УДК 519.21

Ю. В. Кук, канд. физ.-мат. наук (Ин-т кибернетики АН Украины, Киев),
Ю. И. Петунин, д-р физ.-мат. наук (Киев. ун-т)

ПРОВЕРКА НЕСКОЛЬКИХ ГИПОТЕЗ С ПОМОЩЬЮ ОПТИМАЛЬНЫХ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ

The paper deals with the study of the structure of the critical function of the optimal statistical criterion for testing an arbitrary finite set of simple hypotheses.

Вивчається структура критичної функції оптимального статистичного критерію для перевірки довільного скінченного числа простих альтернативних гіпотез.

Настоящая работа является продолжением [1]. Мы будем предполагать известными определения и обозначения, приведенные в [1].

Следующая теорема описывает структуру критической функции оптимального рандомизированного критерия.

Теорема 1. *Для любой нормы, определенной в векторном пространстве* E_N, *существует рандомизированный оптимальный статистический критерий, проверяющий истинность конкурирующих гипотез* $H_1, H_2, \ldots, H_N$, *который задается критической функцией* $\varphi^* = (\varphi_1^*, \ldots, \varphi_N^*)$:

$$\varphi_j^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad G_j(t) < G_l(t), \ \forall\, l = \overline{1, N};\ l \neq j; \\ \alpha_{l_1, \ldots, l_k}(j) & \text{при} \quad G_j(t) = G_{l_1}(t) = \ldots = G_{l_k}(t) < G_i(t) \quad \forall\, i = \overline{1, N}; \\ & i \neq l_\nu,\ \nu = \overline{1, k};\ l_\nu \in \{1, \ldots, N\};\ l_\nu \neq l_\mu,\ \nu \neq \mu;\ j \neq l_\nu, \\ 0 & \text{в остальной части пространства } R_m, \end{cases} \tag{1}$$

где

$$G_j(t) = \sum_{i=1,\, i \neq j}^{N} L_j(i) f_i(t) \lambda_i, \quad j = \overline{1, N}, \tag{2}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ *— числа, зависящие от вида нормы в* E_N. $\alpha_{l_1, \ldots, l_k}(j)$, $l_\nu \in \{1, \ldots, N\}$, $\nu = \overline{1, k}$, *— положительные числа, определяемые нормой в* E_N *и удовлетворяющие условиям:*

1) $\alpha_{l_1, \ldots, l_k}(j) + \alpha_{j, l_2, \ldots, l_k}(l_1) + \ldots + \alpha_{l_1, \ldots, l_{k-1}, j}(l_k) = 1$;

2) *значение* $\alpha_{l_1, \ldots, l_k}(j)$ *не изменяется от перестановки индексов* $l_1, \ldots, l_k$.

Доказательство. Покажем, что вектор риска r_{φ^*} с минимальной нормой будет граничной точкой множества всех векторов риска $\mathfrak{R}$. Действительно, в силу леммы 1 [1] множество $\mathfrak{R}$ выпукло и замкнуто. Если $\mathfrak{R}$ не является телом, то каждая его точка граничная, поэтому в этом случае утверждение того, что r_{φ^*} принадлежит границе Γ множества $\mathfrak{R}$, очевидно. Пусть $\mathfrak{R}$ — тело. Предположим противное: $r_{\varphi^*} \notin \Gamma$. Тогда отрезок, соединяющий начало координат и точку r_{φ^*}, пересекает границу $\mathfrak{R}$ в некоторой точке r'_φ, расположенной на более близком расстоянии от начала координат, чем r_{φ^*}, т. е. $\| r'_\varphi \| < \| r_{\varphi^*} \|$, но тем самым мы приходим к противоречию с определением r_{φ^*}. Поэтому r_{φ^*} является граничной точкой $\mathfrak{R}$. Так как r_{φ^*} — граничная точка $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{R}$ — выпуклое множество, существует опорная гиперплоскость для $\mathfrak{R}$ в точке r_{φ^*}. Другими словами, существуют постоянные $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$, имеющие свойство

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j (r_{\varphi^*}(j) - x_j) \le 0, \quad \forall\, (x_1, \dots, x_N) \in \Re. \tag{3}$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j r_{\varphi^*}(j) \le \sum_{j=1}^{N} \lambda_j r_{\varphi}(j), \quad \forall\, r_\varphi \in \Re, \tag{4}$$

где $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ — критическая функция, отвечающая точке r_φ.

Принимая во внимание (1) [1], переписываем (4) следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \left\{ \sum_{k=1, k\ne i}^{N} L_k(i) \int_{R_m} \varphi_k^*(t) f_i(t) \mu(dt) \right\} \le \sum_{j=1}^{N} \lambda_j r_\varphi(j), \quad \forall\, \varphi \in \Phi.$$

Отсюда получаем $\forall\, \varphi \in \Phi$

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{R_m} \left\{ \sum_{i=1,\, i\ne j}^{N} L_j(i) f_i(t) \lambda_i \right\} \varphi_j^*(t) \mu(dt) \le \sum_{j=1}^{N} \lambda_j r_\varphi(i).$$

Или, учитывая (2), имеем

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{R_m} G_j(t) \varphi_j^*(t) \mu(dt) \le \sum_{j=1}^{N} \int_{R_m} G_j(t) \varphi_j(t) \mu(dt) \le \sum_{i=1}^{N} \lambda_i r_\varphi(i), \quad \forall\, \varphi \in \Phi. \tag{5}$$

