УДК 517.95

А. И. Фирдман, канд.физ.-мат. наук, (Омс. политехн. ин-т),
С. Д. Эйдельман, д-р физ.-мат. наук (Киев. высш. инж. радиотехн. уч-ще)

О ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЯХ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЯМ

We study harmonic functions on a strip satisfying nonlocal boundary conditions and establish conditions, which should be imposed on the coefficients in boundary conditions to guarantee the validity of the theorem on the uniqueness of nonnegative solutions. We also present examples of the situations where these theorems are not true.

Вивчаються гармонічні в смузі функції, які задовольняють нелокальні граничні умови. Знаходяться умови на коефіцієнти граничних умов, при яких справедлива теорема єдиності невід'ємних розв'язків. Наводяться приклади, коли такі теореми не справедливі.

Известно, что единственность решений граничных задач для эллиптических уравнений в неограниченных областях требует дополнительных условий на поведение решений на бесконечности. Такие условия могут быть качественно различными. Обычно это условия убывания или специальной колеблемости решений типа условий Зоммерфельда на бесконечности. В. А. Кондратьев и С. Д. Эйдельман в работе [1] обратили внимание на то, что еще одним из возможных условий единственности решений граничных задач может быть предположение об их положительности при достаточно больших значениях аргументов.

В установлении таких теорем единственности существенную роль играют специальные спектральные свойства ядра некоторого интегрального оператора, связанного с задачей. В [1] исследована задача Дирихле для бигармонического уравнения в полосе $\Pi = \{(x, y): x \in \mathbb{R}^1, y \in [0, 1]\}$. Другие краевые задачи для этого же уравнения рассмотрены авторами в [2].

Для гармонических в полосе Π функций, удовлетворяющих условиям Дирихле или Неймана, таких теорем единственности заведомо нет. Статья посвящена изучению гармонических в Π функций, удовлетворяющих простейшим нелокальным граничным условиям, и нахождению условий на коэффициенты граничных условий, при которых справедливы теоремы единственности положительных решений.

Этой работой авторы хотят обратить внимание на новые интересные, на наш взгляд, свойства гармонических функций. Мы надеемся, что скоро появятся дальнейшие более общие результаты в этом направлении.

1. Постановка задачи. Результат. Пример. Изучаются гармонические в полосе $\Pi = \{(x, y): x \in \mathbb{R}^1, y \in [0, 1]\}$ функции $u(x, y)$, удовлетворяющие следующим нелокальным граничным условиям:

$$u|_{y=+0} + \alpha\partial_y u|_{y=1-0} = f_1(x), \quad -\beta\partial_y u|_{y=+0} + u|_{y=1-0} = f_2(x), \tag{1}$$

где α и β — вещественные параметры.

Задачу (1) с нулевыми граничными условиями обозначим (1_0).

Определение. *Гармоническая в* Π *функция* $u(x, y)$ *принадлежит классу* $\mathfrak{A}^+$, *если она неотрицательна для достаточно больших* x *и существуют положительные постоянные* c, C *такие, что*

$$\left|\partial_x^{\ell}\partial_y^{s} u(x, y)\right| \le C\exp\{c|x|\}, \quad l + s \le 2.$$

Центральным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Если* $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{M} = \{(0, \beta): \beta \in \mathbb{R}^1\setminus[-2/3\pi, 1]\} \cup \{(\alpha, 0): \alpha \in R^1\setminus[-2/3\pi, 1]\}$, *то решение* $u(x, y)$ *задачи* (1_0) *из класса* $\mathfrak{A}^+$ *тождественно равно нулю.*

Доказательством теоремы 1 мы завершим статью, а сейчас приведем простой пример, описывающий случаи, когда задача (1_0) имеет нетривиальные неотрицательные решения из $\mathfrak{A}^+$.

