_1 - \varphi_2| \int_\tau^t e^{\chi(t-s)} ds.$$

Полагая

$$\alpha(t) = Ku(\tau) + K\Lambda |\varphi_1 - \varphi_2| \int_\tau^t e^{-\chi s} ds, \quad u(t) = \| x_1(t) - x_2(t) \| e^{-\chi t},$$

$$\beta = K(\Delta_1 + \Lambda\eta),$$

приходим к неравенству

$$u(t) \leqslant \alpha(t) + \beta \int\limits_{\tau}^{t} u(s)\, ds.$$

Отсюда получаем

$$u(t) \leqslant \alpha(\tau) e^{\beta(t-\tau)} + \int\limits_{\tau}^{t} \alpha'(s) e^{\beta(t-s)} ds.$$

Возвращаясь к прежним обозначениям и решая полученное неравенство относительно $\| x_1(t) - x_2(t) \|$, находим искомую оценку при $t \geqslant \tau$. Аналогичная оценка имеет место при $t \leqslant \tau$. Объединяя их, приходим к искомой оценке

$$\| x_1(t) - x_2(t) \| \leqslant K \| \zeta_1 - \zeta_2 \| e^{\Delta|t-\tau|} + \frac{K\Lambda |\varphi_1 - \varphi_2|}{\Delta} [e^{\Delta|t-\tau|} - 1]$$

$$(\Delta = \chi + K(\Lambda_1 + \Lambda\eta) > 0). \tag{5}$$

Рассмотрим теперь отображение S, определяемое равенством

$$S\varphi(t, x) = \int\limits_{0}^{t} Z(t, s) h(s, \Psi, \varphi(s, \Psi))\, ds,$$

в котором $\Psi = \Psi(s, t, x/\varphi)$, $\varphi \in C_\rho(\eta)$.

Так как

$$\| S\varphi(t, x) \| \leqslant (\mathscr{L}\rho + N_0) N\nu^{-1},$$

то согласно условию 2

$$\| S\varphi(t, x) \| \leqslant \rho. \tag{6}$$

Кроме того, имеем

$$\| S\varphi_1(t, x_1) - S\varphi_2(t, x_2) \| \leqslant \int\limits_{0}^{t} Ne^{-\nu(t-s)} [(\mathscr{L}_1 + \mathscr{L}_2\eta) \| \Psi_1 - \Psi_2 \| + $$

$$+ \mathscr{L} |\varphi_1 - \varphi_2|]\, ds,$$

где $\Psi_i = \Psi(s, t, x_i/\varphi_i)$, $\varphi_i \in C_\rho(\eta)$, $i = 1, 2$.

Учитывая оценку (5) и условия теоремы, получаем неравенство

$$\| S\varphi_1(t, x_1) - S\varphi_2(t, x_2) \| \leqslant \eta \| x_1 - x_2 \| + \Theta |\varphi_1 - \varphi_2|, \tag{7}$$

в котором

$$\eta = (\nu - \chi - K\Lambda_1 - NK\mathscr{L})(2K\Lambda)^{-1} > 0, \quad \Lambda > 0,$$

$$\Theta = \frac{1}{2K}\left(1 - \frac{\chi + K\Lambda_1 - KN\mathscr{L}}{\nu}\right) < 1.$$

Из неравенств (6) и (7) вытекает, что отображение $S : C_\rho(\eta) \to C_\rho(\eta)$ является сжатием. Согласно принципу сжимающих отображений существует неподвижная точка $\varphi^*(t, x) \in C_\rho(\eta)$. График этой функции является (ρ, η)-многообразием системы (3).

Функция $\varphi^*(t, x)$ является пределом равномерно сходящейся последовательности

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_{k+1} = S\varphi_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Так как $\varphi_k(t, 0) \equiv 0$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$, то $\varphi^*(t, 0) \equiv 0$, т. е. рассматриваемое (ρ, η)-многообразие системы (3) содержит график нулевого решения. Теорема доказана.