Из неравенства (5) вытекает, что критическая функция $\varphi^* = (\varphi_1^*, \dots, \varphi_N^*)$, определяющая минимум выражения $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i r_\varphi(i)$, должна иметь компоненты, имеющие следующие свойства:

1) $\varphi_j^*(t)$ равна единице на множестве $\{t\colon G_j(t) < G_i(t),\ i = \overline{1, N};\ i \ne j\}$, $j = \overline{1, N}$;

2) если множество $\{t\colon G_j(t) = G_{l_1}(t) = \dots = G_{l_k}(t) < G_i(t),\ i = \overline{1, N};\ i \ne l_1 \ne \dots \ne l_k \ne j\}$ не пусто, то сумма $\varphi_j^*(t) + \varphi_{l_1}^*(t) + \dots + \varphi_{l_k}^*(t)$ принимает на этом множестве значение 1;

3) в остальной части пространства R_m $\varphi_j^*(t)$ равна нулю.

Поэтому функция $\varphi_j^*(t)$ должна иметь вид (1), где числа $\alpha_{l_1, \dots, l_k}(j)$, $j = \overline{1, N}$; $j \ne l_1 \ne \dots \ne l_k$, $l_\nu \in \{1, N\}$, удовлетворяют условиям 1 и 2 теоремы 1. Числа $\lambda_1, \dots, \lambda_N$, а также числа $\alpha_{l_1, \dots, l_k}(j)$, $j = \overline{1, N}$; $l_\nu = \{\overline{1, N}\}$, $\nu = \overline{1, k}$; $l_\nu \ne l_\mu$ при $\nu \ne \mu$, $j \ne l_\nu$, зависят от точки r_{φ^*}, которая определяется нормой в E_N. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $\forall\, (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in E_N$ *попарные пересечения областей* $V_1(\lambda_1, \dots, \lambda_N), \dots, V_N(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ *пространства* R_m, *определяемых соотношениями*

$$V_j(\lambda_1, \dots, \lambda_N) = \left\{ t\colon G_j(t) \le \left\{ \sum_{i=1,\, i\ne l}^{N} G_l(t),\ l = \overline{1, N},\ l \ne j \right\}, \right.$$

где $G_j(t) = \sum_{i=1,\, i\ne j}^{N} L_j(i) f_i(t) \lambda_i$ *являются множествами* μ*-меры нуль. Тогда для любой нормы, заданной на векторном пространстве* E_N, *существуют та-*

кие значения $\lambda_j = \lambda_j^0$, $j = \overline{1, N}$, *что нерандомизированный критерий для проверки гипотез* $H_1, \ldots, H_N$, *порожденный областями* $V_1(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_N^0), \ldots, V_N(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_N^0)$, *является оптимальным статистическим критерием.*

Доказательство следствия 1 очевидно.

Следствие 2. *Пусть потери* $L_i(j)$ *не зависят от* i: $L_i(j) = L_j$; $i, j = \overline{1, N}$; $i \neq j$. *Тогда функции* $\varphi_j^*(t)$, $j = \overline{1, N}$; *о которых идет речь в теореме* 1, *имеют вид*

$$\varphi_j^*(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } g_j(t) > g_l(t), \ \forall\, l = \overline{1, N};\ l \neq j; \\ \alpha_{l_1, \ldots, l_k}(j) & \text{при } g_j(t) = g_{l_1}(t) = \ldots g_{l_k}(t) > g_i(t); \\ & \forall i \in \{\overline{1, N}\},\ i \neq j \neq l_1 \neq \ldots \neq l_k;\ l_\nu \in \{\overline{1, N}\}; \\ 0 & \text{в остальной части пространства } R_m, \end{cases} \tag{6}$$

где $g_j(t) = L_j \lambda_j f_j(t)$, $j = \overline{1, N}$; *числа* λ_j, $j = \overline{1, N}$; *и* $\alpha_{l_1, \ldots, l_k}(j)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1.

Доказательство. Действительно, в этом случае

$$r_\varphi(j) = L_j[1 - P(H_j \mid H_j)] = L_j\left[1 - \int_{R_m} \varphi_j(t) f_j(t) \mu(dt)\right]. \tag{7}$$

Подставляя (7) в (4), имеем

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j L_j - \sum_{j=1}^{N} \int_{R_m} \varphi_j^*(t) \{\lambda_j L_j f_j(t)\} \mu(dt) \leq \sum_{j=1}^{N} \lambda_j r_\varphi(j), \quad \forall\, r_\varphi \in \Re. \tag{8}$$

Отсюда получаем, что критическая функция $\varphi^* = (\varphi_1^*, \ldots, \varphi_N^*)$, определяющая минимум выражения $\sum_{j=1}^{N} \lambda_j r_\varphi(j)$, должна иметь вид (6). Следствие доказано.

Следствие 3. *Для* l_1*-критерия с весом* $(\pi_1, \ldots, \pi_N)$ (*байесовского критерия с априорными вероятностями* $\pi_1, \ldots, \pi_N$) *в выражении для критической функции* $\varphi^* = (\varphi_1^*, \ldots, \varphi_N^*)$ *значения* λ_j *равны* π_j, $j = \overline{1, N}$; $\alpha_{l_1, \ldots, l_k}(j)$ — *произвольные положительные числа, удовлетворяющие условиям* 1, 2 *теоремы* 1, *конкретное значение которых не влияет на величину нормы* r_{φ^*} (*на байесовский риск*).