***Пример* 1.** Рассмотрим гармонические функции $u(x, y, \mu) = \sin\mu y \operatorname{ch}\mu x$. Выберем вещественный параметр μ так, чтобы они удовлетворяли граничным условиям (1_0). Предположим, что $\alpha = 0$. Тогда первое граничное условие (1_0) удовлетворяется при любом μ. Для удовлетворения второму условию нужно, чтобы μ было решением уравнения $\beta\mu = \sin\mu$. При $\beta \in [0, 1]$ это уравнение имеет решение $\mu_\beta \in [0, \pi]$, а гармонические функции $u_\beta(x, y) = \sin\mu_\beta y \times$ $\times \operatorname{ch}\mu_\beta x$ — положительные (при $y \in [0, 1]$) решения задачи (1_0). При $\beta = 0$: $\mu_0 = \pi$, $u_0(x, y) = \sin\pi y \operatorname{sh}\pi x$; при $\beta = 1: u_1(x, y) \equiv y$ — неотрицательное решение задачи (1_0). Итак, при $\alpha = 0$, $\beta \in [0, 1]$ есть нетривиальное решение задачи (1_0). В частности, это относится к задаче Дирихле $(\alpha = \beta = 0)$. Контрпример в случае задачи Неймана: $\partial_y u|_{y=+0} = \partial_y u|_{y=1-0} = 0$, $u(x, y) = c > 0$; в случае, когда при $y = 0$ задано условие Дирихле, а при $y = 1$ условие Неймана: $u(x, y) = \sin(\pi y/2)\operatorname{ch}(\pi x/2)$.

2. Исследование ядра разрешающего оператора задачи с параметром. Задача (1_0) исследуется по схеме, предложенной В. А. Кондратьевым и С. Д. Эйдельманом в [1]. Кратко ее повторим. По функции $u(x, y)$ класса $\mathfrak{A}^+$ определим функцию $v(x, y) = u(x, y)\theta(x)$, где $\theta(x)$ — срезывающая функция $\theta(x) \in$ $\in C^\infty(\mathbb{R}^1)$, $\theta(x) \equiv 1$ при $x > 1$, $\theta(x) \equiv 0$ при $x < 0$; $\theta(x): \mathbb{R}^1 \to [0, 1]$. Тогда $v(x, y)$ является решением уравнения Пуассона

$$\Delta v = f(x, y) = \theta''(x)u(x, y) + 2\theta'(x)\partial_x u(x, y).$$

Пусть $u(x, y)$ удовлетворяет граничным условиям (1_0). Этим же условиям удовлетворяет и функция $v(x, y)$. Предположение о том, что $u(x, y)$ и ее производные растут не быстрее $\exp\{c|x|\}$ (при $|x| \to \infty$), позволяют к решению $v(x, y)$ задачи

$$\Delta v = f(x, y), \ v|_{y=+0} + \alpha\partial_y v|_{y=1-0} = 0, \ -\beta\partial_y v|_{y=+0} + v|_{y=1-0} = 0 \quad (2)$$

применить комплексное преобразование Фурье:

$$\hat{v}(\lambda, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-i\lambda x\} v(x, y)dx, \ \ v(x, y) = (1/2\pi)\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i\lambda x\}\hat{v}(\lambda, y)d\lambda, \quad (3)$$

$$(\partial_y^2 - \lambda^2)\hat{v}(\lambda, y) = \hat{f}(\lambda, y), \quad \hat{v}|_{y=+0} + \alpha\partial_y\hat{v}|_{y=1-0} = 0,$$
$$-\beta\partial_y\hat{v}|_{y=+0} + \hat{v}|_{y=1-0} = 0, \quad \lambda = \sigma + i\tau, \quad \tau < -c. \quad (4)$$

Напомним, что $f(x, y)$ — финитная гладкая по x функция, поэтому функция $\hat{f}(\lambda, y)$ всегда существует и является целой по λ функцией и для нее справедливы оценки

$$|\hat{f}(\lambda, y)| \le C_q(1 + |\sigma|^2)^{-q}\exp\{c_1|\tau|\}, \quad \forall q > 0, \quad \lambda = \sigma + i\tau. \quad (5)$$

Решение задачи (4) задается формулой

$$\hat{v}(\lambda, y) = \int_0^1 R(\lambda; y, s)\hat{f}(\lambda, s)ds, \quad (6)$$

где ядро (функция Грина) $R(\lambda; y, s)$ задачи (4) определяется с помощью стандартного вычисления следующей формулой:

$$R_{\alpha\beta}(\lambda; y, s) = \Delta_{\alpha\beta}(\lambda; y, s) / \Delta_{\alpha\beta}(\lambda), \tag{7}$$

