УДК 512.55

А. А. Туганбаев

Кольца с проективными главными правыми идеалами

Доказано, что если A — дистрибутивное справа кольцо, алгебраичное над своим центром, у которого все главные правые идеалы проективны, то A — дистрибутивное слева кольцо.

Доведено, що коли A — дистрибутивне справа кільце, алгебраїчне над своїм центром, у якого всі головні праві ідеали проективні, то A — дистрибутивне зліва кільце.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, модули — унитарными и, когда не указана сторона, правыми. Дистрибутивным модулем называется модуль с дистрибутивной решеткой подмодулей. Кольцо называется риккартовым справа, если все его главные правые идеалы проективны, что равносильно порождаемости идемпотентом правого аннулятора любого его элемента. Словосочетание «риккартово кольцо» означает, что соответствующие условия выполнены справа и слева. Кольцо A называется алгебраическим над своим центром Z, если для любого элемента $a \in A$ найдется такой многочлен $f \in Z[x]$, что $f(a) = 0$ и старший коэффициент f — неделитель нуля в Z.

В [1] доказано, что дистрибутивная справа область, алгебраическая над своим центром, является дистрибутивной слева. В теореме 1 обобщим эту теорему на риккартовы кольца. (Всякая область является, очевидно, риккартовым кольцом.) Кроме того, заметим, что дистрибутивная справа область — не обязательно дистрибутивное слева кольцо. Можно проверить, что соответствующий пример дает кольцо из упражнения 8.6.6 из [2, с. 385].

Теорема 1. *Пусть A — риккартово справа кольцо, алгебраическое над своим центром. Тогда правая дистрибутивность кольца A равносильна его левой дистрибутивности.*

Среди вспомогательных результатов настоящей статьи выделим предложение 1, обобщающее теорему 2 из [3], в которой доказано, что риккартово нормальное кольцо, целое над своим центром, является порядком в строго регулярном кольце. (Кольцо называется нормальным, если все его идемпотенты центральны, и строго регулярным, если в нем для любого элемента a разрешимо уравнение $a^2x = a$.)

Предложение 1. *Пусть A — риккартово нормальное кольцо, алгебраическое над своим центром. Тогда A — порядок в строго регулярном кольце.*

Кольцо без ненулевых нильпотентных элементов называется редуцированным кольцом. Модуль называется цепным, если любые его два подмодуля сравнимы по включению. Кольцо называется инвариантным справа (слева), если все его правые (левые) идеалы являются идеалами. Через $r(B)$ и $l(B)$ обозначаются соответственно правый и левый аннуляторы подмножества B кольца A. Через $Z(A)$, $B(A)$, $D(A)$ обозначаются соответственно центр, множество всех центральных идемпотентов, множество всех неделителей нуля кольца A. Мультипликативно замкнутое подмножество T кольца A называется множеством правых знаменателей в A, если существует такое кольцо A_T и канонический гомоморфизм $f_T \equiv f\colon A \to A_T$, что все элементы из $f(T)$ обратимы в A_T, каждый элемент из A_T имеет вид $f(a) f(t)^{-1}$, где $a \in A$, $t \in T$, причем $\operatorname{Ker}(f) = \{a \in A \mid T \cap r(a) \neq \varnothing\}$. Кольцо A_T называется правым кольцом частных для A по T. Через $M(A)$ обозначается множество всех максимальных идеалов булева кольца $B(A)$. Умножение в $B(A)$ индуцировано умножением в A, а сумма центральных идемпотентов f, g определяется как $f + g - 2fg$. Для любого $m \in M(A)$ и модуля N_A через A_m и N_m обозначаются фактор-кольцо A/mA и модуль N/Nm. Через h_m обозначается канонический эпиморфизм $A \to A_m$, и вместо $h_m(a)$ пишем a_m для любого элемента $a \in A$. Через $d(f)$ и $g(f)$ обозначаются степень и старший коэффициент многочлена f. Пусть A — кольцо, алгебраическое над своим центром Z. Для любого элемента $a \in A$ через $F_A(a)$ обозначается множество всех многочленов $f \in$

$\in Z[x]$ минимальной возможной степени, для которых $f(a) = 0$ и $g(f) \in D(Z)$. При этом через $n_A(a)$ обозначается число $g(f)$, где $f \in F_A(a)$.

Следующая лемма 1 известна [4].