Доказательство. Действительно, по определению нормы в пространстве l_1 с весом $(\pi_1, \ldots, \pi_N)$ имеем

$$\| r_{\varphi^*} \| = \pi_1 r_{\varphi^*}(1) + \ldots + \pi_N r_{\varphi^*}(N) \leq \| r_\varphi \|, \quad \forall\, r_\varphi \in \Re. \tag{9}$$

Сравнивая (9) и (4), замечаем, что роль λ_j, $j = \overline{1, N}$, в выражении для $\varphi^* = (\varphi_1^*, \ldots, \varphi_N^*)$ играют числа π_j, $j = \overline{1, N}$. Из (5) вытекает, что если на множестве $\{t : G_j(t) = G_{l_1}(t) = \ldots = G_{l_k}(t) < G_i(t),\ i = \overline{1, N};\ i \neq j \neq l_1 \neq \ldots \neq l_k\}$ произвольным образом изменять $\varphi_j^*(t)$, но так, чтобы сумма $\varphi_j^*(t) + \varphi_{l_1}^*(t) + \ldots + \varphi_{l_k}^*(t)$ равнялась единице, то норма $\| r_{\varphi^*} \|$ при этом не изменяется. Следствие доказано.

***Замечание* 1.** Если потери $L_i(t) = L_j$, $i, j = \overline{1, N}$, $i \neq j$, то в условиях следствия 3 для функции φ^* справедливо выражение (6), где $\lambda_j = \pi_j$, а $\alpha_{l_1, \ldots, l_k}(j)$ удовлетворяют условиям 1 и 2 теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть потери* $L_i(j)$ *не зависят от* i: $L_i(j) = L_j$; $i, j = \overline{1, N}$, $i \neq j$, $L_j > 0$, $j = \overline{1, N}$. *Тогда числа* λ_j, $j = \overline{1, N}$, *о которых идет речь в теореме* 1, *неотрицательны.*

Доказательство. Будем доказывать неотрицательность числа λ_N. Аналогичными рассуждениями доказывается неотрицательность остальных чисел λ_j, $j = 1, \ldots, N-1$.

Пусть $r_{\varphi^*} = (r_{\varphi^*}(1), \ldots, r_{\varphi^*}(N))$ — вектор риска с минимальной нормой. Обозначим через Γ_1 часть границы Γ множества $\mathfrak{R}$, состоящей из точек пересечения Γ с отрезками, соединяющими начало координат в пространстве E_N с точками $\mathfrak{R} \setminus \Gamma$. Как это следует из доказательства теоремы 1, $r_{\varphi^*} \in \Gamma_1$. В Γ_1 заведомо не входят точки границы $\mathfrak{R}$, лежащие над гиперплоскостью Π (определение Π дано в лемме 2 [1]). Действительно, начало координат расположено в нижнем полупространстве, определяемом гиперплоскостью Π. Поэтому отрезки, соединяющие эти точки с началом координат E_N, пересекают Π, и минимум нормы в этих точках не достигается. Очевидно, в Γ_1 не входят также точки $(r_\varphi(1), \ldots, r_\varphi(N-1), L_N)$, когда $(r_\varphi(1), \ldots, r_\varphi(N-1))$ пробегают внутренние точки множества B в топологии пространства E_{N-1}.

Пусть $(r_{\varphi^*}(1), \ldots, r_{\varphi^*}(N-1))$ — внутренняя точка в топологии E_{N-1} множества $S = \{(r_\varphi(1), \ldots, r_\varphi(N-1)),\ r_\varphi \in \mathfrak{R}\}$ и l_1 — прямая. полученная в результате пересечения гиперплоскостей $x_1 = r_{\varphi^*}(1), \ldots, x_{N-1} = r_{\varphi^*}(N-1)$. Так как $r_{\varphi^*} \in \Gamma_1$, то $r_{\varphi^*}(N)$ представляет собой N-ю координату одной из точек пересечения l_1 с $\mathfrak{R}$. Поэтому r_{φ^*} будет совпадать с одним из чисел

$$\hat{m} = \min_{\varphi \in \Phi} r_\varphi(N), \quad M = \max_{\varphi \in \Phi} r_\varphi(N),$$