где

$$\Delta_{\alpha\beta}(\lambda) = \lambda\,[(1-\alpha\beta\lambda^2)\,\mathrm{sh}\,\lambda - (\alpha+\beta)\,\lambda];$$

$$\Delta_{\alpha\beta}(\lambda; y, s) = \begin{cases} \lambda\alpha\,\mathrm{sh}\,\lambda(y-s) - \mathrm{sh}\,\lambda(1-s)\,\mathrm{sh}\,\lambda y + \alpha\beta\lambda^2\,\mathrm{ch}\,\lambda(1-s)\,\mathrm{ch}\,\lambda y, & 0 \le y < s, \\ \lambda\beta\,\mathrm{sh}\,\lambda(y-s) - \mathrm{sh}\,\lambda(1-y)\,\mathrm{sh}\,\lambda s + \alpha\beta\lambda^2\,\mathrm{ch}\,\lambda s\,\mathrm{ch}\,\lambda(1-y), & s < y \le 1. \end{cases} \tag{8}$$

В интересующем нас доказательстве теоремы 1 существенно используется следующее далее описание свойств мероморфной функции $R_{\alpha\beta}(\lambda; y, s)$. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что α и β одновременно не обращаются в нуль (исключаем из рассмотрения задачу Дирихле). Обозначим через γ положительный корень уравнения $\mathrm{th}\,\lambda = \lambda$, $\gamma^* = (1-\gamma^2)^{-1/2}$.

Теорема 2. *Мероморфная функция $R_{\alpha\beta}(\lambda; y, s)$ имеет следующие свойства:*

1. *При любых $(\alpha, \beta) \in R^2$ в каждой конечной полосе $|\tau| < A$ комплексной λ-плоскости: а) имеет конечное число полюсов; б) существуют положительные постоянные $C_{\alpha\beta}(A)$, $\Lambda_{\alpha\beta}(A)$ такие, что*

$$|R_{\alpha\beta}(\lambda; y, s)| \le C_{\alpha\beta}(A)|\lambda|^2 \exp\{-|\lambda||y-s|\}, \ \forall\,\lambda \in \{\lambda : |\lambda| > \Lambda_{\alpha\beta}(A)\}.$$

2. *При любых $(\alpha, \beta) \in R^2 \setminus \{(\alpha, \beta) : \alpha + \beta = 1\}$ $\lambda = 0$ — регулярная точка $R_{\alpha\beta}(\lambda; y, s)$.*

3. *Только при $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{M}$ мероморфная функция $R_{\alpha\beta}(\lambda; y, s)$ не имеет мнимых полюсов $\lambda = i\tau$, $\tau \ne 0$.*

4. *При $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{M} \setminus (\{-\gamma^*, 0\} \cup \{0, \gamma^*\})$ все полюсы $R_{\alpha\beta}(\lambda; y, s)$ простые; полюсы γ и $-\gamma$ функций $R_{\gamma^*0}(\lambda; y, s)$, $R_{0\gamma^*}(\lambda; y, s)$ имеют второй порядок; остальные полюсы этих функций простые.*

Доказательство. Изучим расположение нулей $\lambda_j = \sigma_j + i\tau_j$ функции $\Delta(\lambda)\backslash\lambda$ в комплексной λ-плоскости; (σ_j, τ_j) являются решениями следующей системы трансцендентных уравнений:

$$\begin{aligned} &[\alpha\beta(\sigma^2-\tau^2)-1]\,\mathrm{sh}\,\sigma\cos\tau - 2\alpha\beta\sigma\tau\,\mathrm{ch}\,\sigma\sin\tau + (\alpha+\beta)\sigma = 0, \\ &[\alpha\beta(\sigma^2-\tau^2)-1]\,\mathrm{ch}\,\sigma\sin\tau + 2\alpha\beta\sigma\tau\,\mathrm{sh}\,\sigma\cos\tau + (\alpha+\beta)\tau = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Перепишем систему (9), разделив уравнения на положительную функцию $\mathrm{ch}\,\sigma$:

$$[\alpha\beta(\sigma^2-\tau^2)-1]\,\mathrm{th}\,\sigma\cos\tau - 2\alpha\beta\sigma\tau\sin\tau = -(\alpha+\beta)\sigma/\mathrm{ch}\,\sigma, \tag{$9_1'$}$$

$$[\alpha\beta(\sigma^2-\tau^2)-1]\sin\tau + 2\alpha\beta\sigma\tau\,\mathrm{th}\,\sigma\cos\tau = -(\alpha+\beta)\tau/\mathrm{ch}\,\sigma. \tag{$9_2'$}$$

Переходим к доказательству утверждения 1 а). Если $\alpha\beta = 0$, $\alpha + \beta = 0$, то $\alpha = \beta = 0$ (случай задачи Дирихле), если $\alpha\beta = 0$, $\alpha + \beta \ne 0$, система (9) имеет единственное решение $\sigma = 0$, $\tau = 0$. Пусть теперь $\alpha\beta \ne 0$; предположим, что система (9) имеет счетное множество решений (σ_j, τ_j): $\forall j\, |\tau_j| \le A$, $|\sigma_j| \to \to \infty$ при $|j| \to \infty$.