Установим несколько лемм, которые понадобятся в процессе доказательства принципа сведения для системы (3).

Л е м м а 1 (о с у щ е с т в о в а н и и с е м е й с т в а И М). *Предположим, что относительно системы* (3) *выполняются условия теоремы* 1.

Тогда каждому вектору $a \in R^n$, *подчиненному оценке*

$$N \| a \| \leqslant \rho - (\mathcal{L}_\rho + N_0) N \nu^{-1}, \tag{8}$$

соответствует (ρ, η)*-многообразие*

$$\mathfrak{M}_a : y = \varphi(t, x, a), \quad t \geqslant 0, \quad x \in R^m \tag{9}$$

системы (3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем произвольный вектор $a \in R^n$ и с помощью определенного выше оператора S зададим оператор

$$S_a \varphi(t, x) = Z(t, 0) a + S\varphi(t, x), \quad \varphi \in C_\rho(\eta).$$

Так как

$$\| S_a \varphi(t, x) \| \leqslant N \| a \| + (\mathcal{L}\rho + N_0) N \nu^{-1},$$

то в силу (8)

$$\| S_a \varphi(t, x) \| \leqslant \rho.$$

Кроме того, имеем

$$S_a \varphi_1(t, x) - S_a \varphi_2(t, x) = S\varphi_1(t, x) - S\varphi_2(t, x).$$

Отсюда и из неравенства (6) вытекает, что S_a есть оператор сжатия. Значит, этот оператор имеет неподвижную точку $\varphi(t, x, a)$, которая определяет (ρ, η)-многообразие (9). Лемма доказана.

Л е м м а 2 (о с б л и ж е н и и и н т е г р а л ь н ы х м н о г о о б р а з и й п р и $t \to \infty$). *Пусть относительно системы* (3) *выполняются условия теоремы* 1.

Тогда для любых двух (ρ, η)*-многообразий, существование которых установлено в лемме* 1, *справедлива оценка*

$$\| \varphi(t, x, a_1) - \varphi(t, x, a_2) \| \leqslant N_1 e^{-\sigma t} \| a_1 - a_2 \|$$
$$(\beta + \chi < \sigma < \nu, \ N_1 \geqslant N, \ t \geqslant 0).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем некоторый вектор $a_n \in R^n$, подчиненный оценке (8). Согласно предыдущей лемме вектору a_k соответствует функция $z = \varphi(t, x, a_k)$, определяющая (ρ, η)-многообразие системы (3). Так как эта функция является неподвижной точкой оператора сжатия, то она является равномерным пределом последовательности

$$\varphi_0(t, x, a_k) = Y(t) a_k, \dots, \varphi_{i+1}(t, x, a_k) = S_{a_k} \varphi_i(t, x, a_k), \dots.$$

Очевидно, что при $i = 0$

$$\| \varphi_i(t, x, a_1) - \varphi_i(t, x, a_2) \| \leqslant N_1 e^{-\sigma t} \| a_1 - a_2 \| \tag{10}$$
$$(\beta + \chi < \sigma < \nu, \ N_1 \geqslant N, \ t \geqslant 0).$$

Предположим, что эта оценка выполняется при некотором $i = j$. Для доказательства леммы достаточно показать, что оценка (10) справедлива при $i = j + 1$.

С помощью рассуждений, аналогичных приведенным выше, получаем оценку

$$\| \varphi_{j+1}(t, x, a_1) - \varphi_{j+1}(t, x, a_2) \| \leqslant N e^{-\nu t} \| a_1 - a_2 \| + \left[\frac{(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}\eta) K\Lambda}{(\Delta + \sigma)(\nu - \Delta)} + \right.$$
$$\left. + \frac{\mathcal{L}}{\nu - \sigma} - \frac{(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}\eta) K\Lambda}{(\Delta + \sigma)(\nu - \sigma)} \right] N N_1 e^{-\sigma t} \| a_1 - a_2 \|,$$