где экстремумы определяются при фиксированных значениях первых $N-1$-координат вектора r_{φ^*}. Так как $r_{\varphi^*} \in \Gamma_1$, то в силу леммы 2 [1] $r_{\varphi^*}(N) = \hat{m}$. Легко видеть, что $\hat{m} \neq M$. В самом деле, предположим противное: $\hat{m} = M$. Покажем, что из этого предположения вытекает следующее утверждение: *всякая прямая* l_2 *вида* $x_1 = r_1, \ldots, x_{N-1} = r_{N-1}$, *параллельная оси* ox_N, *пересекает* $\mathfrak{R}$ *только в одной точке.* Действительно, пусть прямая l_2, проходящая через некоторую точку $(r_1, \ldots, r_{N-1})$ из S, пересекает множество $\mathfrak{R}$ по крайней мере в двух точках: $(r_1, \ldots, r_{N-1}, r')$ и $(r_1, \ldots, r_{N-1}, r'')$. Выберем точку $(\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_N) \in \mathfrak{R}$ так, чтобы точка $(r_{\varphi^*}(1), \ldots, r_{\varphi^*}(N-1))$ лежала внутри отрезка прямой, соединяющего точки $(r_1, \ldots, r_{N-1})$ и $(\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_{N-1})$. Такая точка существует, так как $(r_{\varphi^*}(1), \ldots, r_{\varphi^*}(N-1))$ — внутренняя точка S. Выпуклая оболочка точек $(r_1, \ldots, r_{N-1}, r')$, $(r_1, \ldots, r_{N-1}, r'')$ и $(\tilde{r}_1, \ldots, \tilde{r}_N)$ принадлежит $\mathfrak{R}$ и содержит точки $(r_{\varphi^*}(1), \ldots, r_{\varphi^*}(N-1), a_1)$ и $(r_{\varphi^*}(1), \ldots, r_{\varphi^*}(N-1), a_2)$, причем $a_1 \neq a_2$, что противоречит равенству $\hat{m} = M$. Следовательно, всякая прямая, параллельная оси ox_N, пересекает множество $\mathfrak{R}$ не более чем в одной точке. Отсюда и из выпуклости $\mathfrak{R}$ вытекает, что $\mathfrak{R}$ содержится в некоторой гиперплоскости, а это противоречит лемме 1 [1], так как согласно этой лемме $\mathfrak{R}$ является выпуклым телом. Поэтому утверждение $\hat{m} = M$ приводит нас к противоречию, и мы вправе заключить, что $\hat{m} \neq M$.

Числа λ_j, $j=\overline{1,N}$, удовлетворяют неравенству (4):

$$\lambda_1(r_{\varphi^*}(1)-r_\varphi(1))+\ldots+\lambda_N(\hat{m}-r_\varphi(N)), \quad \forall\, r_\varphi\in\Re. \tag{10}$$

Выберем в качестве r_φ точку $(r_{\varphi^*}(1),\ldots,r_{\varphi^*}(N-1),M)\in\Re$, лежащую на прямой l_1, и подставим ее координаты в (10). Получим

$$\lambda_N(\hat{m}-M)\le 0. \tag{11}$$

Последнее неравенство справедливо лишь тогда, когда $\lambda_N\ge 0$. Таким образом, мы доказали положительность λ_N в предположении, что точка $\rho = (r_{\varphi^*}(1),\ldots,r_{\varphi^*}(N))$ является внутренней точкой S в топологии пространства E_{N-1}. Теперь допустим, что ρ не является внутренней точкой S. Тогда можно выбрать последовательность внутренних точек $\{\rho_k\}_{k\ge 1}=\{r_\varphi^k(1),\ldots,r_\varphi^k(N-1)\}_{k\ge1}$ из S, сходящуюся к ρ. Легко видеть, что последовательность точек $\{r_k\}_{k\ge1}$, где

$$r_k=\left(r_\varphi^k(1),\ldots,r_\varphi^k(N-1),\max_{\varphi\in\Phi} r_\varphi(N)\right)$$

при $k\to\infty$ сходится к r_{φ^*} и определяет последовательность опорных гиперплоскостей $\left\{\Pi_\varphi^k\right\}_{k\ge1}$ для $\Re$ в точках r_k, $k\ge1$, сходящуюся к одной из опорных гиперплоскостей Π_{φ^*} для $\Re$ в точке r_{φ^*}. Числа λ_j, $j=\overline{1,N}$, задающие Π_{φ^*}, равны соответственно $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_j^k$, $j=\overline{1,N}$, где λ_j^k, $j=\overline{1,N}$, и определяют гиперплоскость Π_φ^k. Так как $\lambda_N^k\ge0$, $k\ge1$, то $\lambda_N\ge0$. Теорема доказана.

Из следствией 1, 2 к теореме 1 и теоремы 2 вытекает такое следствие.

Следствие 1. *Пусть потери $L_i(j)$ не зависят от i: $L_i(j)=L_j$, $i,j=\overline{1,N}$; $i\ne j$; $L_j>0$, и для любых положительных значений $\lambda_1,\ldots,\lambda_N$ попарные пересечения областей $V_1(\lambda_1,\ldots,\lambda_N),\ldots,V_N(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)$ пространства R_m, определяемых соотношениями*

$$V_j(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)=\{t:\ L_j\lambda_jf_j(t)>L_i\lambda_if_i(t),\ i=\overline{1,N},\ i\ne j\},$$

являются множествами μ-меры нуль. Тогда для любой нормы, заданной на векторном пространстве E_N, существуют такие положительные значения $\lambda_j=\lambda_j^0$, $j=\overline{1,N}$, что нерандомизированный критерий для проверки гипотез H_j, $j=\overline{1,N}$, порожденный областями $V_1(\lambda_1^0,\ldots,\lambda_N^0),\ldots,V_N(\lambda_1^0,\ldots,\lambda_N^0)$, является оптимальным статистическим критерием.

Напомним [2], что банахово пространство E_N называется банаховой структурой, если для любых точек $x=(x_1,\ldots,x_N)$ и $y=(y_1,\ldots,y_N)$ из E_N из условия $|x_k|\le|y_k|$, $k=\overline{1,N}$, следует $\|x\|\le\|y\|$.