Покажем, что последнее утверждение противоречит тому, что (σ_j, τ_j) являются решениями системы (9′). Есть две возможности: или существует подпоследовательность τ_{jk} такая, что $|\cos \tau_{jk}| \ge \delta$ для некоторого $\delta \in]0, 1[$, или такие $\tau_{jk'}$, что $|\cos \tau_{jk'}| < \delta$ и, следовательно, $|\sin \tau_{jk'}| \ge \sqrt{1-\delta^2}$. В первом случае (σ_{jk}, τ_{jk}) не могут удовлетворять уравнению $(9_1')$, так как при $|\sigma_{jk}| \to \infty$ функция, стоящая в левой части $(9_1')$, будет неограниченно расти, а в правой — стремиться к нулю. Во втором случае $(\sigma_{jk'}, \tau_{jk'})$ по тем же причинам не может удовлетворять уравнению $(9_2')$. Итак, отрицание утверждения 1 а) приводит к противоречию.

Из 1 а) следует, что для любого положительного A можно указать такое $\Lambda'_{\alpha\beta}(A)$, что в области $\{\lambda = \sigma + i\tau : |\tau| < A,\ |\lambda| < \Lambda'_{\alpha\beta}(A)\}$ функция $R_{\alpha\beta}(\lambda; y, s)$ не имеет полюсов. Увеличивая, если нужно, постоянную $\Lambda'_{\alpha\beta}(A)$ и оценивая $|\Delta_{\alpha\beta}(\lambda; y, s)|$ сверху, а $|\Delta_{\alpha\beta}(\lambda)|$ снизу (при больших $|\lambda|$), приходим к установлению утверждения 1 б).

Утверждение 2 доказывается с помощью маклореновских разложений целых функций $\Delta_{\alpha\beta}(\lambda)$, $\Delta_{\alpha\beta}(\lambda; y, s)$. Следующее из этого разложения асимптотическое (при $\lambda \to 0$) представление $\Delta_{\alpha\beta}(\lambda; y, s)$ имеет вид

$$\Delta_{\alpha\beta}(\lambda) = \lambda\left[(1-\alpha\beta\lambda^2)\sum_{\rho=0}^{\infty}\lambda^{2\rho+1}/(2\rho+1)! - (\alpha+\beta)\lambda\right] = \lambda[(1 -$$

$$- \alpha\beta\lambda^2)(\lambda + \lambda^3/3! + \ldots) - (\alpha+\beta)\lambda] = \lambda^2[(1-\alpha\beta\lambda^2)(1+\lambda^2/6+\ldots) -$$

$$- (\alpha+\beta)] = \lambda^2[\{1-(\alpha+\beta)\} + (1/6 - \alpha\beta)\lambda^2 + o(\lambda^2)]. \tag{10}$$

Из (10) и аналогичного представления для $\Delta_{\alpha\beta}(\lambda; y, s)$ непосредственно следует утверждение 2.

Установим справедливость утверждения 3. Изучаются чисто мнимые решения системы (9′) $\lambda_j = i\tau_j$. В этом случае уравнение $(9_1')$ становится тождеством, а уравнение $(9_2')$ может быть записано в виде

$$(\sin\tau)/\tau = (\alpha+\beta)/(1+\alpha\beta\tau^2). \tag{11}$$

Рассмотрим такие возможности: 1) $\alpha = 0$, $\beta \ne 0$; 2) $\alpha \ne 0$, $\beta = 0$; 3) $\alpha + \beta = 0$, $\alpha \ne 0$; 4) $\alpha + \beta \ne 0$, $\alpha\beta \ne 0$. В случае 1) уравнение $\sin\tau = \beta\tau$ имеет нетривиальное решение при любом $\beta \in [-2/3\pi, 1[$ и не имеет таких решений при других значениях параметра β, в 2) — ситуация аналогичная. В случае 3) уравнение $(9_2')$ записывается в виде