Лемма 1 [4]. *Риккартово справа или слева нормальное кольцо является риккартовым редуцированным кольцом, в котором каждый элемент является произведением центрального идемпотента на неделитель нуля, а правый и левый аннуляторы любого подмножества совпадают.*

Лемма 2. *Если a, b — элементы нормального кольца A, причем $ab = 1$, то $ba = 1$.*

Лемма 2 вытекает из того, что ba — центральный идемпотент.

Через (B) обозначается идеал кольца A, порожденный его подмножеством B.

Лемма 3 [5, с. 286]. *Если a, b — элементы редуцированного кольца A, то равенство $ab = 0$ равносильно равенству $(a) \cap (b) = 0$. В частности, A — нормальное кольцо, в котором левый и правый аннуляторы любого подмножества совпадают.*

Лемма 4. *Пусть T — множество правых знаменателей в кольце A, $Q \equiv A_T$, $f: A \to Q$ — канонический гомоморфизм. Тогда а) если A — риккартово справа кольцо, то Q — риккартово справа кольцо; б) если A — редуцированное кольцо, то Q — редуцированное кольцо; в) если A — риккартово нормальное кольцо, то Q — риккартово нормальное редуцированное кольцо.*

Доказательство. П. а) доказан в лемме 8 из [6];

б) для любого элемента $a \in A$ будем писать $\bar{a}$ вместо $f(a)$.

Пусть $a \in A$, $t \in T$, $q = \bar{a}\bar{t}^{-1} \in Q$, $q^2 = 0$. Докажем, что $q = 0$. Пусть $\bar{t}^{-1}\bar{a} = \bar{b}\bar{u}^{-1}$, где $b \in A$, $u \in T$. Тогда $\bar{a}\bar{b} = \bar{a}\bar{b}\bar{u}^{-1}\bar{u} = q^2\bar{t}\bar{u} = 0$. Поэтому $abs = 0$ для некоторого $s \in T$. Далее пользуемся леммой 3. Так как $bs \in r(a)$, то $utbs \in r(a)$. Пусть $x \equiv au = tb \in A$. Тогда $x^2 s = 0$, откуда $xs \in r(x) = l(x)$. Следовательно, $(xs)^2 = 0$, $xs = 0$, $\bar{x} = 0$, $q = \overline{xu}^{-1}\bar{t}^{-1} = 0$;

в) утверждение следует из пп. а) б) и лемм 1, 3.

Лемма 5 [3]. *Если риккартово нормальное кольцо является правым порядком в кольце Q, то кольцо Q строго регулярно.*

Лемма 6. *Пусть A — риккартово нормальное кольцо, алгебраическое над своим центром, B — ненулевой прямой сомножитель кольца A, $Z \equiv Z(B)$. Тогда $D(Z) = Z \cap D(B)$ и для любого элемента $a \in D(B)$ найдется такой элемент $b \in D(B)$, что $ab = c \in Z \cap D(B) = D(Z)$.*

Доказательство. Так как правый аннулятор любого элемента кольца B порождается центральным идемпотентом, то $D(Z) = Z \cap D(B)$. Пусть $a \in D(B)$, $n = n_B(a)$. Доказательство будем вести индукцией по n. Если $n = 1$, то $ab = c$, где $b \in D(B)$, $c \in Z$. Тогда $c \in D(B)$ и лемма доказана, поскольку $D(Z) \subseteq D(B)$. Допустим, что утверждение верно для всех чисел, меньших n. Пусть $f \in F_B(a)$, $n = d(f)$, f_i — коэффициенты при x^i многочлена f, $m \equiv \sum_{i=1}^{n} a^{i-1} f_i$. По лемме 1 найдется такой идемпотент $t \in B$ и $d \in D(B)$, что $f_0 = tb$. Тогда $am = -f_0 \in D(tB)$. Если $E \equiv (1-t)B$, то $f_n(1-t) \in D(E)$, $m(1-t) = 0$, откуда $n > n_E(a(1-t))$. По предположению индукции найдутся такие элементы $b_1 \in D(E)$, $c_1 \in D(Z(E))$, что $a(1-t)b_1 = c_1$. Так как $amt = -f_0$ и $f_0 \in D(tB)$, то $mt \in D(tB)$. Пусть $c \equiv c_1 - f_0$, $b \equiv b_1 + mt$. Тогда $ab = c$, $b \in D(B)$, $c \in D(Z)$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть A — риккартово нормальное кольцо, алгебраическое над своим центром Z, Q — кольцо частных кольца A относительно множества $Z \cap D(A)$. Тогда кольцо Q строго регулярно и A — порядок в кольце Q.*

Доказательство. По леммам 4 (в)) и 2 Q—риккартово нормальное кольцо, в котором каждый обратимый справа элемент обратим. Отсюда и из леммы 5 следует, что достаточно доказать правую обратимость в кольце Q любого элемента $a \in D(A)$. По лемме 6 найдутся такие элементы

$b \in A$, $c \in Z \cap D(A)$, что $ab = c$. Так как элемент c обратим в Q, то элемент a обратим справа в кольце Q.