Теорема 3. *Пусть пространство E_N является банаховой структурой, а множество векторов риска $\Re$ — телом. Тогда каковы бы ни были потери $L_i(j)$, $i,j=\overline{1,N}$, $i\ne j$, числа λ_j, $j=\overline{1,N}$, о которых идет речь в теореме 1, не отрицательны.*

Доказательство. Неотрицательность чисел λ_j, $j=\overline{1,N}$, доказывается так же, как и в теореме 2, с той лишь разницей, что вывод равенства $r_{\varphi^*}(N)=\hat{m}$

проводится без применения леммы 2 [1] следующим образом: в качестве элемента из $\Re$ с минимальной нормой можно взять элемент $(r_{\varphi^*}(1), \ldots, r_{\varphi^*}(N-1), \hat{m})$, так как по условию теоремы E_N — банахова структура, а потому

$$\| (r_{\varphi^*}(1), \ldots, r_{\varphi^*}(N-1), \hat{m}) \| \leq \| (r_{\varphi}(1), \ldots; r_{\varphi}(N-1), r_{\varphi}(N)) \|$$

для любого элемента $(r_\varphi(1), \ldots, r_\varphi(N)) \in \Re$. Следовательно, $r_{\varphi^*}(N) = \hat{m}$. Теорема доказана.

***Замечание* 1.** Если $\Re$ не является телом, то оно содержится в гиперплоскости Π, проходящей через точки $A_1 = (0, L_1(2), \ldots, L_1(N)), \ldots, A_N = (L_N(1), L_N(2), \ldots, L_N(N-1), 0)$. Точка A_i соответствует критической функции, у которой i-я компонента тождественно равна единице, а остальные компоненты тождественно равны нулю. Очевидно, опорная гиперплоскость в точке r_{φ^*} для $\Re$ будут совпадать с Π. Если Π пересекает положительные полуоси координат, то $\lambda_j \geq 0$, $j = \overline{1, N}$, так как числа λ_j, $j = \overline{1, N}$, задающие опорную гиперплоскость Π, равны обратным значениям величин отрезков, отсекаемых Π на осях координат.

Приведем пример, когда λ_j, $j = \overline{1, N}$, имеют разные знаки. Пусть

$$N = 4;\ L_i(j) = 0,\ i, j = \overline{1, 3};\ L_4(1) = L_4(3) = 1,\ L_4(2) = 2;\ L_1(4) = a > 0,$$
$$L_2(4) = b > 0,\ L_3(4) = c > 0;\ 2f_2(t) = f_1(t) + f_3(t),\ f_i(t),\ i = \overline{1, 4};$$

μ-почти всюду отличны от нуля. Нетрудно проверить, что $\Re$ содержится в гиперплоскости Π: $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ $(\lambda_1 = \lambda_3 = 1,\ \lambda_4 = 0,\ \lambda_2 = -1)$. Действительно, произвольный вектор риска

$$r_\varphi(1) = \int_{R_m} \varphi_4(t) f_1(t) \mu(dt), \quad r_\varphi(2) = 2\int_{R_m} \varphi_4(t) f_2(t) \mu(dt),$$

$$r_\varphi(3) = \int_{R_m} \varphi_4(t) f_3(t) \mu(dt), \quad r_\varphi(4) = \int_{R_m} \left(a\varphi_1(t) + b\varphi_2(t) + c\varphi_3(t)\right) f_4(t) \mu(dt).$$

Поэтому принимая во внимание, что $2f_2(t) = f_1(t) + f_3(t)$, получаем $r_\varphi(1) - r_\varphi(2) + r_\varphi(3) = 0$, $\forall\ r_\varphi = (r_\varphi(1), \ldots, r_\varphi(N)) \in \Re$. Отсюда, однако, не вытекает, что $r_{\varphi^*} = (0, 0, 0, 0)$. В самом деле, $r_\varphi(1) = r_\varphi(2) = r_\varphi(3) = 0$ при $\varphi_4(t) \equiv 0$, поскольку $f_i(t)$, $i = \overline{1, 4}$, μ-почти всюду отличны от нуля, а $r_\varphi(4) \neq 0$ при $\varphi_4(t) \equiv 0$, так как $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$, $\varphi_1(t) + \varphi_2(t) + \varphi_3(t) \equiv 1$.

***Замечание* 2.** *Пусть потери $L_i(j)$ $i, j = \overline{1, N}$; $i \neq j$, не зависят от i: $L_i(j) = L_j$ и для любых положительных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ попарные пересечения областей $V_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_N), \ldots, V_N(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ определяемых соотношениями*

$$V_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = \{ t\colon \lambda_j L_j f_j(t) \geq \lambda_i L_i f_i(t),\ i = \overline{1, N},\ i \neq j \},$$

являются множествами μ-меры нуль. Тогда можно указать процедуру для вычисления таких значений $\lambda_j = \lambda_j^0$, $j = \overline{1, N}$, что области $V_1(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_N^0), \ldots, V_N(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_N^0)$ определяют нерандомизированный минимаксный критерий (l_∞-критерий).

Действительно, так как попарные пересечения областей $V_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ являются множествами μ-меры нуль, в силу следствия 1 к теореме 2 минимаксный критерий является нерандомизированным и порождается областями $V_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ при некоторых положительных значениях λ_j, равных λ_j^0.