которая совпадает с оценкой (10) при $i = j + 1$, если постоянная σ удовлетворяет неравенству

$$\left[\frac{(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}\eta) K\Lambda}{(\Delta + \sigma)(\nu - \Delta)} + \frac{\mathcal{L}}{\nu - \sigma} - \frac{(\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}\eta) K\Lambda}{(\Delta + \sigma)(\nu - \sigma)} \right] N < 1.$$

Запишем это неравенство в виде

$$p(\sigma) = (\nu - \Delta)\sigma^2 - b\sigma + c < 0,$$

где

$$b = (\nu - \Delta)^2 + (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}\eta) K\Lambda N - \mathcal{L}(\nu - \Delta) N,$$

$$c = [\mathcal{L}(\nu - \Delta) N + (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}\eta) K\Lambda N - (\nu - \Delta)\nu]\Delta.$$

С помощью очевидных преобразований получаем

$$p(\Delta) = 2(\nu - \Delta)\Delta(\mathcal{L}N - \nu + \Delta).$$

Так как

$$\Delta = \chi + K\Lambda_1 + K\Lambda\eta = \chi + K\Lambda_1 + \frac{1}{2}(\nu - \chi - K\Lambda_1 - NK\mathcal{L}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\nu + \chi + K\Lambda_1 - NK\mathcal{L}),$$

то

$$\mathcal{L}N - \nu + \Delta = \frac{1}{2}(\chi + K\Lambda_1 + (2 - K)\mathcal{L}N - \nu).$$

Следовательно, при $\Delta > 0$ выполняется неравенство $p(\Delta) < 0$. Отсюда в силу непрерывности $p(\sigma)$ вытекает существование такого $\mu > 0$, что $p(\Delta + \mu) < 0$. Этим доказана справедливость оценки (10) при $i = j + 1$. По индукции заключаем, что оценка (10) верна для каждого натурального числа i. Переходя при $i \to \infty$ к пределу в оценке (10), убеждаемся в справедливости леммы 2.

Лемма 3 (об асимптотической эквивалентности). *Предположим, что относительно системы* (3) *выполнены условия теоремы* 1.

Тогда уравнения

$$dx/dt = A(t)x + f(t, x, \varphi(t, x, a_1)) \tag{11}$$

и

$$dx/dt = A(t)x + f(t, x, \varphi(t, x, a_2)) \tag{12}$$

асимптотически эквивалентны, причем разность $u(t) = x_2(t) - x_1(t)$ *соответствующих решений этих уравнений подчинена оценке*

$$\| u(t) \| \leqslant K_1 \| a_1 - a_2 \| e^{-\sigma t}, \quad t \geqslant 0, \quad K_1 \geqslant K, \quad \sigma > \Delta. \tag{13}$$

Доказательство. Рассмотрим интегральное уравнение

$$u(t) = -\int_t^\infty X(t, s) F(s, u(s))\, ds, \tag{14}$$

где

$$F(t, u) = f(t, x_1 + u, \varphi(t, x_1 + u, a_2)) - f(t, x_1, \varphi(t, x_1, a_1)).$$

С помощью метода последовательных приближений можно показать, что каждому решению $x_1(t)$ уравнения (11) соответствует решение $x_2(t) = x_1(t) + u(t)$ уравнения (12) такое, что функция $u(t)$ подчинена оценке (13) и удовлетворяет интегральному уравнению (14) Можно также показать, что решение интегрального уравнения (14), подчиненное оценке (13), единственно.

Каждому решению $x_1(t)$ уравнения (11) поставим в соответствие единственное решение $u(t)$ интегрального уравнения (14), подчиненное оценке (13). Далее возьмем решение $x_2(t)$ уравнения (12), удовлетворяющее начальному условию

$$x_2(0) = x_1(0) - \int_0^t X(0, s) F(s, u(s))\, ds.$$

Так как решения $x_1(t)$ и $x_2(t)$ полностью задаются начальными условиями, то каждому решению $x_1(t)$ уравнения (11) соответствует единственное решение $x_2(t)$ уравнения (12) такое, что разность $u(t)$ этих решений подчинена оценке (13).