$$(-\alpha^2\tau^2 + 1)\sin\tau = 0. \tag{12}$$

Оно, очевидно, имеет решения $\tau = \pm(1/\lambda)$, $\tau = \pi n$, $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Наконец, в случае 4) решения уравнения (11) естественно искать как абсциссы точек пересечения графиков функций $z = \varphi_1(\tau) \equiv (\sin\tau)/\tau$, $z = \varphi_2(\tau) \equiv (\alpha+\beta)/(1+\alpha\beta\tau^2)$. Последовательно анализируя все возможные сочетания знаков $\alpha+\beta$ и $\alpha\beta$ и используя то, что функция $\varphi_2(\tau)$ быстрее стремится к нулю при $|\tau| \to \infty$, чем $\varphi_1(\tau)$, легко установить, что всегда существуют ненулевые решения уравнения (11).

Осталось доказать утверждение 4. Для $(\alpha, \beta) \in \mathfrak{M}$ следует рассмотреть уравнение $\operatorname{sh}\lambda = \alpha\lambda$ (или $\operatorname{sh}\lambda = \beta\lambda$). Нужно выяснить, когда функция $\Phi_\alpha(\lambda) = \operatorname{sh}\lambda - \alpha\lambda$ имеет кратный нуль. Для этого совместно решим уравнения

$$\operatorname{sh}\lambda = \alpha\lambda, \quad \operatorname{ch}\lambda = \alpha. \tag{13}$$

Из уравнений (13) следуют равенства $\alpha^2(1-\lambda^2) = 1$, $\operatorname{th}\lambda = \lambda$, т. е. при $\alpha = \gamma^*$ $(\beta = \gamma^*)$ уравнения (13) имеют решения $\lambda = \gamma, -\gamma$. Итак, мероморфные функции $R_{\gamma^* 0}(\lambda; y, s)$ и $R_{0\gamma^*}(\lambda; y, s)$ имеют полюсы $\lambda = \gamma$, $\lambda = -\gamma$ кратности два, все остальные полюсы этих функций простые.

***Пример* 2.** Из доказательства теоремы 2 следует описанный ниже способ нахождения параметров (α, β), для которых задача (1_0) имеет нетривиальные неотрицательные решения класса $\mathfrak{A}^+$. Будем предполагать, что $\alpha\beta \neq 0$.

Решение будем искать в виде

$$u_\mu^{(\alpha,\beta)}(x, y) = [A \sin\mu y + B\cos\mu y]\operatorname{ch}\mu x \equiv U_\mu^{(\alpha,\beta)}(y)\operatorname{ch}\mu x. \tag{14}$$

Подберем A, B, μ так, чтобы $u_\mu^{(\alpha,\beta)}(x, y)$ было решением задачи (1_0). При этом получим алгебраическую систему

$$\alpha\mu\cos\mu \cdot A + (1 - \alpha\mu\sin\mu)\cdot B = 0,$$
$$(\sin\mu - \beta\mu)\cdot A + \cos\mu \cdot B = 0.$$

Она имеет нетривиальное решение, если μ будет решением уравнения

$$(\alpha+\beta)\mu - (1 + \alpha\beta\mu^2)\sin\mu = 0. \tag{15}$$

Если $\cos\mu \neq 0$, то $U_\mu^{(\alpha,\beta)}(y)$ будет определяться формулой

$$U_\mu^{(\alpha,\beta)}(y) = [A\sin\mu y + (\beta\mu - \sin\mu)\cos\mu y/\cos\mu]. \tag{16}$$

Задача заключается в нахождении тех (α, β), при которых для некоторого решения μ уравнения (15) $U_\mu^{(\alpha,\beta)}(y) \geq 0$ $\forall\, y \in [0, 1]$. Приведем простой пример реализации этого соображения. Пусть $\alpha + \beta = 0$, тогда уравнение (15) имеет решение $\mu = 1/\alpha$ и формула (16) запишется в виде

$$U_{1/\alpha}^{(\alpha,-\alpha)}(y) = A\,[\sin(y/\alpha) + (1 - \sin 1/\alpha)\cos(y/\alpha)/\cos(1/\alpha)],$$

или после элементарных преобразований (полагая $A/\cos(1/\alpha) = 1$):

$$U_{1/\alpha}^{(\alpha_1-\alpha)}(y) = \sin(\pi/4 - 1/2\alpha)\cos(\pi/4 + 1/2\alpha - y/\alpha). \tag{17}$$

Легко проверить, что эта функция будет неотрицательна, если $\alpha \in\,]-\infty, -2/\pi[\, \cup\,]2/\pi, \infty[$.