Следовательно,

$$r_{\varphi^*}(j) = L_j\left(1 - \int\limits_{V_j(\lambda_1^0, \ldots, \lambda_N^0)} f_j(t)\mu(dt)\right), \quad j = \overline{1, N}. \tag{12}$$

Из теоремы 2 [1] и (12) вытекает следующее утверждение: если найдутся такие значения λ_j, $j = \overline{1, N}$, что будут выполняться равенства

$$L_i\left(1 - \int\limits_{V_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)} f_i(t)\mu(dt)\right) = L_j\left(1 - \int\limits_{V_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)} f_j(t)\mu(dt)\right), \tag{13}$$

$i \neq j$; $i, j = \overline{1, N}$; при минимуме выражений, стоящих в правых и левых частях этих соотношений, то эти λ_j и есть искомые λ_j^0, ($j = \overline{1, N}$). Покажем, что такие значения λ_j^0 существуют и укажем процедуру для их нахождения.

Зададим произвольные положительные начальные значения λ_j, $j = \overline{1, N}$. Определим для этих значений λ_j, $j = \overline{1, N}$, области $V_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ и вычислим

$$r_\varphi(j) = L_j\left(1 - \int\limits_{V_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)} f_j(t)\mu(dt)\right), \quad j = \overline{1, N}.$$

В зависимости от того, какие значения приняли числа $r_\varphi(j)$, $j = \overline{1, N}$, будем изменять параметры λ_j, $j = \overline{1, N}$, по сравнению с их начальными значениями с тем, чтобы получить равенства (13). Прежде всего заметим, что: 1) если увеличивать один параметр λ_j, а остальные параметры не изменять, то область $V_j(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ будет увеличиваться, а остальные области $V_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$, $i = \overline{1, N}$; $i \neq j$, будут уменьшаться, и следовательно, $r_\varphi(j)$ будет уменьшаться, а $r_\varphi(i)$, $i = \overline{1, N}$, $i \neq j$, будут увеличиваться. Изменение чисел $r_\varphi(k)$, $k = \overline{1, N}$, при указанном изменении λ_j, $j = \overline{1, N}$, будет происходить без скачков, так как μ-мера точек, где области $V_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_N), \ldots, V_N(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ попарно пересекаются по условию, равна нулю; 2) если увеличивать несколько параметров, например, $\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_k}$, путем умножения на один и тот же коэффициент, а остальные параметры λ_j, $j = \overline{1, N}$, $j \neq j_1 \neq j_2 \neq \ldots \neq j_k$ не изменять, то аналогичная картина будет наблюдаться для областей $V_{j_1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N), \ldots, V_{j_k}(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$ и остальных областей $V_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_N)$, $i \neq j_1 \neq \ldots \neq j_k$. Поэтому числа $r_\varphi(j_1), \ldots, r_\varphi(j_k)$ уменьшаются, а $r_\varphi(i)$, $i \neq j_1 \neq \ldots \neq j_k$ увеличиваются. Как уже отмечалось, $r_\varphi(j)$, $j = \overline{1, N}$, будут непрерывными функциями от параметров λ_j, $j = \overline{1, N}$.

Пусть при начальных положительных значениях параметров λ_j, $j = \overline{1, N}$, число $r_\varphi(k)$ принимает наибольшее значение. Увеличиваем параметр λ_k при постоянных начальных значениях остальных параметров λ_j, $j = \overline{1, N}$, $j \neq k$, до тех пор, пока число $r_\varphi(k)$ впервые не сравняется с одним из оставшихся чисел $r_\varphi(j)$, $j = \overline{1, N}$, $j \neq k$, например, с числом $r_\varphi(l)$. Затем увеличиваем параметры

λ_k и λ_μ путем умножения на один и тот же возрастающий коэффициент $c > 0$ при постоянных остальных значениях параметров λ_j, $j = \overline{1, N}$, $j \neq \mu \neq k$, до тех пор, пока одно из этих чисел $r_\varphi(k)$, $r_\varphi(\mu)$ впервые не сравнится с другим числом $r_\varphi(\nu)$. Рассмотрим наибольшее из чисел $r_\varphi(k)$, $r_\varphi(\nu)$, $r_\varphi(\mu)$, которые уменьшаем, как это было описано выше. Если три числа сравнялись: $r_\varphi(k)$, $r_\varphi(\nu)$, $r_\varphi(\mu)$, то продолжаем их уменьшать путем умножения параметров λ_k, λ_μ, λ_ν на один и тот же возрастающий коэффициент $c > 1$ при постоянных значениях оставшихся параметров и т. д. Ясно, что в результате описанной процедуры мы придем к равенствам (13).

Следующая теорема позволяет в ряде важных случаев весьма просто строить l_p-критерий $(p \geq 1)$ для проверки N альтернативных конкурирующих гипотез.

Теорема 4. *Пусть гипотезе H_j соответствует распределение $G_j($ достаточной статистики T для параметра $j = \overline{1, N}$. Предположим, что:*

1) *статистика T одномерна: $T \in R^1$;*
2) *$G_j(t)$ имеет плотность по мере Лебега $g_j(t)$, $j = \overline{1, N}$;*
3) *потери $L_i(j) = L_j$, $i, j = \overline{1, N}$; $i \neq j$;*
4) *для $i > j$ или $i < j$ отношение плотностей $u_{ij} = g_j(t) / g_i(t)$ является возрастающей функцией аргумента t $(i, j = \overline{1, N}$, $i \neq j)$;*
5) *мера Лебега точек пересечения функций $g_{ij_1}(t)$ и $\mu\, u_{ij_1}(t)$, $i \neq j_1 \neq j_2$, где $\mu \in R_1$, μ — произвольное число, равна нулю.*