Аналогично доказывается, что каждому решению $x_2(t)$ уравнения (12) соответствует единственное решение $x_1(t)$ уравнения (11) такое, что их разность $u(t)$ подчинена оценке (13). Следовательно, между решениями уравнений (11) и (12) установлено взаимно однозначное соответствие такое, что разность соответствующих решений подчинена оценке (13). Отсюда вытекает справедливость утверждения леммы. Лемма доказана.

Теорема 2 (принцип сведения). *Предположим, что система* (3) *удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Нулевое решение этой системы* (*асимптотически*) *устойчиво тогда и только тогда, когда* (*асимптотически*) *устойчиво нулевое решение уравнения*

$$dx/dt = A(t)x + B(t)\varphi^*(t, x) + g(t, x, \varphi^*(t, x)), \tag{15}$$

где φ^* — *вектор-функция, задающая интегральное многообразие* (4).

Доказательство. Докажем сначала локальную асимптотическую устойчивость интегрального многообразия (4). С этой целью возьмем произвольное решение $v(t) = (x(t), z(t))$ системы (3), начальное значение которого подчинено неравенству

$$N\|v(0)\| \leqslant \rho - (\mathcal{L}\rho + N_0)\nu^{-1}N. \tag{16}$$

Рассмотрим интегро-функциональное уравнение

$$\varphi(t, x, a) = \mathcal{L}(t, 0)a + \int \varphi(t, x, a), \tag{17}$$

соответствующее системе (3).

Пусть вектор $a = z(0)$. Тогда в силу (16) этот вектор удовлетворяет оценке (8). Согласно лемме 1 уравнение (17) имеет решение $\varphi(t, x, a)$, определяющее (ρ, η)-многообразие (9) системы (3). Покажем, что график решения $V(t)$ лежит на этом ИМ, т. е. $\varphi(t, x(t), a) \equiv z(t)$, $t \in I$.

Так как φ определяет ИМ системы (3), то достаточно, чтобы это тождество выполнялось только при $t = 0$: $\varphi(0, x(0), a) = z(0)$. Чтобы убедиться в справедливости этого равенства, достаточно заметить, что $z(0) = a$, и из (17) вытекает равенство $\varphi(0, x(0), a) = a$.

Значит, решение $V(t)$ системы (3) лежит на некотором (ρ, η)-многообразии (9) системы (3).

Согласно лемме 3 существует решение $x = \bar{x}(t)$ уравнения (15) такое, что

$$\|x(t) - \bar{x}(t)\| \leqslant K_1\|a\|e^{-\sigma t}, \quad t \geqslant 0, \quad \sigma > \Delta. \tag{18}$$

Введем в рассмотрение решение

$$\bar{v}(t) = (\bar{x}(t), \bar{z}(t)) \quad (\bar{z}(t) = \varphi^*(t, \bar{x}(t)).$$

Так как

$$\|z(t) - \bar{z}(t)\| \leqslant \|\varphi(t, x(t), a) - \varphi^*(t, x(t))\| + \|\varphi^*(t, x(t)) - \varphi^*(t, \bar{x}(t))\|,$$

то в силу леммы 2 и определения (ρ, η)-многообразия справедлива оценка

$$\|z(t) - \bar{z}(t)\| \leqslant N_1\|a\|e^{-\sigma t} + \eta\|x(t) - \bar{x}(t)\|.$$

Отсюда и из оценки (18) вытекает локальная асимптотическая устойчивость (ρ, η)-многообразия (4) системы (3).

Поэтому справедливость теоремы 2 вытекает из теоремы 1 (обобщенного принципа сведения) работы [1]. Теорема 2 доказана.