***Пример* 3.** Формула (16) может быть преобразована следующим образом:

$$U_\mu^{(\alpha,\beta)}(y) = [-\sin(1-y)\mu + \beta\mu\cos\mu y]. \tag{18}$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что если $\beta \geq 1$, $\mu \in\,]0, \pi/2[$, то для $y \in [0, 1]$ функция $U_\mu^{(\alpha,\beta)}(y)$, определенная формулой (18), неотрицательна.

Анализируя уравнение (15), можно убедиться, что $\mu \in]0, \pi/2[$, если α и β удовлетворяют условиям

$$\beta \geq 1, \quad 0 < \alpha + \beta < 1, \quad \alpha\beta < -4/\pi^2.$$

3. ***Доказательство теоремы*** 1 проводится по схеме, изложенной в [1], но наличие полюсов второго порядка у функции $R(\lambda; y, s)$ требует небольшой модификации рассуждений. Коротко ее изложим.

Исходя из формулы

$$v(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty - c_2 i}^{\infty - c_2 i} d\lambda \int\limits_0^1 e^{i\lambda x} R(\lambda; y, s) \hat{f}(\lambda, s) ds \tag{19}$$

и используя теорему о вычетах, оценку (5) и свойство 1 из теоремы 2 $R(\lambda; y, s)$, можно от интегрирования по прямой $\tau = -c_2$ перейти к интегрированию по прямой $\tau = N$ в комплексной λ-плоскости, на которой нет полюсов функции $R(\lambda; y, s)$. При этом получится такое основное равенство:

$$v(x, y) = \sum_{-c_2 < \tau_j < N} \sum_{q=0}^{r_j - 1} \varphi_{jq}(y) x^q \exp\{i\sigma_j x - \tau_j x\} + v_N(x, y); \tag{20}$$

$$v_N(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty + Ni}^{\infty + Ni} d\lambda \int\limits_0^1 e^{i\lambda x} R(\lambda; y, s) \hat{f}(\lambda, s) ds,$$

где r_j — порядок $\lambda_j = \sigma_j + i\tau_j$ как полюса $R(\lambda; y, s)$, а для $v_N(x, y)$ при $x \geq 2$ справедлива оценка

$$|v_N(x, y)| \leq C \exp\{-Nx\}. \tag{21}$$

Из основного равенства (20), равенства (21) и неотрицательности $v(x, y)$ при достаточно больших x непосредственно следует тождественное равенство нулю $v(x, y)$, а следовательно, и $u(x, y)$. В случае, когда полюсы $R(\lambda; y, s)$ простые и имеют свойства из теоремы 2, доказательство этого утверждения изложено в [1, с. 126 – 128]. Приведем то небольшое дополнение к этим рассуждениям, которое связано с появлением в формуле (20) функций x^q. Для этого достаточно показать обращение в нуль функции $\varphi_{j, r_1 - 1}(y)$, $r_1 > 1$, соответствующей λ_j с наименьшей мнимой частью $\tau_1 (\tau_1 > -c_2)$; пусть $\operatorname{Im} \lambda_1 = \operatorname{Im} \lambda_2 = \ldots = \operatorname{Im} \lambda_p = \tau_1$. Из (20) при достаточно большом x следует такое асимптотическое равенство:

$$v(x, y) x^{-(r_1 - 1)} \exp(\tau_1 x) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_{j, r_1 - 1}(y) \exp\{i\sigma_j x\} + O(1/x). \tag{22}$$

Из равенства (22), повторяя рассуждения из [1], приходим к тому, что $\varphi_{j, r_1 - 1}(y) \equiv 0$.

1. *Кондратьев В. А., Эйдельман С. Д.* О бигармонических функциях, неотрицательных в полуполосе // Мат. заметки. – 1974. – **15**, №1. – С. 121 – 128.
2. *Фирдман А. И., Эйдельман С. Д.* Об единственности решений граничных задач для бигармонического уравнения // Укр. мат. журн. – 1990. – **41**, №4. – С. 581 – 584.

Получено 08.04.92