Тогда оптимальный l_p-критерий является нерандомизированным и порождается связными критическими областями $V_j[t_{j-1}, t_j]$, $j = \overline{1, N}$. При нумерации гипотез, для которой граничные точки множеств $\{t\colon g_j(t) > g_i(t),\ j = \overline{1, N},\ i \neq j\} = [\tau_{j-1}, \tau_j]$ образуют возрастающую последовательность $\tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_N$, точки t_j, $j = \overline{0, N}$, определяются из следующей системы уравнений:

$$t_0 = -\infty, \quad t_N = \infty,$$

$$\frac{L_k\left[1 - G_k(t_k) + G_k(t_{k-1})\right]}{L_{k+1}\left[1 - G_{k+1}(t_{k+1}) + G_{k+1}(t_k)\right]} = \left[\frac{L_{k+1}\, g_{k+1}(t_k)}{L_k\, g_k(t_k)}\right]^{1/(p-1)}, \quad k = \overline{1, N-1}. \tag{14}$$

Доказательство. Так как для $i > j$ или для $i < j$ отношение плотностей $g_j(t) / g_i(t)$ является возрастающей функцией аргумента t, то множество $D_{ij} = \left\{t\colon g_j(t) / g_i(t) > C_{ij}\right\}$, где C_{ij} — некоторая константа, будет иметь вид $(-\infty, a_i^j)$ либо вид (a_i^j, ∞), или $D_{ij} = R_1$, где $a_i^j \in R_1$. Поэтому на основании следствия 2 к теореме 1 получаем, что множество, где $\varphi_j^*(t)$ равна единице, является пересечением множеств $(-\infty, a_1]$, $(-\infty, a_2]$, … , $(-\infty, a_k]$, $[b_1, \infty)$, $[b_2, \infty)$, … , $[b_l, \infty)$. Следовательно, $\varphi_j^*(t)$ равна единице на связном множестве (t_{j-1}, t_j), где $t_j = \max(a_1, \ldots, a_k)$, $t_{j-1} = \min(b_1, \ldots, b_l)$. Из условия 5 и следствия 2 к теореме 1 вытекает, что оптимальный статистический критерий является нерандомизированным и порождается критическими областями $V_j = [t_{j-1}, t_j]$, $j = \overline{1, N}$.

Покажем теперь, что при выборе нумерации гипотез согласно требованию теоремы последовательность точек $t_0, t_1, \ldots, t_N$ является возрастающей: $t_0 < < t_1 < \ldots < t_N$. Пусть $\overline{\lambda_j}$, $j = \overline{1, N}$, — числа, определяющие данный оптимальный статистический критерий, а $\lambda_j^0 = 1/L_j$, $j = \overline{1, N}$, — числа, соответствующие оптимальному критерию с критическими областями

$$[\tau_{j-1}, \tau_j] = \{t\colon \lambda_j^0 L_j g_j(t) > \lambda_i^0 L_i g_i(t),\ i = \overline{1, N},\ i \neq j\}.$$

Если в этом критерии последовательно заменять λ_1^0 на $\overline{\lambda}_1$, λ_2^0 на $\overline{\lambda}_2, \ldots, \lambda_N^0$ на $\overline{\lambda}_N$, то, как легко видеть, область $[\tau_{j-1}, \tau_j]$ преобразуется к виду $[t_{j-1}, t_j]$, значит, $t_0 < t_1 < \ldots < t_N$. Для l_p-критерия точки $t_0 = -\infty$, $t_1, \ldots, t_{N-1}, t_N = \infty$ должны быть такими, чтобы норма

$$\|r_{\varphi^*}\|_{l_p}^p = r_{\varphi^*}^p(1) + \ldots + r_{\varphi^*}^p(N) = \left[L_1\left(1 - \int_{-\infty}^{t_1} g_1(t)\,dt\right)\right]^p +$$

$$+ \left[L_2\left(1 - \int_{t_1}^{t_2} g_2(t)\,dt\right)\right]^p + \ldots + \left[L_N\left(1 - \int_{t_{N-1}}^{\infty} g_N(t)\,dt\right)\right]^p \qquad (15)$$

была минимальной. Поэтому, дифференцируя (15) по $t_1, \ldots, t_{N-1}$ и приравнивая производные нулю, получаем систему уравнений (14) для нахождения точек $t_1, \ldots, t_{N-1}$. Теорема доказана.

***Замечание* 3.** Для минимаксного критерия (l_∞-критерия) система уравнений (14) имеет вид

$$L_k[1 - G_k(t_k) + G_k(t_{k-1})] = L_{k+1}[1 - G_{k+1}(t_{k+1}) + G_{k+1}(t_k)], \qquad (16)$$

$$k = \overline{1, N-1};\quad t_0 = -\infty,\quad t_N = \infty.$$

Для l_1-критерия точки $t_1, \ldots, t_{N-1}$ находятся из системы уравнений вида

$$L_{k+1} g_{k+1}(t_k) = L_k g_k(t_k),\quad k = \overline{1, N-1};\quad t_0 = -\infty,\quad t_N = \infty. \qquad (17)$$

Приведем примеры, иллюстрирующие методику построения оптимальных статистических критериев для проверки N альтернативных простых гипотез.