Доказательство предложения 1. Утверждение вытекает из леммы 7.

Лемма 8. *Пусть N_A — модуль над кольцом A. Тогда а) $(G \cap H)_m = G_m \cap H_m$, $(G + H)_m = G_m + H_m$ для любых подмодулей G и H из N и всех $m \in M(A)$; б) если G и H — такие подмодули модуля N, что $G_m = H_m$ для всех $m \in M(A)$, то $G = H$; в) если $n \in N$, $m \in M(A)$ и $n_m = 0$, то $n(1 - t) = 0$ для некоторого элемента $t \in m$; г) если элемент n модуля N имеет в кольце A нулевой правый аннулятор, то $n_m \neq 0$ для любого $m \in M(A)$.*

Доказательство. Пп. а), б), в) доказаны в [7]. П. г) следует из п. в).

Лемма 9. *Для модуля N_A равносильны условия а) N_A — дистрибутивный модуль; б) для любого $m \in M(A)$ модуль N_m над кольцом A_m дистрибутивен.*

Доказательство. Импликация а) $\Rightarrow$ б) очевидна. Импликация б) $\Rightarrow$ а) вытекает из леммы 8 а), б).

Лемма 10. *Пусть A — риккартово справа или слева нормальное кольцо, обладающее правым или левым классическим кольцом частных. Тогда а) для любого $m \in M(A)$ кольцо A_m является областью; б) если кольцо A алгебраично над своим центром, то для любого $m \in M(A)$ кольцо A_m алгебраично над своим центром; в) если любое фактор-кольцо A, являющееся областью, дистрибутивно слева (справа), то A — дистрибутивное слева (справа) кольцо.*

Доказательство. П. а) доказан в [7]. Так как по п. а) все кольца A_m являются областями, то п. б) следует из леммы 8 г) П. в) вытекает из леммы 9 и п. а).

Лемма 11. *Пусть A — дистрибутивное справа или слева кольцо. Тогда а) A — нормальное кольцо; б) если A — риккартово справа или слева кольцо, то A — риккартово кольцо.*

Доказательство. П. а) доказан в [8]. П. б) следует из п. а) и леммы 1.

Доказательство теоремы 1. По леммам 1 и 11 можно считать, что A — риккартово нормальное кольцо. По предложению 1 кольцо A обладает классическим кольцом частных. По лемме 10 а), б) для любого $m \in M(A)$ кольцо A_m является областью, алгебраической над своим центром. Тогда правая дистрибутивность кольца A_m равносильна его левой дистрибутивности [1]. Утверждение следует теперь из леммы 10 в).

1. *Gräter J.* Ringe mit distributivem rechtsidealverband // Results Math.— 1987.— **12**.— S. 95—98.
2. *Кон П.* Свободные кольца и их связи.— М. : Мир, 1975.— 424 с.
3. *Hirano Y., Hongan M., Ôhori M.* On right p. p. rings // Math. J. Okayama Univ.— 1982.— **24**, N 2.— P. 99—109.
4. *Endo S.* Note on p. p. rings // Nagoya Math. J.— 1960.— **17**.— P. 167—170.
5. *Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М.* Радикалы алгебр и структурная теория.— М. : Наука, 1979.— 496 с.
6. *Туганбаев А. А.* Наследственные кольца // Мат. заметки.— 1987.— **41**, № 3.— С. 303—312.
7. *Ôhori M.* Some studies on generalized p. p. rings and hereditary rings // Math. J. Okayama Univ.— 1985.— **27**.— P. 53—70.
8. *Stephenson W.* Modules whose lattice of sulmodules is distributive // Proc. London Math. Soc.— 1974.— **28**, N 2.— P. 291—310.
9. *Туганбаев А. А.* Кольца с плоскими правыми идеалами и дистрибутивные кольца // Мат. заметки.— 1985.— **38**, № 2.— С. 218—228.

Моск. энерг. ин-т

Получено 20.09.88