В приложениях часто встречаются системы вида (3), которые удовлетворяют условиям теоремы 1 только на множестве

$$I \times U_r \times V, \tag{19}$$

где U_r — замкнутый шар радиуса $r > 0$ с центром в нуле. В таком случае сужения на множество (19) функций g и h продолжим на множество $I \times R^m \times V$ с сохранением условия Липшица [3]. Обозначим полученные продолжения $\hat{g}$, $\hat{h}$ и рассмотрим систему

$$dx/dt = A(t)x + B(t)z + \hat{g}(t, x, z), \quad dz/dt = C(t)z + \hat{h}(t, x, z). \tag{20}$$

Относительно системы (19) справедливы доказанные выше теоремы. При этом сужение ИМ системы (20) на множество (19) есть локальное ИМ системы (3).

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 3 (классический принцип сведения). *Предположим, что относительно системы* (3) *на множестве вида* (19) *выполняются условия теоремы* 1. *Тогда система* (3) *имеет локальное* (ρ, η)-*многообразие*

$$\mathfrak{M}_1 = \{(t, x, y) : y = \varphi_1(t, x),\ t \geqslant 0,\ x \in U_r\},$$

содержащее график нулевого решения; нулевое решение этой системы (асимптотически) устойчиво тогда и только тогда, когда (асимптотически) устойчиво нулевое решение уравнения

$$dx/dt = A(t)x + B(t)\varphi_1(t, x) + g(t, x, \varphi_1(t, x)).$$

Пример. Согласно [4] детерминистской моделью развития эпидемий является система дифференциальных уравнений

$$dx_1/dt = -\beta x_1 y, \quad dx_2/dt = \gamma y, \quad dy/dt = \beta x_1 y - \gamma y, \tag{21}$$

где постоянные $\beta \geqslant 0$, $\gamma > 0$.

Очевидно, что относительно этой системы условия теоремы 1 не выполняются при всех вещественных x_1, x_2 и $|y| \leqslant \rho$. Покажем, что они выполняются на некотором множестве вида (19).

Так как $X(t, s) = \operatorname{diag}[1, 1]$, $Z(t, s) = e^{-\gamma(t-s)}$, $\gamma > 0$, то для системы (20) имеет место критический случай. На указанном множестве функции

$$f = \operatorname{colon}(-\beta x_1 y, \gamma y), \quad h = \beta x_1 y$$

удовлетворяют условию 1 с «постоянными»

$$\Lambda_1 = \beta\rho, \quad \Lambda = \sqrt{\beta^2 r^2 + \gamma^2}, \quad \mathscr{L}_1 = \beta\rho, \quad \mathscr{L} = \beta r, \quad N_0 = 0.$$

Так как $\chi = 0$, $K = \sqrt{2}$, $N = 1$, $\nu = \gamma$, то условие 2 на множестве (19) выполнено, если

$$\beta r < \rho\gamma, \quad \gamma - \sqrt{2}\beta(\rho + r) > 2\sqrt{2\beta\rho\sqrt{\beta^2 r^2 + \gamma^2}}.$$

Эти неравенства, очевидно, имеют место при достаточно малых $r > 0$, $\rho > 0$. Таким образом, на некотором множестве вида (19) выполняются все условия теоремы 1.

Согласно теореме 3 система (21) имеет локальное (ρ, η)-многообразие, содержащее график нулевого решения. В действительности эта система имеет (нелокальное) (ρ, η)-многообразие $\mathfrak{M}_0 : y = 0$. На многообразии $\mathfrak{M}_0$ система (21) сводится к системе уравнений $dx_1/dt = 0$, $dx_2/dt = 0$, нулевое решение которой устойчиво. Согласно теореме 3 нулевое решение системы (21) также устойчиво.

1. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Интегральные многообразия и принцип сведения в теории устойчивости. I // Укр. мат. журн.— 1989.— **41**, № 12.— С. 1607—1613.
2. *Барис Я. С., Лыкова О. Б.* Приближенные интегральные многообразия в теории устойчивости.— Киев, 1988.— 64 с.— (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.48).
3. *Теория* показателей Ляпунова / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий.— М. : Наука, 1966.— 576 с.
4. *Бейли Н.* Математика в биологии и медицине.— М. : Мир, 1970.— 326 с.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 14.02.89