***Пример* 1.** Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — выборка из нормального распределения со средним 0 и дисперсией σ^2, так что плотность x равна

$$(2\pi\sigma)^{-n/2} \exp\left\{-0{,}5\sigma^{-2} \sum\nolimits_{i=1}^n x_i^2\right\}.$$

Пусть гипотезе H_j отвечает значение σ^2, равное σ_j^2, $j = \overline{1, N}$. Предположим, что потери, связанные с принятием гипотезы H_i, когда верна гипотеза H_j, не зависят от $i\colon L_i(j) = L_j$, $i \neq j$, $i, j = \overline{1, N}$. Требуется построить l_p-критерий для проверки этих гипотез. В силу теоремы о факторизации [3] статистика $T(x) = = \sum_{i=1}^n x_i^2$ является достаточной для параметра σ^2 и имеет плотность $g(t) = = \sigma^{-2} f_n(t/\sigma^2)$, где

$$f_n(t) = \left[2^{n/2}\Gamma(n/2)\right]^{-1} t^{n/2-1} e^{-t/2}$$

— плотность χ^2-распределения с n-степенями свободы. Проверим выполнение условий теоремы 4. Выполнение условий 1 – 3 очевидно. Отношение плотностей

$$\frac{g_i(t)}{g_j(t)} = \frac{\sigma_j^2}{\sigma_i^2} \frac{f_n(t/\sigma_i^2)}{f_n(t/\sigma_j^2)} = \left(\frac{\sigma_j^2}{\sigma_i^2}\right)^{n/2} \exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{1}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\sigma_j^2}\right)\right\},\quad t > 0,$$

при $\sigma_i^2 > \sigma_j^2$ является возрастающей функцией t, поэтому условие 4 теоремы 4 также выполняется.

Поскольку уравнение относительно t

$$\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{j_1}}\right)^n \exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{1}{\sigma_{j_1}^2}-\frac{1}{\sigma_i^2}\right)\right\} = \mu\left(\frac{\sigma_i}{\sigma_{j_2}^2}\right)^n \exp\left\{-\frac{t}{2}\left(\frac{1}{\sigma_{j_2}^2}-\frac{1}{\sigma_i^2}\right)\right\}$$

для $\forall\,\mu \in R_1$ имеет не более одного решения, то условие 5 выполняется. Из вида графиков $g_j(t)$, $j=\overline{1,N}$, легко видеть, что при $\sigma_1^2 < \sigma_2^2 < \ldots < \sigma_n^2$ нумерация гипотез удовлетворяет требованию теоремы 4. В силу теоремы 4 существует нерандомизированный l_p-критерий, который порождается критическими областями $V_j = [t_{j-1}, t_j]$, $j=\overline{1,N}$, где точки $t_0, t_1, \ldots, t_{N-1}, t_N$ определяются из системы уравнений (14). В частном случае l_1-критерия $t_0=-\infty$, $t_N=\infty$,

$$t_k = \frac{2\sigma_{k+1}^2\sigma_k^2}{\sigma_{k+1}^2-\sigma_k^2}\ln\left[\frac{L_k}{L_{k+1}}\left(\frac{\sigma_{k+1}}{\sigma_k}\right)^n\right].$$

Пример 2. Пусть $x=(x_0,\ldots,x_N)$ — выборка из нормального распределения с дисперсией 1 и со средним $\overline{m}$. Пусть гипотезе H_j отвечает значение $\overline{m}$, равное $\overline{m}_j$. Предположим, что потери $L_i(j)=L_j$, $i,j=\overline{1,N}$; $i\neq j$; $\overline{m}_i \neq \overline{m}_j$, $i\neq j$. Требуется построить l_p-критерий для проверки гипотез H_j, $j=\overline{1,N}$. Достаточной статистикой для параметра $\overline{m}$ является

$$T(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

$T(x)$ распределено нормально со средним $\overline{m}$ с дисперсией $1/n$. Легко проверить, что все условия теоремы 4 выполняются. В частности, отношение плотностей

$$u_{ij}(t) = \frac{g_j(t)}{g_i(t)} = \exp\left\{-\frac{n}{2}\left(\overline{m}_j^2-\overline{m}_i^2\right)\right\}\exp\{n(\overline{m}_j-\overline{m}_i)t\}$$

при $\overline{m}_j > \overline{m}_i$ является возрастающей функцией аргумента t. Из вида графиков $g_j(t)$, $j=\overline{1,N}$, следует, что при $\overline{m}_1 < \overline{m}_2 < \ldots < \overline{m}_N$ нумерация гипотез удовлетворяет требованию теоремы 4. Поэтому на основании этой теоремы существует нерандомизированный l_p-критерий для проверки гипотез H_j, $j=\overline{1,N}$, который порождается критическими областями $V_j=[t_{j-1},t_j]$, $j=\overline{1,N}$, где точки $t_0=-\infty, t_1,\ldots,t_{N-1}, t_N=\infty$ определяются из системы уравнений (14).

Для l_1-критерия

$$t_k = \frac{1}{2}\left(\overline{m}_{k+1}+\overline{m}_k\right) + \left[n\left(\overline{m}_{k+1}+\overline{m}_k\right)\right]^{-1}\ln\frac{L_k}{L_{k+1}},$$

$$k = 1,\ldots,N-1;\; t_0=-\infty,\; t_N=\infty.$$

1. *Кук Ю. В., Петунин Ю. И.* Проверка гипотез с помощью оптимальных статистических критериев // Укр. мат. журн. – 1994. – 46, № 4. – С. 378 – 389.
2. *Биркгоф Г.* Теория структур. – М.: Мир, 1952. – 407 с.

Получено 16. 08. 91